MSC 81P20

ПАРНЫЕ КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ СТОХАСТИЧЕСКОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Лам Тан Фат, Ю.П. Вирченко

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Аннотация. Изучается стохастическое электромагнитное поле, описывающее его тепловые флуктуации. Находится общий вид матрицы парных корреляционных функций этого поля.

Ключевые слова: стохастическое электромагнитное поле, гауссовское случайное поле, уравнения Максвелла, стохастическая модель, корреляционная функция.

1. Постановка задачи. Понятие о стохастическом электромагнитном поле возникает естественным образом при статистическом подходе к описанию электромагнитного поля, имеющего тепловое происхождение. В этом смысле представление о стохастическом электромагнитном поле восходит к работам Рэлея, Джинса, Вина и Планка при попытке построения ими теории излучения абсолютно черного тела (см., например, [1-4]). Следствием предложенной М.Планком [5] теоретической корпускулярной модели электромагнитного излучения, позволяющей объяснить экспериментальные данные, связанные с тепловым излучением абсолютно черного тела, в теоретической физике возникло, в частности, понятие квантования электромагнитного поля. При построении этой теории авторы, в то время, исходили из термодинамических соображений, так как не могли последовательно использовать какой-либо формализм теории вероятностей при построении статистической теории теплового излучения, так как соответствующего ее раздела, идейным образом связанного с изучением случайных полей, – теории случайных процессов, фактически, еще не существовало. К настоящему времени развитие теории случайных процессов в двадцатом столетии привело к построению стройной довольно развитой математической теории, которая позволяет по новому подойти к теоретической задаче математического описания теплового излучения электромагнитного поля (см., например, монографии [2, 3], идеи которых развиваются в настоящей работе). Наличие такого подхода к изучению стохастических электромагнитных полей отнюдь не ведет к необходимости пересмотра современной квантовой точки зрения на электромагнитное поле, однако дает новые математические возможности при теоретическом моделировании теплового электромагнитного излучения в статистической физике.

В более ранних публикациях мы исследовали частный случай стохастического электромагнитного поля – т.н. *гауссовскую модель* со статистически независимыми и эквивалентными электрической и магнитной составляющими, которая естественна в том случае, когда физически имеется малость величины поля в среднем квадратичном. Нами полностью был изучен случай, когда поле, сосредоточенное в ограниченной полости прямоугольной формы, является стохастически однородным (в частности, находится в термодинамическом равновесии). В настоящем сообщении, мы находим общие ограничения на вид парных корреляционных функций стохастического электромагнитного поля. В частности, наше рассмотрение распространяется и на случай, когда поле сосредоточено в ограниченной полости. Полученный результат применим как в случае, когда поле является гауссовским, так и в случае, когда его гауссовость не предполагается. Это, в частности, дает полное описание всего класса гауссовских электромагнитных полей, без дополнительных предположений об их стохастической пространственной однородности и независимости электрической и магнитной компонент. При этом мы, с самого начала, считаем, что поле обладает нулевым средним значением, что, с одной стороны, с физической точки зрения, всегда выполняется в случае его теплового происхождения электромагнитного поля, а, с другой стороны, не является каким-то существенным ограничением с математической точки зрения, так как исследование любого случайного поля всегда может быть сведено к изучению поля с нулевым средним подходящим неслучайным сдвигом значений его реализаций.

2. Стохастические электромагнитные поля. Электромагнитное поле в вакууме, в пространственной области Ω, описывающей полость (она, в частности, может быть и неограниченной и распространяться на все физическое пространство $\mathbb{R}^3$), где сосредоточено тепловое электромагнитное поле, представляется парой $\big(\mathbf{E}(\mathbf{x},t),\mathbf{H}(\mathbf{x},t)\big)$ векторного и псевдовекторного полей на Ω, значения которых в каждой точке $\mathbf{x}\in\Omega$ и момент времени t подчиняются системе уравнений Максвелла

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}+[\nabla,\mathbf{E}]=0\,,\quad (\nabla,\mathbf{H})=0\,,\\ &\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}-[\nabla,\mathbf{H}]=0\,,\quad (\nabla,\mathbf{E})=0\,,\end{aligned}\right.\qquad t\in\mathbb{R}\,, \tag{1}$$

