МАТЕМАТИКА

MSC 35Q05

УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА-ПУАССОНА-ДАРБУ С ФРЕДГОЛЬМОВЫМ ОПЕРАТОРОМ ПРИ ПРОИЗВОДНЫХ

А.В. Глушак

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, 308007, Белгород, e-mail: Glushak@bsu.edu.ru

Аннотация. Исследованы условия разрешимости задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу с фредгольмовым оператором при производных.

Ключевые слова: абстрактная задача Коши, уравнение Эйлера-Пуассона-Дарбу, фредгольмов оператор, каскадный метод.

Пусть A — линейный замкнутый оператор, действующий из банахова пространств E_1 в банахово пространство E_2, с плотной в E_1 областью определения $D(A)$.

Оператор A называется нётеровым, если его образ $\operatorname{im} A$ замкнут, ядро $\ker A$ конечномерно и дефектное пространство $\operatorname{coker} A$ конечномерно. Разность $\dim\ker A-\dim\operatorname{coker} A$ называется индексом оператора A. Будем называть нётеровый оператор с нулевым индексом фредгольмовым.

При $k \geq 0$ рассмотрим задачу Коши для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу с фредгольмовым оператором A при производных

$$A\left(t^k u'(t)\right)' = t^k Bu(t)\,, \quad t > 0\,, \tag{1}$$

$$u(0) = U_0\,, \quad u'(0) = 0\,. \tag{2}$$

Для простоты изложения будем считать B ограниченным оператором. Отметим также, что уравнения, неразрешённые относительно старшей производной производной, принято называть уравнениями соболевского типа.

В случае существования ограниченного обратного A^{-1} задача Коши (1), (2) исследована в [1], [2], [3]. В этих работах необходимое и достаточное условия разрешимости задачи сформулированы в терминах оценки нормы степени резольвенты оператора $A^{-1}B$ и ее производных.

При исследовании разрешимости задачи (1), (2) с фредгольмовым оператором A при производных будут использованы результаты работы [4], в которой рассмотрена задача Коши для уравнения первого порядка

$$Au'(t) = Bu(t)\,, \quad u(0) = U_0 \tag{3}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований. грант № 13-01-00378 А-2013.

с фредгольмовым оператором A при производной. Обзор других исследований, посвящённых разрешимости задачи (3) может быть найден в [5]- [8]. По поводу линейных уравнений соболевского типа высокого порядка см. [9].

Предложенный в работах [4], [8] метод (каскадный метод) основан на последовательном расщеплении рассматриваемого уравнения па уравнения в подпространствах, одно из которых конечномерно. При этом в другом из подпространств получается уравнение, с обратимым оператором при старшей производной.

Обозначим через $C^n(\mathfrak{T}, E_0)$ пространство n раз сильно непрерывно дифференцируемых при $t \in \mathfrak{T}$ функций со значениями в $E_0 \subset E$.

Определение 1. *Решением уравнения (1) называется функция $u(t) \in C^2(\bar{R}_+, E_1)$, для которой $u'(t)$, $u''(t) \in D(A)$ при $t > 0$, и удовлетворяющая уравнению* (1).

Для фредгольмова оператора A с $\dim\ker A = \dim\operatorname{coker} A = m_0$ существует разложение банаховых пространств E_1 и E_2 в прямые суммы (см. [10], с. 336):

$$E_1 = \ker A \dotplus \operatorname{coim} A\,, \quad E_2 = \operatorname{im} A \dotplus \operatorname{coker} A\,. \tag{4}$$

Для $j = 1,\ 2$ обозначим единичный оператор в E_j через I_j, проектор па $\ker A$ — через P_0, $P_0 : E_1 \to \ker A$, проектор на $\operatorname{coker} A$ — через Q_0, $Q_0 : E_2 \to \operatorname{coker} A$, а сужение оператора A на $\operatorname{coim} A \bigcap D(A) = M$ — через $\tilde{A}$, $\tilde{A} : M \to \operatorname{im} A$.

Поскольку оператор $\tilde{A}$ отображает M па $\operatorname{im} A$ взаимно однозначно, то, согласно теореме Банаха, имеет ограниченный обратный оператор $\tilde{A}^{-1} : \operatorname{im} A \to M$, т.е. $\tilde{A}^{-1} \in L(\operatorname{im} A, M)$.

В дальнейшем нам также понадобится оператор $H_0 = \tilde{A}^{-1}(I_2 - Q_0)$, $H_0 \in L(E_2, M)$.

Лемма 1 [4]. *Пусть $x \in D(A)$, $y \in E_2$. Тогда уравнение $Ax = y$ эквивалентно системе*

$$Q_0 y = 0\,, \quad x = H_0 y + P_0 x\,,$$

где $P_0 x$ — произвольный элемент подпространства $\ker A$.

Многие работы посвящались изучению возмущения фредгольмового оператора A ограниченным оператором λB, где $\lambda \in \mathbb{C}$ — малый по модулю параметр, и исследованию обратимости оператора $A+\lambda B$. При этом существенную роль играют B-жордановы цепочки оператора A, в терминах которых описываются свойства оператора $(A+\lambda B)^{-1}$. Основное содержание настоящей статьи составляет применение результатов, получаемых в зависимости от условий существования оператора $(A + \lambda B)^{-1}$, к изучению вопросов существования, единственности и неединственности решения задачи Коши для сингулярного дифференциального уравнения второго порядка с фредгольмовым оператором при производных.