c – скорость света в вакууме. При записи этой системы уравнений использован векторный дифференциальный оператор Гамильтона ∇. Если электромагнитное поле стохастическое, то определяющие его поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ представляются *случайными реализациями.* Конкретная математическая модель стохастического электромагнитного поля определяется распределением вероятностей, заданном на семействе всех допустимых реализаций. В дальнейшем, усреднение случайных величин – всевозможных характеристик электромагнитного поля по этому распределению вероятностей будем обозначать угловыми скобками $\langle\cdot\rangle$. Самым важным в математической конструкции стохастического электромагнитного поля является то, что каждая (с вероятностью 1) случайная реализация пары полей $\big(\mathbf{E}(\mathbf{x},t),\mathbf{H}(\mathbf{x},t)\big)$ должна удовлетворять уравнениям (1), то есть являются их решениями. При этом, однако, нужно уточнить в каком смысле эти решения должны пониматься, так как в теории случайных полей их реализации определяются только лишь на счетном всюду плотном множестве точек. Значения полей $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ в конкретной фиксированной точке не являются наблюдаемыми с физической точки зрения, а, наоборот, наблюдаемы только лишь их интегральные характеристики по физически малым областям пространства. Поэтому пространственные производные в уравнениях (1) нужно понимать в смысле какой-то интегральной метрики по пространственным областям. Принимая во внимание, что для каждой случайной реализации $\big(\mathbf{E}(\mathbf{x},t),\mathbf{H}(\mathbf{x},t)\big)$ в любой момент времени должен оставаться конечным интеграл по любой пространственной области от функции $\big(\mathbf{E}^2(\mathbf{x},t)+\mathbf{H}^2(\mathbf{x},t)\big)$, который пропорционален энергии электромагнитного поля в этой области, то естественно выбрать в качестве функционального пространства, в котором расположены случайные реализации электромагнитного поля, пространство локально квадратично интегрируемых функций, то есть пространственные производные в дифференциальных уравнениях (1) должны пониматься в смысле метрики этого пространства. Таким образом, случайные реализации $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ с вероятностью 1 локально квадратично интегрируемы и имеют локально квадратично-интегрируемые производные по пространственным переменным.

Заметим следующее. В теории вероятностей принято различать на письме случайные величины от неслучайных посредством некоторых дополнительных соглашений. В настоящей работе, мы, с целью упрощения изложения, не будем следовать этому правилу и это не вызовет недоразумений, так как, далее, везде векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ всегда будут представлять случайные математические объекты.

Таким образом, распределение вероятностей P стохастического электромагнитного поля таково, что каждая из реализаций удовлетворяет уравнениям (2) с вероятностью 1, и это свойство является ограничением на возможный выбор распределения вероятностей P. Это ограничение состоит, в частности, в том, что каждая случайная реализация $\big(\mathbf{E}(\mathbf{x},t),\mathbf{H}(\mathbf{x},t)\big)$ в момент времени t определяется однозначно своими значениями в какой-то фиксированный момент времени t_0, то есть она является условно неслучайной, если заданы ее значения $\big(\mathbf{E}(\mathbf{x},0),\mathbf{H}(\mathbf{x},0)\big)\equiv\big(\mathbf{E}(\mathbf{x}),\mathbf{H}(\mathbf{x})\big)$. Это связано с тем, что система уравнений (1) не содержит стохастических источников. Следовательно, для описания случайного электромагнитного поля $\big(\mathbf{E}(\mathbf{x},t),\mathbf{H}(\mathbf{x},t)\big)$ нужно задать распределение вероятностей P_0 для случайной пары электрического и магнитного полей $\big(\mathbf{E}(\mathbf{x}),\mathbf{H}(\mathbf{x})\big)$. В свою очередь, на выбор конкретной модели поля (его распределения вероятностей) должны быть наложены ограничения в виде удовлетворения случайными реализациями с вероятностью 1 тех уравнений в системе (1), которые выражают свойство их бездивергентности. Поэтому задача описания всего класса допустимых моделей стохастических электромагнитных полей сводится к описанию класса распределений вероятностей для статических бездивергентных случайных полей $\big(\mathbf{E}(\mathbf{x}),\mathbf{H}(\mathbf{x})\big)$.

Заметим, наконец, что при построении конкретной модели стохастического электромагнитного поля нужно учитывать что электрическая и магнитная составляющие по разному ведут себя при отражениях физического пространства, так как $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ является векторным полем, $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ – псевдовекторным. Это обстоятельство накладывает ограничения на возможный вид их совместного распределения вероятностей с точки зрения его преобразования при поворотах системы координат.

Далее, будем предполагать, что совместное распределение вероятностей случайных полей $\big(\mathbf{E}(\mathbf{x}),\mathbf{H}(\mathbf{x})\big)$ таково, что остаются конечными их вторые моменты, то есть существуют конечные парные корреляционные функции

$$K_{ij}^{(\alpha,\beta)}(\mathbf{x};\mathbf{y})=\langle F_i^{(\alpha)}(\mathbf{x})F_j^{(\beta)}(\mathbf{y})\rangle\,,\quad \alpha,\beta=\mathrm{E},\mathrm{H}\,,\ i,j=1,2,3 \tag{2}$$

(далее, наряду с векторными обозначениями, будем применять индексные обозначения для их компонент), где $\mathbf{F}^{(\mathrm{E})}\equiv\mathbf{E}$, $\mathbf{F}^{(\mathrm{H})}\equiv\mathbf{H}$. Такое ограничение естественно, с физической точки зрения, так как только такие стохастические электромагнитные ноля можно рассматривать могут представлять интерес, ввиду того, что должно быть конечно среднее значение $\Big(K_{ii}^{(\mathrm{E,E})}(\mathbf{x};\mathbf{x}) + K_{ii}^{(\mathrm{H,H})}(\mathbf{x};\mathbf{x})\Big)/8\pi$ в любой фиксированный момент времени t_0, которое определяет среднюю величину плотности энергии стохастического электромагнитного ноля в этот момент времени (здесь и далее подразумевается, что но повторяющимся нижним индексам производится суммирование но их значениям 1,2,3).