Для $x \in D(A)$, $y \in E_2$ рассмотрим уравнение

$$(A + \lambda B)x = y \tag{5}$$

с малым но модулю параметром λ. Согласно лемме I, уравнение (5) эквивалентно системе

$$Q_0 y - \lambda Q_0 B x = 0\,, \tag{6}$$

$$x = H_0 y - \lambda H_0 B x + P_0 x\,. \tag{7}$$

Если $0 < |\lambda| < \|H_0 B\|^{-1}$, то уравнение (7) принимает вид

$$x = (I_1 + \lambda H_0 B)^{-1}(H_0 y + P_0 x)\,, \tag{8}$$

где $P_0 x$ — произвольный элемент подпространства $\ker\, A$. Подставляя (8) в (6), получим

$$Q_0 B (I_1 + \lambda H_0 B)^{-1} P_0 x = \frac{1}{\lambda}\left(Q_0 - \lambda Q_0 B (I_1 + \lambda H_0 B)^{-1} H_0\right) y\,. \tag{9}$$

Введём обозначения

$$Q_0 B = S_0 \in L(E_1\,, \mathrm{coker}\ A)\,, \quad H_0 B = T_0 \in L(E_1, M)\,, \quad S_0 P_0 = A_1 \in L(\ker\ A\,, \mathrm{coker}\ A)\,,$$

$$P_0 x = x_1 \in \ker\ A\,, \qquad \frac{1}{\lambda}\left(Q_0 - \lambda Q_0 B (I_1 + \lambda H_0 B)^{-1} H_0\right) y = y_1 \in \mathrm{coker}\ A$$

и запишем уравнение (9) в виде

$$A_1 x_1 = \lambda S_0 T_0 (I_1 + \lambda T_0)^{-1} x_1 + y_1\,. \tag{10}$$

Таким образом, при $0 < |\lambda| < \|T_0\|^{-1}$ уравнение (5) эквивалентно системе (8), (10).

Если оператор A_1 обратим, то из (10) элемент x_1 находится единственным образом, что влечёт за собой существование и ограниченность оператора $(A + \lambda B)^{-1}$ при

$$0 < |\lambda| < \|T_0\|^{-1}\left(1 + \|A_0^{-1} S_0\|\right)^{-1}\,.$$

Если оператор A_1 необратим, то в уравнении (10) A_1 является конечномерным фредгольмовым оператором, причем $\dim\ker\ A_1 = \dim\mathrm{coker}\ A_1 = m_1 \le m_0$ и $m_1 = m_0$ только тогда, когда $A_1 = 0$. Если же $A_1 \ne 0$, то $m_1 < m_0$ и тогда подпространства $\ker\ A$, $\mathrm{coker}\ A$ разложимы в прямые суммы подпространств

$$\ker\ A = \ker\ A_1 \dotplus \mathrm{coim}\ A_1, \quad \mathrm{coker}\ A = \mathrm{im}\ A_1 \dotplus \mathrm{coker}\ A_1.$$

Повторяя приведённые выше рассуждения, заменим уравнение (10) эквивалентной ему системой. После неоднократного применения леммы 1 устанавливается зависимость структуры решения уравнения (5) от поведения конечномерных операторов $A_0 = A$, $A_j \in L\,(\ker\ A_{j-1}, \mathrm{coker}\ A_{j-1})$, $j \ge 1$.

Операторы A_j для $j \ge 1$ вычисляются по формулам $A_j = S_{j-1} P_{j-1}$, где

$$S_j = Q_j S_{j-1} T_{j-1}, \quad T_j = T_{j-1} - H_j S_{j-1} T_{j-1}\,, \quad H_j = \tilde{A}_j^{-1}(Q_{j-1} - Q_j)\,, \tag{11}$$

$\tilde{A}_j$ — сужение A_j на M_j — прямое дополнение к $\ker\ A_j$ в $\ker\ A_{j-1}$, P_j — проектор на $\ker\ A_j$ в $\ker\ A_{j-1}$, Q_j — проектор на $\mathrm{coker}\ A_j$ в $\mathrm{coker}\ A_{j-1}$, $m_j = \dim\ker\ A_j = \dim\mathrm{coker}\ A_j$.

Теорема 1 [4]. *Для того, чтобы оператор $A + \lambda B$ имел обратный при достаточно малых по модулю λ, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое натуральное число p, что оператор A_p обратим, и в этом случае*

$$(A + \lambda B)^{-1} = \frac{(-1)^{p-1}}{\lambda^p} R_p Q_{p-1} Q_{p-2} \cdots Q_1 Q_0 +$$

$$+\frac{(-1)^{p-2}}{\lambda^{p-1}}\left(R_pQ_{p-1}Q_{p-2}\cdots Q_1S_0H_0(I_2-BR_1Q_0)+R_{p-1}Q_{p-2}\cdots Q_1Q_0\right)+\frac{(-1)^{p-3}}{\lambda^{p-2}}\cdots,$$

где $R_p=A_p^{-1}$, $R_{p-j}=H_{p-j}+T_{p-j}R_{p-j+1}Q_{p-j}$ для $j=1,2,...,p-1$.

Замечание 1 [4]. Если оператор $(A+\lambda B)^{-1}$ существует при некотором λ_0, то он существует и ограничен при всех $\lambda : 0<|\lambda|<|\lambda_0|$ из некоторой «проколотой» окрестности нуля.

Пусть при достаточно малых по модулю λ оператор $A+\lambda B$ обратим. Тогда введём в рассмотрение оператор $A_\lambda=I_1-\lambda(A+\lambda B)^{-1}B$. $A_\lambda\in L(E_1,E_1)$, $\ker A_\lambda=\ker A$.

Теорема 2 [4]. *Число 0 для оператора A_λ при достаточно малых по модулю λ является нормальным собственным числом.*

Утверждение теоремы 2 означает (см. [11], с. 23), что алгебраическая кратность собственного числа 0 конечна, а пространство E_1 разлагается в прямую сумму инвариантных относительно A_λ подпространств

$$E_1=\mathfrak{M}\dotplus\mathfrak{N}. \tag{12}$$

Разложение (12) не зависит от λ, при этом $\mathfrak{N}$ — n-мерное корневое подпространство оператора A_λ, $n=m_0+m_1+\cdots m_{p-1}$, а $\mathfrak{M}=\{x\in E_1:\ S_jx=0,\ j=0,1,...,p-1\}$, точнее, $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_p$, указывая на зависимость от p.

Сужение $\tilde{A}_\lambda$ оператора A_λ на $\mathfrak{M}$ имеет ограниченный обратный

$$\tilde{A}_\lambda^{-1}=I_1+\lambda T_p\,, \tag{13}$$

а операторы

$$\mathfrak{Q}=\prod_{j=0}^{p-1}(I_1-R_{p-j}S_{p-j-1})\,,\quad \mathfrak{P}=I_1-\mathfrak{Q} \tag{14}$$

проектируют E_1, соответственно, на $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$.

Как мы увидим из дальнейшего, свойства решения задачи Коши (1), (2) с фредгольмовым оператором A при производных полностью зависят от поведения оператора $A+\lambda B$. Если этот оператор обратим при достаточно малых по модулю λ, то тогда существует оператор A_λ, для которого, согласно теореме 2, число 0 является нормальным собственным числом. При этом справедливо разложение (12), осуществляемое с помощью проекторов $\mathfrak{Q}$ и $\mathfrak{P}$, вычисляемых по формулам (14). В свою очередь, n-мерное корневое подпространство $\mathfrak{N}$ может быть разложено в прямую сумму подпространств:

$$\mathfrak{N}=\mathfrak{N}_0\dotplus\mathfrak{N}_1\dotplus\cdots\dotplus\mathfrak{N}_{p-1}\,, \tag{15}$$

где $\mathfrak{N}_0=\ker A_\lambda=\ker A$, $\mathfrak{N}_j$ — линейная оболочка j-ых присоединённых элементов оператора A_λ для $j=1,2,...,p-1$. Представление (14) справедливо в силу конечномерности подпространства $\mathfrak{N}$ и линейной независимости присоединённых элементов оператора A_λ. Окончательно, $E_1=\mathfrak{M}\dotplus\mathfrak{N}_0\dotplus\mathfrak{N}_1\dotplus\cdots\dotplus\mathfrak{N}_{p-1}$, а любой элемент $x\in E_1$ представим в виде

$$x=x_{\mathfrak{M}}+x_0+x_1+\cdots+x_{p-1}\,, \tag{16}$$

где $x_{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{M}$, $x_j \in \mathfrak{N}_j$ для $j = 0, 1, 2, ..., p-1$.

Теорема 3. *Пусть оператор $A + \lambda B$ обратим при достаточно малых по модулю λ. Для того, чтобы задача (1), (2) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы $U_0 \in \mathfrak{M}$. В этом случае решение $u(t)$ единственно, принадлежит $\mathfrak{M}$ и имеет вид*

$$u(t) \equiv Y_k(t; T_p)U_0 = \Gamma(k/2 + 1/2) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t/2)^{2j}\, T_p^j U_0}{j!\, \Gamma(k/2 + 1/2 + j)}\,, \tag{17}$$

где число p и оператор T_p определяются теоремой 1 и равенствами (11).

□ К обеим частям уравнения (1) применим оператор $(A + \lambda B)^{-1}$ и в банаховом пространстве E_1 получим эквивалентное (1) уравнение

$$A_\lambda \left(t^k u'(t)\right)' = \frac{t^k}{\lambda}(I_1 - A_\lambda)u(t)\,, \quad t > 0\,. \tag{18}$$

Используя представление $u(t) = u_{\mathfrak{M}}(t) + u_0(t) + u_1(t) + \cdots + u_{p-1}(t)$ (см. (16)) и замечая, что $A_\lambda u_0(t) = 0$, $A_\lambda u_j(t) \in \mathfrak{N}_{j-1}$, от уравнения (18) перейдём к уравнениям, соответственно, в подпространствах $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}_0$, ..., $\mathfrak{N}_{p-1}$

$$A_\lambda \left(t^k u_{\mathfrak{M}}'(t)\right)' = \frac{t^k}{\lambda}(I_1 - A_\lambda)u_{\mathfrak{M}}(t)\,, \tag{19}$$

$$A_\lambda \left(t^k u_1'(t)\right)' = \frac{t^k}{\lambda}\left(u_0(t) - A_\lambda u_1(t)\right)\,,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$A_\lambda \left(t^k u_{p-1}'(t)\right)' = \frac{t^k}{\lambda}\left(u_{p-2}(t) - A_\lambda u_{p-1}(t)\right)\,,$$

$$0 = \frac{t^k}{\lambda}\, u_{p-1}(t)\,.$$

Из последнего уравнения следует, что $u_{p-1}(t) = 0$. Учитывая это равенство, из предыдущего получим $u_{p-2}(t) = 0$. Аналогично установим, что $u_{p-3}(t) = \cdots = u_0(t) = 0$. Таким образом, $\mathfrak{P}u(t) \equiv 0$ для $t \geq 0$.