Набор корреляционных функций (3) обладает очевидным свойством симметрии

$$K_{ij}^{(\alpha,\beta)}(\mathbf{x};\mathbf{y}) = K_{ji}^{(\beta,\alpha)}(\mathbf{y};\mathbf{x})\,. \tag{3}$$

Если оказываются конечными все моменты пары нолей $\big(\mathbf{E}(\mathbf{x}),\mathbf{H}(\mathbf{x})\big)$, что имеет место в таком частном, но важном случае гауссовского случайного ноля, то полный набор этих моментов $\langle \prod\limits_{j=1}^{n} F_{i_j}^{(\alpha_j)}(\mathbf{x}_j)\rangle$, $n \in \mathbb{N}$ полностью определяет распределение вероятностей стохастического электромагнитного ноля.

Принимая во внимание, что условие дифференцируемости с вероятностью 1 случайных реализаций $\big(\mathbf{E}(\mathbf{x}),\mathbf{H}(\mathbf{x})\big)$ также можно сформулировать в терминах корреляционных функций $K_{ij}^{(\alpha,\beta)}(\mathbf{x};\mathbf{y})$ и, в связи с конечностью парных корреляционных функций $K_{ij}^{(\alpha,\beta)}(\mathbf{x};\mathbf{y})$, задачу описания всех возможных моделей стохастических электромагнитных нолей мы будем понимать как задачу об описании таких необходимых и достаточных условий для матрицы функций с тензорными значениями $K_{ij}^{(\alpha,\beta)}(\mathbf{x};\mathbf{y})$, которые дают возможность трактовать их как соответствующие корреляционные функции $\langle F_i^{(\alpha)}(\mathbf{x})F_j^{(\beta)}(\mathbf{y})\rangle$.

3. Свойство положительной определенности. Решение поставленной задачи основано на явном представлении пары случайных нолей $\big(\mathbf{E}(\mathbf{x}),\mathbf{H}(\mathbf{x})\big)$, удовлетворяющих с вероятностью 1 условию бездивергентности. Это представление, наряду с учетом условия положительной определенности матрицы парных корреляционных функций, которому должна удовлетворять матрица парных корреляционных функций пары случайных полей, приводит к общей формуле для этой матрицы, описывающей весь класс допустимых матриц такого типа для стохастического электромагнитного ноля. Условие положительности мы обсудим в настоящем разделе.

Очевидно, что корреляционные функции $\langle F_i^{(\alpha)}(\mathbf{x})F_j^{(\beta)}(\mathbf{y})\rangle$ пары, состоящей из электрического и магнитного нолей $\big(\mathbf{E},\mathbf{H}\big)$ удовлетворяет неравенству

$$\langle\Big|\int_{\Omega} F_i^{(\alpha)}(\mathbf{x})w_i^{(\alpha)}(\mathbf{x})d\mathbf{x}\Big|^2\rangle = \int_{\Omega^2} K_{ij}^{(\alpha,\beta)}(\mathbf{x};\mathbf{y})w_i^{(\alpha)}(\mathbf{x})w_j^{(\beta)}(\mathbf{y})d\mathbf{x}d\mathbf{y} \geq 0\,, \tag{4}$$

в которых по повторяющимся индексам, как нижним $i,j = 1,2,3$ (см. замечание выше), так и верхним $\alpha,\beta = \mathrm{E},\mathrm{H}$, подразумевается суммирование. Здесь вектор-функции $\big(w_1^{(\alpha)}(\mathbf{x}), w_2^{(\alpha)}(\mathbf{x}), w_3^{(\alpha)}(\mathbf{x})\big)$, $\alpha = \mathrm{E},\mathrm{H}$ являются произвольными финитными и бесконечно дифференцируемыми по пространственным координатам вектора $\mathbf{x}$. Это неравенство является также достаточным условием для того, чтобы набор, перечисляемый посредством $\alpha,\beta = \mathrm{E},\mathrm{H}$ матриц-функции $K_{ij}^{(\alpha,\beta)}(\mathbf{x};\mathbf{y})$ с $i,j = 1,2,3$ представлял собой набор парных корреляционных функций $\langle F_i^{(\alpha)}(\mathbf{x})F_j^{(\beta)}(\mathbf{y})\rangle$ для некоторой пары $\big(E_i(\mathbf{x}), H_j(\mathbf{x})\big)$ векторных случайных нолей, что является следствием из известной теоремы Бохнера-Хинчина в применении к рассматриваемому нами случаю [6].

В силу (3), имеется три независимых корреляционных матриц-функций: $K_{ij}^{(\mathrm{E,E})}(\mathbf{x};\mathbf{y}) \equiv K_{ij}^{(\mathrm{E})}(\mathbf{x};\mathbf{y})$, $K_{ij}^{(\mathrm{H,H})}(\mathbf{x};\mathbf{y}) \equiv K_{ij}^{(\mathrm{H})}(\mathbf{x};\mathbf{y})$, $K_{ij}^{(\mathrm{E,H})}(\mathbf{x};\mathbf{y})$. В терминах этих матриц условие положительности (4) записывается виде

$$\big(K^{(\mathrm{E})}\mathbf{u},\mathbf{u}\big) + \big(K^{(\mathrm{H})}\mathbf{v},\mathbf{v}\big) + 2\big(K^{(\mathrm{E,H})}\mathbf{u},\mathbf{v}\big) \geq 0\,, \qquad (5)$$

где для $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ — обозначения для соответствующих компонент пары вектор-функций $\mathbf{w}^{(\alpha)}(\mathbf{x})$, $\alpha = \mathrm{E,H}$; $K^{(\mathrm{E})}$, $K^{(\mathrm{H})}$, $K^{(\mathrm{E,H})}$ – интегральные операторы с ядрами в виде соответствующих корреляционных функций и скобками обозначены скалярные произведения в $\mathbb{L}_2(\Omega)$.