К обеим частям уравнения (19), рассматриваемого в подпространстве $\mathfrak{M}$, применим оператор $\tilde{A}_\lambda^{-1}$. Учитывая равенство (13), получим

$$\left(t^k u_{\mathfrak{M}}'(t)\right)' = \frac{t^k}{\lambda}(\tilde{A}_\lambda^{-1} - I_1)u_{\mathfrak{M}}(t) = T_p u_{\mathfrak{M}}(t)\,. \tag{20}$$

Уравнение (20) представляет собою уравнений Эйлера-Пуассона-Дарбу с ограниченным оператором T_p, следовательно, задача Коши (20), (2) при любом $U_0 \in \mathfrak{M}$ имеет (см. [1], [3]) единственное решение, определяемое равенством (17), причём это решение не зависит от λ. ■

Рассмотрим теперь случай, когда оператор $A + \lambda B$ не является обратимым ни при каких достаточно малых по модулю λ.

Замечание 2 [4]. Если оператор $A + \lambda B$ не является обратимым ни при каком достаточно малом по модулю λ, то существует такое натуральное число q, что $m_0 \geq m_1 \geq ... > m_q = m_{q+1} > 0$. В этом случае $A_{q+j} = 0$, а $P_{q+j} = P_q$, $Q_{q+j} = Q_q$, $T_{q+j} = T_q$, $S_{q+j} = S_q T_q^j$ для $j \geq 1$ и элементы из $\ker\, A_q$ имеют цепочки из B-присоединённых элементов бесконечной длины. $\mathfrak{M} = \{x \in E_1 : \ S_j x = 0, \ j = 0, 1, 2, ...\}$ и, в отличие от теоремы 3, $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_\infty$.

Теорема 4. *Пусть оператор $A+\lambda B$ не является обратимым ни при каком достаточно малом по модулю λ. Задача (1), (2) имеет решение $u(t)$ в том и только в том случае, если $U_0 \in \mathfrak{M}$. При этом решение $u(t) \in \mathfrak{M}$ и неединственно. Оно имеет вид*

$$u(t) = Y_k(t; T_q)U_0 +$$

$$+\frac{t^{1-k} Y_{2-k}(t; T_q)}{1-k} \int\limits_0^t \tau^k \, Y_k(\tau; T_q) P_q u(\tau)\, d\tau - \frac{Y_k(t; T_q)}{1-k} \int\limits_0^t \tau \, Y_{2-k}(\tau; T_q) P_q u(\tau)\, d\tau, \quad k \neq 1\,, \tag{21}$$

$$u(t) = Y_1(t; T_q)U_0 +$$

$$+Z_1(t; T_q) \int\limits_0^t \tau \, Y_1(\tau; T_q) P_q u(\tau)\, d\tau - Y_1(t; T_q) \int\limits_0^t \tau \, Z_1(\tau; T_q) P_q u(\tau)\, d\tau\,, \quad k = 1\,, \tag{22}$$

где $t^k P_q u(t)$ — произвольная непрерывная функция от t от значениями в $\ker\, A_q$,

$$Z_1(t; T_q) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^1 (1-\tau^2)^{-1/2} \ln(t - t\tau^2) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\tau s)^{2j} \, T_q^j}{(2j)!} \, d\tau\,.$$

☐ Необходимость. Уравнение (1) в силу леммы 1 эквивалентно системе

$$S_0 u(t) \equiv 0\,, \tag{23}$$

$$\left(t^k u'(t)\right)' = t^k \left(T_0 u(t) + P_0 u(t)\right)\,, \quad t > 0\,, \tag{24}$$

где $t^k P_0 u(t)$ — произвольная непрерывная функция от значениями в $\ker\, A$.

Продифференцировав (23) по t и подставив вместо $\left(t^k u'(t)\right)'$ выражение (24), получим

$$A_1 P_0 u(t) \equiv -S_0 T_0 u(t)\,. \tag{25}$$

Согласно лемме 1 уравнение (25) эквивалентно системе

$$S_1 u(t) \equiv 0\,, \tag{26}$$

$$P_0 u(t) = P_1 u(t) - H_1 S_0 T_0 u(t)\,. \tag{27}$$

Подставляя (27) в (24), получим

$$\left(t^k u'(t)\right)' = t^k \left(T_1 u(t) + P_1 u(t)\right)\,, \tag{28}$$

где $t^k P_1 u(t)$ — произвольная непрерывная функция от значениями в $\ker A_1$.

Продолжая рассуждения, на q-ом шаге получим уравнение

$$A_q P_{q-1} u(t) \equiv -S_{q-1} T_{q-1} u(t)\,.$$

с необратимым оператором A_q. Следовательно,

$$\left(t^k u'(t)\right)' = t^k \left(T_q u(t) + P_q u(t)\right)\,, \tag{29}$$

где $t^k P_q u(t)$ — произвольная непрерывная функция от значениями в $\ker A_q$.

Заметим, что на каждом из первых q шагов происходит уточнение произвольной функции $t^k P_j u(t)$, поскольку $\ker A_j \subseteq \ker A_{j-1}$, а затем, в силу равенства $P_{q+j} = P_j$ для $j \geq 1$, произвольная функция $t^k P_{q+j} u(t)$ всё время принадлежит $\ker A_q$.

Таким образом, в уравнении (29) слагаемое $t^k P_q u(t)$ произвольно, а оператор T_q ограничен. Следовательно (см. [12]), решение $u(t)$ вычисляется по формулам (21), (22). Из соотношений (23), (26) выводим равенства $S_j u(t) \equiv 0$ для любого $j \geq 0$. Стало быть, $U_0 \in \mathfrak{M}$ и необходимость утверждения в теореме 4 доказана.

Достаточность. Пусть $U_0 \in \mathfrak{M}$ и $k \neq 2n-1,\ n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим определяемую равенством (21) функцию $u(t)$. Очевидно, $u(0) = U_0$. Покажем, что эта функция $u(t)$ является решением уравнения (1) или также, как и при доказательстве необходимости, является решением системы (23), (24). Дифференцируя (21), получим

$$\left(t^k u'(t)\right)' = t^k \left(T_q u(t) + P_q u(t)\right) = t^k \left(T_0 u(t) + (T_q - T_0) u(t) + P_q u(t)\right) =$$

$$= t^k \left(T_0 u(t) + P_0 u_1(t)\right)\,, \tag{30}$$

где функция $P_0 u_1(t)$ принадлежит $\ker A$.

Осталось проверить выполнение тождества (23). По индукции (см. [4]) доказывается равенство

$$S_j \left(t^k u'(t)\right)' = t^k S_{j+1} u(t)\,, \quad j = 0, 1, ..., q-1\,. \tag{31}$$

Применим далее оператор S_q к определяемой равенством (21) функции $u(t)$. Для $k \neq 2n-1,\ n \in \mathbb{N}$ получим

$$S_q u(t) = \Gamma(k/2+1/2) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t/2)^{2j}\ S_q T_q^j U_0}{j!\ \Gamma(k/2+1/2+j)} \ +$$

$$+\ \frac{\pi t^{1-k}}{2\cos(\pi k/2)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t/2)^{2j}}{j!\ \Gamma(3/2-k/2+j)} \int\limits_0^t \tau^k \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\tau/2)^{2i}\ S_q T_q^{i+j} P_q u(\tau)}{i!\ \Gamma(k/2+1/2+i)}\, d\tau\ -$$

$$-\ \frac{\pi}{2\cos(\pi k/2)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t/2)^{2j}}{j!\ \Gamma(k/2+1/2+j)} \int\limits_0^t \tau \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\tau/2)^{2i}\ S_q T_q^{i+j} P_q u(\tau)}{i!\ \Gamma(3/2-k/2+i)}\, d\tau\ =$$

$$=\ \Gamma(k/2+1/2) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t/2)^{2j}\ S_{q+j} U_0}{j!\ \Gamma(k/2+1/2+j)}\ +$$

$$+ \frac{\pi t^{1-k}}{2\cos(\pi k/2)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t/2)^{2j}}{j!\,\Gamma(3/2-k/2+j)} \int\limits_0^t \tau^k \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\tau/2)^{2i}\ A_{q+1+i+j}u(\tau)}{i!\,\Gamma(k/2+1/2+i)}\, d\tau \ -$$

$$- \frac{\pi}{2\cos(\pi k/2)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t/2)^{2j}}{j!\,\Gamma(k/2+1/2+j)} \int\limits_0^t \tau \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\tau/2)^{2i}\ A_{q+1+i+j}u(\tau)}{i!\,\Gamma(3/2-k/2+i)}\, d\tau \ \equiv 0\,. \tag{32}$$

Из (32) и (31) вытекает равенство

$$S_{q-1}\left(t^k u'(t)\right)' = 0\,. \tag{33}$$

Интегрируя равенство (33), и учитывая условие $S_{q-1}u(0) = S_{q-1}U_0 = 0$, последовательно получим

$$S_{q-1}u'(t) \equiv 0\,, \quad S_{q-1}u(t) \equiv 0\,.$$

Продолжая рассуждения аналогичным образом, придём к тождеству $S_0 u(t) \equiv 0$ при $t \in [0,\infty)$ и доказательство достаточности для случая $k \neq 2n-1,\ n \in \mathbb{N}$ завершено.

Аналогично рассматривается и случай $k = 2n-1,\ n \in \mathbb{N}$. ■

Далее при $k \geq 0$ рассмотрим задачу Коши для уравнения, отличающегося от уравнения (1) расположением оператора A, а именно:

$$\left(t^k A v'(t)\right)' = t^k B v(t)\,, \quad t > 0\,, \tag{34}$$

$$v(0) = U_0\,, \quad v'(0) = 0\,. \tag{35}$$

Определение 2. *Решением уравнения (34) называется функция $v(t) \in C^1(R_+, E_1)$, для которой $v'(t) \in D(A)$ при $t > 0$, $Av'(t) \in C^1(R_+, E_1)$, и удовлетворяющая уравнению (34).*

Теорема 5. *Пусть оператор $A + \lambda B$ обратим при достаточно малых по модулю λ. Для того, чтобы задача (34), (35) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы $U_0 \in \mathfrak{M}$. В этом случае решение $v(t)$ единственно, принадлежит $\mathfrak{M}$ и имеет вид*

$$v(t) \equiv Y_k(t; T_p)U_0 = \Gamma(k/2+1/2) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t/2)^{2j}\ T_p^j U_0}{j!\,\Gamma(k/2+1/2+j)}\,, \tag{36}$$

где число p и оператор T_p определяются теоремой 1 и равенствами (11).

□ Уравнение (34) проинтегрируем и к обеим частям полученного уравнения применим оператор $(A+\lambda B)^{-1}$. В банаховом пространстве E_1 будем иметь эквивалентную (34), (35) задачу нахождения решения уравнение

$$A_\lambda v'(t) = \frac{1}{\lambda t^k} \int\limits_0^t \tau^k (I_1 - A_\lambda) v(\tau)\, d\tau\,, \quad t > 0\,, \tag{37}$$

удовлетворяющего условию $v(0) = U_0$, при этом условие $v'(0) = 0$ автоматически выполнено.