Условие положительности в форме (5) можно переформулировать эквивалентным образом. Для этого воспользуемся тем, что функция $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ произвольны. Тогда заменим функцию $\mathbf{v}$ на $\lambda\mathbf{v}$ с произвольным множителем $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда (5) запишется в виде

$$\big(K^{(\mathrm{E})}\mathbf{u},\mathbf{u}\big) + \lambda^2\big(K^{(\mathrm{H})}\mathbf{v},\mathbf{v}\big) + 2\lambda\big(K^{(\mathrm{E,H})}\mathbf{u},\mathbf{v}\big) \geq 0\,,$$

где квадратное неравенство должно иметь место при любом значении λ. Это приводит к следующему набору неравенств, которые будут, тем самым, эквиваленты неравенству (5),

$$\big(K^{(\mathrm{E})}\mathbf{u},\mathbf{u}\big) \geq 0\,, \quad \big(K^{(\mathrm{H})}\mathbf{v},\mathbf{v}\big) \geq 0\,, \quad \big(K^{(\mathrm{E})}\mathbf{u},\mathbf{u}\big)\big(K^{(\mathrm{H})}\mathbf{v},\mathbf{v}\big) \geq \big(K^{(\mathrm{E,H})}\mathbf{u},\mathbf{v}\big)^2. \qquad (6)$$

4. Описание класса всех допустимых наборов $\big(K_{ij}^{(\mathrm{E})}, K_{ij}^{(\mathrm{H})}, K_{ij}^{(\mathrm{E,H})}\big)$. Наша задача дать общую формулу, описывающую все многообразие троек корреляционных функций $\big(K_{ij}^{(\mathrm{E})}(\mathbf{x},\mathbf{y}), K_{ij}^{(\mathrm{H})}(\mathbf{x},\mathbf{y}), K_{ij}^{(\mathrm{E,H})}(\mathbf{x},\mathbf{y})\big)$, которые удовлетворяют требованию, чтобы соответствующие им случайные векторные поля $\big(\mathbf{E}(\mathbf{x}), \mathbf{H}(\mathbf{x})\big)$ удовлетворяли с вероятностью 1 уравнениям $(\nabla, \mathbf{E}) = 0$, $(\nabla, \mathbf{H}) = 0$.

Так как оба уравнения математически одинаковы, то будем рассматривать только второе из них. В классической электродинамике используется общее решение этого уравнения, которое дается формулой $[\nabla, \mathbf{A}] = \mathbf{H}$, где векторное поле $\mathbf{A}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega$ представляет собой т.н. *векторный потенциал*. Тот факт, что такое представление является достаточным для поля $\mathbf{H}$, чтобы оно было бездиверегентным, очевиден. Сложнее доказать, что оно является также и необходимым, что тесно связано с так называемой теоремой Гельмгольца об однозначном, с точностью до постоянной, разложении любого поля на сумму потенциального и соленоидального слагаемых. Эта теорема обычно доказывается, при дополнительным ограничении на поле $\mathbf{H}$ в случае некомпактности области Ω его определения, которое выражается в виде стремления поля к нулю на бесконечности. Здесь мы строго докажем необходимость представления $[\nabla, \mathbf{A}] = \mathbf{H}$ для решений уравнения $(\nabla, \mathbf{H}) = 0$ для областей $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ довольно произвольного вида, равно как и соответствующее уточнение теоремы Гельмгольца без использования этого дополнительного условия. Ранее, в работе [4], нами было дано доказательство теоремы Гельмгольца в случае, когда электромагнитное поле является почти периодическим в среднем квадратичном.

Теорема 1. *Пусть Ω – связная область в $\mathbb{R}^3$. Тогда уравнение $\mathbf{H} = [\nabla, \mathbf{A}]$ относительно векторного поля $\mathbf{A}(\mathbf{x})$, где $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ – гладкое (локально в среднем квадратичном) поле на Ω, удовлетворяющее условию $(\nabla, \mathbf{H}) = 0$, разрешимо внутри Ω, где $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ – дважды дифференцируемое (локально в среднем квадратичном) поле на Ω. При этом существует единственное решение $\mathbf{A}(\mathbf{x})$, которое удовлетворяет дополнительному условию $\big(\nabla, \mathbf{A}(\mathbf{x})\big) = 0$.*

□ Выберем пару чисел $L, \varepsilon > 0$ так, что $\varepsilon < L/2$. Определим для каждого $\mathsf{j} = \langle j_1, j_2, j_3 \rangle \in \mathbb{Z}^3$ кубическую область $\Omega_{\mathsf{j}} = \bigotimes_{l=1}^{3} [j_l L - \varepsilon, (j_l + 1)L + \varepsilon]$. Пара областей Ω_j и Ω_{k} с $\mathsf{j} \neq \mathsf{k} = \{k_1, k_2, k_3\}$ имеет непустое пересечение только в том случае, если $j_l \in \{k_l - 1, k_l, k_l + 1\}$, $l = 1, 2, 3$ при выполнении условия $\mathsf{j} \neq \mathsf{k}$. Тогда семейство областей $\{\Omega_{\mathsf{j}}; \mathsf{j} \in \mathbb{Z}^3\}$ образует атлас, так как $\bigcup_{\mathsf{j} \in \mathbb{Z}^3} \Omega_{\mathsf{j}} = \mathbb{R}^3$, которые являются его картами.