Используя представление $v(t) = v_{\mathfrak{M}}(t) + v_0(t) + v_1(t) + \cdots + v_{p-1}(t)$ (см. (16)) и замечая, что $A_\lambda v_0(t) = 0$, $A_\lambda v_j(t) \in \mathfrak{N}_{j-1}$, от уравнения (37) перейдём к уравнениям, соответственно, в подпространствах $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}_0$, ..., $\mathfrak{N}_{p-1}$

$$A_\lambda v'_{\mathfrak{M}}(t) = \frac{1}{\lambda t^k} \int\limits_0^t \tau^k (I_1 - A_\lambda) v_{\mathfrak{M}}(\tau)\, d\tau\,, \tag{38}$$

$$A_\lambda v'_1(t) = \frac{1}{\lambda t^k} \int\limits_0^t \tau^k (v_0(\tau) - A_\lambda v_1(\tau))\, d\tau\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_\lambda v'_{p-1}(t) = \frac{1}{\lambda t^k} \int\limits_0^t \tau^k (v_{p-2}(\tau) - A_\lambda v_{p-1}(\tau))\, d\tau\,,$$

$$0 = \frac{1}{\lambda t^k} \int\limits_0^t \tau^k v_{p-1}(\tau)\, d\tau\,.$$

Из последнего уравнения следует, что $v_{p-1}(t) = 0$. Учитывая это равенство, из предыдущего получим $v_{p-2}(t) = 0$. Аналогично установим, что $v_{p-3}(t) = \cdots = v_0(t) = 0$. Таким образом, $\mathfrak{P}v(t) \equiv 0$ для $t \geq 0$.

К обеим частям уравнения (38), рассматриваемого в подпространстве $\mathfrak{M}$, применим оператор $\tilde{A}_\lambda^{-1}$. Учитывая равенство (13), получим

$$v'_{\mathfrak{M}}(t) = \frac{1}{t^k} \int\limits_0^t \tau^k T_p v_{\mathfrak{M}}(\tau)\, d\tau\,. \tag{39}$$

Уравнение (39) — это уравнение Эйлера-Пуассона-Дарбу с ограниченным оператором T_p, следовательно, задача Коши (34), (35) при любом $U_0 \in \mathfrak{M}$ имеет единственное решение, определяемое равенством (36), причём это решение не зависит от λ. ■

Из теорем 3 и 5 следует, что если оператор $A + \lambda B$ обратим при достаточно малых по модулю λ, то задачи (1), (2) и (34), (35) эквивалентны, а их решения совпадают, $u(t) \equiv v(t)$.

Аналогично теореме 4 устанавливается следующее утверждение.

Теорема 6. *Пусть оператор $A+\lambda B$ не является обратимым ни при каком достаточно малом по модулю λ. Задача (34), (35) имеет решение $v(t)$ в том и только в том случае, когда $U_0 \in \mathfrak{M}$. При этом решение $v(t) \in \mathfrak{M}$ и неединственно. Оно имеет вид*

$$v(t) = Y_k(t; T_q)U_0 +$$

$$+\frac{t^{1-k}Y_{2-k}(t;T_q)}{1-k}\int\limits_0^t \tau^k\, Y_k(\tau;T_q)P_q v(\tau)\, d\tau - \frac{Y_k(t;T_q)}{1-k}\int\limits_0^t \tau\, Y_{2-k}(\tau;T_q)P_q v(\tau)\, d\tau\,, \quad k \neq 1\,,$$

$$v(t) = Y_1(t;T_q)U_0 +$$

$$+Z_1(t;T_q)\int\limits_0^t \tau\, Y_1(\tau;T_q)P_q v(\tau)\, d\tau - Y_1(t;T_q)\int\limits_0^t \tau\, Z_1(\tau;T_q)P_q v(\tau)\, d\tau\,, \quad k = 1\,,$$

где $t^k P_q v(t)$ — произвольная непрерывная функция от t со значениями в $\ker A_q$.

Наконец, при $k \geq 0$ рассмотрим ещё одну задачу Коши

$$\big(t^k(Aw(t))'\big)' = t^k Bw(t)\,, \quad t > 0\,, \tag{40}$$

$$w(0) = U_0\,, \quad \lim_{t\to+0}(Aw(t))' = 0\,. \tag{41}$$

Определение 3. *Решением уравнения (40) называется функция $w(t) \in C(\bar{R}_+, D(A))$, для которой $Aw(t) \in C^1(\bar{R}_+, E_1)\bigcap C^2(R_+, E_1)$, и удовлетворяющая уравнению (40).*

Из существования производной у функции $Aw(t)$ не следует, вообще говоря, дифференцируемость $w(t)$, поэтому решение $w(t)$ уравнения (40) представим в виде

$$w(t) = (I_1 - P_0)w(t) + P_0 w(t)\,. \tag{42}$$

При этом $Aw(t) = A(I_1 - P_0)w(t)$, и из дифференцируемости функции $Aw(t)$ следует дифференцируемость функции $(I_1 - P_0)w(t)$, поскольку сужение оператора A на M, которое мы обозначили через $\tilde{A}$, обратимо. Стало быть, уравнение (40) можно записать как

$$\big(t^k A\left((I_1 - P_0)w(t)\right)'\big)' = t^k B(I_1 - P_0)w(t) + t^k BP_0 w(t)\,, \quad t > 0\,,$$

или, учитывая второе из условий (41), в виде

$$A\left((I_1 - P_0)w(t)\right)' = \frac{1}{t^k}\int\limits_0^t \big(\tau^k B(I_1 - P_0)w(\tau) + \tau^k BP_0 w(\tau)\big)\, d\tau\,, \quad t > 0\,. \tag{43}$$

В силу леммы 1 уравнение (43) эквивалентно системе

$$Q_0 B\big(I_1 - P_0\big)w(t) + Q_0 BP_0 P_0 w(t) \equiv 0\,, \quad t \geq 0\,,$$

$$\frac{d}{dt}(I_1 - P_0)w(t) = \frac{1}{t^k}\int\limits_0^t \tau^k\big(H_0 B\big(I_1 - P_0\big)w(\tau) + H_0 BP_0 w(\tau)\big)\, d\tau\,,$$

которую перепишем в виде

$$S_0\big(I_1 - P_0\big)w(t) + A_1 P_0 w(t) \equiv 0\,, \tag{44}$$

$$\frac{d}{dt}\big(I_1 - P_0\big)w(t) = \frac{1}{t^k}\int\limits_0^t \tau^k\big(T_0(I_1 - P_0)w(\tau) + T_0P_0w(\tau)\big)\, d\tau\,. \tag{45}$$

Выразим элемент $P_0w(t)$ с помощью (44) через $\big(I_1 - P_0\big)w(t)$, и из уравнения (45) найдём $(I_1 - P_0)w(t)$. Так как A_1 — фредгольмов оператор, то соотношение (44) эквивалентно системе

$$Q_1S_0\big(I_1 - P_0\big)w(t) \equiv 0\,, \tag{46}$$

$$P_0w(t) = -H_1S_0\big(I_1 - P_0\big)w(t) + P_1w(t)\,. \tag{47}$$

Подставив выражение для $P_0w(t)$ из (47) в уравнение (45), получим

$$\frac{d}{dt}\big(I_1 - P_0\big)w(t) = \frac{1}{t^k}\int\limits_0^t \tau^k\big(T_0(I_1 - H_1S_0)(I_1 - P_0)w(\tau) + T_0P_1w(\tau)\big)\, d\tau\,. \tag{48}$$

Соотношения (44), (45) эквивалентны соотношениям (46), (47), (48). Если из (47) выразить $P_0w(t)$ и подставить в (42), то вместо (42) для $w(t)$ получим новое представление

$$w(t) = (I_1-P_0)w(t)-H_1S_0(I-P_0)w(t)+P_1w(t) = (I_1-H_1S_0)(I_1-P_0)w(t)+P_1w(t)\,. \tag{49}$$

Продифференцируем соотношение (46) и подставим в полученное равенство выражение (48)) для $\dfrac{d}{dt}\big(I_1 - P_0\big)w(t)$. Получим тождество

$$\frac{1}{t^k}\int\limits_0^t \tau^kQ_1S_0\big(T_0(I_1 - H_1S_0)(I_1 - P_0)w(\tau) + T_0P_1w(\tau)\big)\, d\tau \equiv 0\,,$$

из которого выводим

$$Q_1S_0T_0(I_1 - P_0)w(t) - Q_1S_0T_0H_1S_0(I_1 - P_0)w(t) + Q_1S_0T_0P_1w(t) \equiv 0\,,$$

или

$$A_2P_1w(t) + S_1(I_1 - H_1S_0)(I - P_0)w(t) = 0\,. \tag{50}$$

Оператор A_2 фредгольмов, поэтому (50) эквивалентно системе

$$Q_2S_1(I_1 - H_1S_0)(I_1 - P_0)w(t) = 0\,, \tag{51}$$

$$P_1w(t) = -H_2S_1(I_1 - H_1S_0)(I_1 - P_0)w(t) + P_2w(t)\,, \tag{52}$$

где $P_2w(t) \in \ker A_2$.

Подставим формулу (52) в уравнения (48) и (49), тогда вместо них получим, соответственно, уравнения

$$\frac{d}{dt}\big(I_1 - P_0\big)w(t) = \frac{1}{t^k}\int\limits_0^t \tau^k\big(T_0(I_1 - H_2S_1)(I_1 - H_1S_0)(I_1 - P_0)w(\tau) + T_0P_2w(\tau)\big)\, d\tau\,,$$

$$w(t)=(I_1-H_2S_1)(I_1-H_1S_0)(I_1-P_0)w(t)+P_1w(t)\,.$$

Продолжая аналогичные действия дальше, придем к следующему результату.

Лемма 2. *При $q\in\mathbb{N}$ уравнение (40) эквивалентно системе*

$$S_0w(t)\equiv 0\,,$$

$$Q_1S_0(I_1-P_0)w(t)\equiv 0\,,$$

$$Q_2S_1(I_1-H_1S_0)(I_1-P_0)w(t)\equiv 0\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$Q_qS_{q-1}F_{q-1}(I_1-P_0)w(t)\equiv 0\,,$$

$$\frac{d}{dt}(I_1-P_0)w(t)=\frac{1}{t^k}\int\limits_0^t\tau^k\big(T_0F_q(I_1-P_0)w(\tau)+T_0P_qw(\tau)\big)\,d\tau\,, \tag{53}$$

$$w(t)=F_q(I_1-P_0)w(t)+P_qw(t)\,, \tag{54}$$

где $F_j=\prod\limits_{i=1}^{j}(I_1-H_{j+1-i}S_{j-i})$, $F_0=I$.

Свойства решения рассматриваемой задачи Коши (40), (41) также зависят от обратимости при достаточно малых по модулю λ оператора $A+\lambda B$.

Теорема 7. *Пусть оператор $A+\lambda B$ обратим при достаточно малых по модулю λ. Для того, чтобы задача (40), (41) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы начальный элемент U_0 удовлетворял условиям*

$$S_0U_0=0,\quad Q_jS_{j-1}F_{j-1}(I_1-P_0)U_0=0\,,\quad j=1,\ 2,\ \ldots,p-1\,. \tag{55}$$

При выполнении этих условий $w(t)$ единственно, обладает свойствами

$$S_0w(t)\equiv 0\,,\quad Q_jS_{j-1}F_{j-1}(I_1-P_0)w(t)\equiv 0,\quad t\geq 0,\quad j=1,\ 2,\ \ldots,p-1 \tag{56}$$

и имеет вид $w(t)=Y_k(t;T_p)U_0$, где число p и оператор T_p определяются теоремой 1 и равенствами (11).