Пусть Ω – связная компактная область в $\mathbb{R}^3$. Доопределим поле $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ для всех точек $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ равенством $\mathbf{H}(\mathbf{x}) = 0$. Очевидно, что $(\nabla, \mathbf{H}) = 0$ вне области Ω. Тогда такое расширение векторного поля $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ является гладким в среднем квадратичном локально и в том же смысле удовлетворяет условию $(\nabla, \mathbf{H}) = 0$. Рассмотрим уравнение $\mathbf{H}(\mathbf{x}) = [\nabla, \mathbf{A}(\mathbf{x})]$ на всей внутренней части каждого куба Ω_{j}, $\mathsf{j} \in \mathbb{Z}^3$.

Зафиксируем целочисленный вектор j. Сужение поля $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ на куб Ω_{j} будем обозначать $\mathbf{H}_{\mathsf{j}}(\mathbf{x})$. При этом поле $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ является дифференцируемым продолжением поля $\mathbf{H}_{\mathsf{j}}(\mathbf{x})$. Поле $\mathbf{H}_{\mathsf{j}}(\mathbf{x})$ представим в виде ряда Фурье

$$\mathbf{H}_{\mathsf{j}}(\mathbf{x}) = \sum_{\{\boldsymbol{\kappa}\}} \bar{\mathbf{H}}_{\mathsf{j}}(\boldsymbol{\kappa}) e^{i(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{x})} \tag{7}$$

по счетному множеству векторов $\{\boldsymbol{\kappa}\}$, определяемому величиной ребра куба Ω_{j}, $\boldsymbol{\kappa} = (n_1 \mathsf{e}_1 + n_2 \mathsf{e}_2 + n_3 \mathsf{e}_3)/(L + 2\varepsilon)$, $\langle n_1, n_2, n_3 \rangle \in \mathbb{Z}^3$. Ряд (7) сходится в среднем квадратичном, так как поле $\mathbf{H}_{\mathsf{j}}(\mathbf{x})$ локально квадратично интегрируемо и ввиду компактности Ω_{j}, причем в окрестности точек гладкости поля $\mathbf{H}_{\mathsf{j}}(\mathbf{x})$ он сходится равномерно.

Решение $\mathbf{A}_{\mathsf{j}}(\mathbf{x})$ уравнения

$$\mathbf{H}_{\mathsf{j}}(\mathbf{x}) = [\nabla, \mathbf{A}_{\mathsf{j}}(\mathbf{x})] \tag{8}$$

будем искать в виде суммы двух слагаемых $\mathbf{A}_{\mathsf{j}}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_{\mathsf{j}}^{(0)}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}_{\mathsf{j}}^{(1)}(\mathbf{x})$, где первое слагаемое равно $\mathbf{A}_{\mathsf{j}}^{(0)}(\mathbf{x}) = [\bar{\mathbf{H}}_{\mathsf{j}}(0), \mathbf{x}]/2$,

$$\bar{\mathbf{H}}_{\mathsf{j}}(0) = \frac{1}{|\Omega_{\mathsf{j}}|} \int_{\Omega_{\mathsf{j}}} \mathbf{H}_{\mathsf{j}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}\,,$$

а второе дается рядом Фурье

$$\mathbf{A}_{\mathsf{j}}^{(1)}(\mathbf{x}) = \sum_{\boldsymbol{\kappa} \neq 0} \bar{\mathbf{A}}_{\mathsf{j}}(\boldsymbol{\kappa}) e^{i(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{x})} \tag{9}$$

с суммированием по тому же множеству $\{\boldsymbol{\kappa}\}$ векторов. Подставляя разложения Фурье для $\mathbf{H}_{\mathsf{j}}(x)$ и $\mathbf{A}_{\mathsf{j}}^{(1)}(\mathbf{x})$ в уравнение $\mathbf{H}_{\mathsf{j}}(\mathbf{x}) - \bar{\mathbf{H}}_{\mathsf{j}}(0) = [\nabla, \mathbf{A}_{\mathsf{j}}^{(1)}(\mathbf{x})]$, находим уравнение для коэффициентов $\bar{\mathbf{A}}_{\mathsf{j}}(\boldsymbol{\kappa})$, $\bar{\mathbf{H}}_{\mathsf{j}}(\boldsymbol{\kappa}) = i[\boldsymbol{\kappa}, \bar{\mathbf{A}}_{\mathsf{j}}(\boldsymbol{\kappa})]$, которое разрешимо при $\boldsymbol{\kappa} \neq 0$,

$$\bar{\mathbf{A}}_{\mathsf{j}}(\boldsymbol{\kappa}) = \frac{i}{\boldsymbol{\kappa}^2}[\boldsymbol{\kappa}, \bar{\mathbf{H}}_{\mathsf{j}}(\boldsymbol{\kappa})]\,. \tag{10}$$

Из явного вида коэффициентов $\bar{\mathbf{A}}_{\mathsf{j}}(\boldsymbol{\kappa})$ следует, что ряд (9) сходится в среднем квадратичном (при $|\boldsymbol{\kappa}| > 1$ ряд $\sum |\bar{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\kappa})|^2$ мажорируется рядом $\sum |\bar{\mathbf{H}}(\boldsymbol{\kappa})|^2$).