□ В силу теоремы 1 существует $p\in\mathbb{N}$ такое, что A_p обратим. Тогда в уравнении (53) $q=p$ и отсутствует слагаемое $T_0P(A_p)w(t)$. Уравнение (53) представляет собою уравнений Эйлера-Пуассона-Дарбу с ограниченным оператором T_0F_p, следовательно,

$$(I_1-P_0)w(t)=Y_k(t;T_0F_p)(I_1-P_0)w(0)\,. \tag{57}$$

Из (54) при $q=p$ и начальных условий (41) выводим

$$F_p(I_1-P_0)w(0)=U_0\,. \tag{58}$$

Воспользовавшись легко проверяемыми свойствами

$$F_pT_0=T_p\,,\quad F_pY_k(t;T_0F_p)=Y_k(t;T_p)F_p\,,$$

которые следуют из определения F_p, T_p и $Y_k(t;T_p)$, из (54), (57), (58) получим

$$w(t) = F_p Y_k(t;T_0 F_p)(I_1 - P_0)w(0) = Y_k(t;T_p)U_0\,.$$

Справедливость равенств (56) вытекает из леммы 2. ■

Заметим, что условия (55) накладываются на составляющую начального элемента, поэтому менее жёсткие, чем условие принадлежности подпространству $\mathfrak{M}$, налагаемому в теоремах 3 и 5. При выполнении более жёстких ограничений решения $u(t)$, $v(t)$, $w(t)$ совпадают.

Используя лемму 2, аналогично доказывается и следующая теорема.

Теорема 8. *Пусть оператор $A+\lambda B$ не является обратимым ни при каком достаточно малом по модулю λ. Задача (40), (41) имеет решение $w(t)$ в том и только в том случае, когда выполнены равенства (55) для $j \in \mathbb{N}$. При этом решение $w(t)$ обладает свойствами (56) для $j \in \mathbb{N}$ и неединственно. Оно имеет вид*

$$w(t) = Y_k(t;T_q)U_0 +$$

$$+\frac{t^{1-k}Y_{2-k}(t;T_q)}{1-k}\int\limits_0^t \tau^k\, Y_k(\tau;T_q)T_0P_q w(\tau)\,d\tau - \frac{Y_k(t;T_q)}{1-k}\int\limits_0^t \tau\, Y_{2-k}(\tau;T_q)T_0P_q w(\tau)\,d\tau\,,\quad k\neq 1\,,$$

$$w(t) = Y_1(t;T_q)U_0 +$$

$$+Z_1(t;T_q)\int\limits_0^t \tau\, Y_1(\tau;T_q)T_0P_q w(\tau)\,d\tau - Y_1(t;T_q)\int\limits_0^t \tau\, Z_1(\tau;T_q)T_0P_q w(\tau)\,d\tau\,,\quad k=1\,,$$

где число q определено в замечании 2, $t^k P_q w(t)$ — произвольная непрерывная функция от t со значениями в $\ker A_q$ и такая, что $P_q w(0) = P_q U_0$.

Литература

1. Глушак А.В. Операторная функция Бесселя // ДАН. – 1997. – 352, № 5. – С.587-589.
2. Глушак А.В., Покручин О.А. Необходимое условие разрешимости задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу // Научные ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика. – 2012. – №11(130). – Вып. 27. – С.29-37.
3. Глушак А.В., Покручин О.А. Достаточное условие разрешимости задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу // Научные ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика. – 2014. Вып. 35. –
4. Зубова С.П., Чернышов К.И. О линейном дифференциальном уравнении с фредгольмовым оператором при производной // Дифференц. уравнения и их применение. Вып. 14. Вильнюс: Институт физики и математики АН Литовской ССР, 1976. – С.21-39.
5. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Utrecht; Boston: VSP, 2003.
6. Федоров В. Е. Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов // Алгебра и анализ. – 2000. – 12, Вып.3. – С.173-200.
7. Федоров В. Е. Голоморфные разрешающие полугруппы уравнений соболевского тина в локально выпуклых пространствах // Мат. сб. – 2004. – 195, №8. – С.131-160.
8. Зубова С.П. Метод каскадной декомпозиции решения задач для псевдорегулярных уравнений / Дис. докт. физ.-мат. наук. Белгород. 2013.

9. Замышляева А.А. Линейные уравнения соболевского типа высокого порядка / Челябинск: ЮУрГУ, 2012.
10. Вайнберг М.М., Треногин В.А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений / М.: Наука, 1969.
11. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряжённых операторов / М.: Наука, 1965.
12. Глушак А.В., Кононенко В.И., Шмулевич С.Д. Об одной сингулярной абстрактной задаче Коши // Известия ВУЗов, сер. математика. – 1986. – №6. – С.55-56.

EULER-POISSON-DARBOUX's EQUATIONS WITH FREDHOLM's OPERATOR AT THE DERIVATIVE

A.V. Glushak

Belgorod State University,
Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: Glushak@bsu.edu.ru

Abstract. It is investigated the solvability of an abstract Euler-Poisson-Darboux equation with the Fredholm operator at the derivatives of equation coefficients.

Key words: abstract Cauchy problem, equation of Euler-Poisson-Darboux, Fredholm's operator, cascade method.