Построенное решение единственно, если потребовать $(\nabla, \mathbf{A}_{\mathsf{j}}(\mathbf{x})) = 0$, так как подстановка разложения (9) в это дифференциальное уравнение приводит к условию для коэффициентов $\big(\boldsymbol{\kappa}, \bar{\mathbf{A}}_{\mathsf{j}}(\boldsymbol{\kappa})\big) = 0$. Тогда выражение (10) является единственным решением уравнения $\bar{\mathbf{H}}_{\mathsf{j}}(\boldsymbol{\kappa}) = i[\boldsymbol{\kappa}, \bar{\mathbf{A}}_{\mathsf{j}}(\boldsymbol{\kappa})]$ при $\boldsymbol{\kappa} \neq 0$. Автоматически, из этого представления коэффициентов $\bar{\mathbf{A}}_{\mathsf{j}}(\boldsymbol{\kappa})$ следует, что поле $\mathbf{A}_{\mathsf{j}}^{(1)}(\mathbf{x})$ является гладким в среднем квадратичном, так как сходится ряд

$$\sum_{\{\boldsymbol{\kappa}\}} \boldsymbol{\kappa}^2 |\bar{\mathbf{A}}_{\mathsf{j}}(\boldsymbol{\kappa})|^2 < \infty\,,$$

в чем легко убедиться непосредственной подстановкой в него выражений для $\bar{\mathbf{A}}_{\mathsf{j}}(\boldsymbol{\kappa})$, $\mathsf{j} \in \mathbb{Z}^3$.

Если поле $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ – гладкое в точке $\mathbf{x}$, то ряд (7) сходится к нему равномерно в малой окрестности этой точки, что имеет место для любого ряда Фурье. Поэтому решение $\mathbf{A}^{(1)}(\mathbf{x})$ и, следовательно, поле $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ также являются гладкими в этой точке $\mathbf{x}$.

Пусть точка $\mathbf{x}$ принадлежит внутренней части пересечения каких-либо двух кубов Ω_{j} и Ω_{k} и, следовательно в этой точке определены, соответственно, поля $\mathbf{A}_{\mathsf{j}}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{A}_{\mathsf{k}}(\mathbf{x})$. Тогда вычитая, уравнения (8) при значениях j и k, находим $[\nabla, \big(\mathbf{A}_{\mathsf{j}} - \mathbf{A}_{\mathsf{k}}\big)](\mathbf{x}) = 0$. Общим решением этого уравнения является $\mathbf{A}_{\mathsf{j}}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}_{\mathsf{k}}(\mathbf{x}) = \nabla\Phi(\mathbf{x})$. Доопределим эту функцию на каждом из кубов Ω_{j} и Ω_{k} нулем в точках, которые находятся внутри симметрической разности $(\Omega_{\mathsf{j}} \setminus \Omega_{\mathsf{k}}) \cup (\Omega_{\mathsf{k}} \setminus \Omega_{\mathsf{j}})$. Тогда такая расширенная функция $\Phi(\mathbf{x})$ представляется на Ω_{j} рядом Фурье

$$\Phi(\mathbf{x}) = \sum_{\{\boldsymbol{\kappa}\}} \bar{\Phi}(\boldsymbol{\kappa}) e^{i(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{x})}\,.$$

Следовательно,

$$\nabla\Phi(\mathbf{x}) = i\sum_{\{\boldsymbol{\kappa}\}} \boldsymbol{\kappa}\bar{\Phi}(\boldsymbol{\kappa}) e^{i(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{x})}\,.$$

Так как каждое из слагаемых $\mathbf{A}_{\mathsf{j}}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{A}_{\mathsf{k}}(\mathbf{x})$ дифференцируемо в среднем квадратичном, то таким же свойством обладает $\nabla\Phi(\mathbf{x})$. Тогда, в частности, ряд

$$\Delta\Phi(\mathbf{x}) = \sum_{\{\boldsymbol{\kappa}\}} \boldsymbol{\kappa}^2 \bar{\Phi}(\boldsymbol{\kappa}) e^{i(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{x})} \tag{11}$$

сходится в среднем квадратичном. Теперь, так как оба векторных поля $\mathbf{A}_{\mathsf{j}}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{A}_{\mathsf{k}}(\mathbf{x})$ бездивергентные, то вычисляя дивергенцию от обеих разности этих полей так, что дифференцирование возможно производить почленно, ввиду квадратичной сходимости ряда (11), получим

$$\sum_{\{\boldsymbol{\kappa}\}} \boldsymbol{\kappa}^2 \bar{\Phi}(\boldsymbol{\kappa}) e^{i(\boldsymbol{\kappa},\mathbf{x})} = 0\,.$$

Таким образом, $\bar{\Phi}(\boldsymbol{\kappa}) = 0$, при всех $\boldsymbol{\kappa} \neq 0$. Следовательно, $\mathbf{A}_{\mathsf{j}}(\mathbf{x})$ совпадает с $\mathbf{A}_{\mathsf{k}}(\mathbf{x})$ в любой внутренней точке $\mathbf{x}$ пересечении $\Omega_{\mathsf{j}} \cap \Omega_{\mathsf{k}}$.

Так как доказанное совпадение решений $\mathbf{A}_{\mathsf{j}}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{A}_{\mathsf{k}}(\mathbf{x})$ имеет место для внутренних точек пересечения любого конечного набора кубов Ω_{l}, то мы тем самым построили единое дифференцируемое в среднем квадратичном поле $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ для почти всех точек из Ω, которое па каждом из кубов Ω_{j} совпадает с $\mathbf{A}_{\mathsf{j}}(\mathbf{x})$. Это поле, по построению, единственное, которое удовлетворяет условию $(\nabla, \mathbf{A}) = 0$.

Положим, теперь, что поле $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ – гладкое в Ω. Тогда оно является, в частности, гладким в среднем квадратичном, и поэтому, по доказанному, имеется единственное ноле $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ – гладкое в среднем квадратичном, которое удовлетворят уравнениям $\mathbf{H} = [\nabla, \mathbf{A}]$ и $(\nabla, \mathbf{A}) = 0$. Так как в левой части стоит гладкое ноле $\mathbf{H}(\mathbf{x})$, то поле $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ может быть продолжено до гладкого во всех точках Ω ноля. ■

Из доказанной теоремы, в частности, следует, что известная теорема Гельмгольца о разложении любого векторного поля па два составляющих, одно из которых является потенциальным, в второе – соленоидальным, допускает следующее обобщение.

Следствие. *Пусть поле $\mathbf{A}(\mathbf{x})$, заданное в произвольной связной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, является гладким в среднем квадратичном. Тогда оио допускает такое представление $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x}) + \mathbf{C}(\mathbf{x})$ в любой точке $\mathbf{x} \in \Omega$, что имеют место равенства $(\nabla, \mathbf{B}) = 0$, $[\nabla, \mathbf{C}(\mathbf{x})] = 0$ (разложение Гельмгольца). Любые два таких представления $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{C}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{B}_2(\mathbf{x}) + \mathbf{C}_2(\mathbf{x})$ отличаются друг от друга на градиент $\nabla\Phi(\mathbf{x})$, где $\Phi(\mathbf{x})$ – гармоническая в Ω функция.*

□ Пользуясь дифференцируемостью поля $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ сформулируем уравнение $[\nabla, \mathbf{A}(\mathbf{x})] = [\nabla, \mathbf{B}(\mathbf{x})]$ относительно поля $\mathbf{B}(\mathbf{x})$. Это уравнение имеет единственное решение, которое удовлетворяет условию $(\nabla, \mathbf{B}) = 0$. Определим поле $\mathbf{C}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) - \mathbf{B}(\mathbf{x})$. Очевидно, что, но построению, ротор этого поля равен нулю. Таким образом, но крайней мере, одно разложение поля $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ требуемое вида существует. Рассмотрим два произвольных разложения Гельмгольца. Для их потенциальных составляющих $\mathbf{C}_1$ и $\mathbf{C}_2$ имеет место равенство

$$(\nabla, \mathbf{A}(\mathbf{x})) = (\nabla, \mathbf{C}_1(\mathbf{x})) = (\nabla, \mathbf{C}_2(\mathbf{x}))\,.$$

С другой стороны, ввиду выполнимости для этих составляющих равенств $[\nabla, \mathbf{C}_1(\mathbf{x})] = 0$ и $[\nabla, \mathbf{C}_2(\mathbf{x})] = 0$, на основании критерия потенциальности поля, существуют функции $\Psi_1(\mathbf{x})$ и $\Psi_2(\mathbf{x})$ такие, что $\mathbf{C}_1(\mathbf{x}) = \nabla\Psi_1(\mathbf{x})$, $\mathbf{C}_2(\mathbf{x}) = \nabla\Psi_2(\mathbf{x})$. Подставляя в приведенное выше равенство, получим, что $\Delta\Psi_1 = \Delta\Psi_2$.

Так как при этом $\mathbf{B}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{B}_2(\mathbf{x}) = \nabla\Phi(\mathbf{x})$ вместе с $\mathbf{C}_2(\mathbf{x}) - \mathbf{C}_1(\mathbf{x}) = \nabla\Phi(\mathbf{x})$, где введено скалярное ноле $\Psi_2 - \Psi_1 = \Phi$, для которого выполняется $\Delta\Phi = 0$. ■

Таким образом, из доказанной теоремы следует, что для задания стохастического поля $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ необходимо и достаточно задать стохастическое ноле векторного потенциала

$\mathbf{A}(\mathbf{x})$. При этом в силу линейности связи между $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{A}(\mathbf{x})$, для парной корреляционной функции случайного поля $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ полностью определяется парной корреляционной функцией поля $\mathbf{A}(\mathbf{x})$. В нашем случае, эта связь между парными корреляционными функциями имеет вид,

$$K_{ij}^{(\mathrm{H})}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \langle [\nabla, \mathbf{A}(\mathbf{x})]_i [\nabla, \mathbf{A}(\mathbf{y})]_j \rangle = \varepsilon_{ikl} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial y_m} \langle A_l(\mathbf{x}) A_n(\mathbf{y}) \rangle =$$

$$= \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jmn} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial y_m} K_{ln}^{(\mathrm{A})}(\mathbf{x},\mathbf{y}) , \tag{12}$$

где $K^{(\mathrm{A})}(\mathbf{x};\mathbf{y})$ – парная корреляционная функция случайного поля $\mathbf{A}(\mathbf{x})$.

Для обеспечения положительной определенности парной корреляционной функции $K_{ij}^{(\mathrm{H})}(\mathbf{x},\mathbf{y})$, ввиду произвольности функций $\mathbf{v}(\mathbf{x})$, необходимо и достаточно, чтобы была положительно определена парная корреляционная функция $K_{ij}^{(\mathrm{A})}(\mathbf{x};\mathbf{y})$, так как

$$\left(K^{(\mathrm{H})}\mathbf{v},\mathbf{v}\right) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} v_i(\mathbf{x}) v_j(\mathbf{y}) \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jmn} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial y_m} K_{ln}^{(\mathrm{A})}(\mathbf{x},\mathbf{y}) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^3} v_l'(\mathbf{x}) v_n'(\mathbf{y}) K_{ln}^{(\mathrm{A})}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \left(K^{(\mathrm{A})}\mathbf{v}',\mathbf{v}'\right) ,$$

где

$$\mathbf{v}'(\mathbf{x}) = [\nabla, \mathbf{v}(\mathbf{x})] .$$

Тогда достаточность положительной определенности функции $K_{ln}^{(\mathrm{A})}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ для положительной определенности функции $K_{ij}^{(\mathrm{H})}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ очевидна. Необходимость же положительной определенности функции $K_{ln}^{(\mathrm{A})}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ следует из ее определения как парной корреляционной функции случайного поля $\mathbf{A}(\mathbf{x})$.

Обратимся, теперь, к удовлетворению условия, случайное поле $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ должно удовлетворять условию $(\nabla, \mathbf{E}) = 0$. Так как в предыдущих рассуждениях нигде не было использовано условие, что поле $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ является псевдовекторным. Существенно было лишь, что оно представляет собой общее решение уравнения $(\nabla, \mathbf{H}) = 0$, то мы можем воспользоваться уже полученными результатами для поля $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ и применить их к описанию случайного поля $\mathbf{E}(\mathbf{x})$.

Вводя случайное поле $\mathbf{B}(\mathbf{x})$, как общее решение уравнения $(\nabla, \mathbf{E}) = 0$ запишем представление $\mathbf{E} = [\nabla, \mathbf{B}]$. Тогда общий вид корреляционной функции $K_{ij}^{(\mathrm{E})}(\mathbf{x};\mathbf{y})$ дается формулой, аналогичной (12),

$$K_{ij}^{(\mathrm{E})}(\mathbf{x};\mathbf{y}) = \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jmn} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial y_m} K_{ln}^{(\mathrm{B})}(\mathbf{x},\mathbf{y}) . \tag{13}$$

При этом введенное поле $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ является псевдовекторным и мы отходим от общепринятой схемы, когда электрическое поле $\mathbf{E}$ посредством соотношения

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla\Phi + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} ,$$

в котором частная производная по времени является независимым от поля $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ случайным векторным полем. Для положительной определенности корреляционной функции $K_{ij}^{(\mathrm{E})}(\mathbf{x};\mathbf{y})$, как и выше необходимо и достаточно, чтобы была положительно определенной корреляционная функция $K_{ij}^{(\mathrm{B})}(\mathbf{x};\mathbf{y})$. При этом имеет место $\big(K^{(\mathrm{E})}\mathbf{u},\mathbf{u}\big) = \big(K^{(\mathrm{B})}\mathbf{u}',\mathbf{u}'\big)$, где достаточно, чтобы $\mathbf{u}'$ была произвольной финитной функцией.

Наконец, проанализируем возможность удовлетворить последнему неравенству из набора неравенств (6). Прежде всего, нужно найти выражение для корреляционной функции $K_{ij}^{(\mathrm{E,H})}(\mathbf{x};\mathbf{y})$. Подставляя в определение этой функции (см. (2) при $\alpha = \mathrm{E}$, $\beta = \mathrm{H}$) выражения для стохастических полей $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = [\nabla,\mathbf{B}(\mathbf{x})]$ и $\mathbf{H}(\mathbf{x}) = [\nabla,\mathbf{A}(\mathbf{x})]$, получим

$$K_{ij}^{(\mathrm{E,H})}(\mathbf{x};\mathbf{y}) = \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jmn}\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial y_m}\langle B_l(\mathbf{x})A_n(\mathbf{y})\rangle = \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jmn}\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial y_m}K_{ln}^{(\mathrm{B,A})}(\mathbf{x};\mathbf{y})\,.$$

Теперь, подставляя в левую часть последнего равенства в (6) выражения $\big(K^{(\mathrm{E})}\mathbf{u},\mathbf{u}\big) = \big(K^{(\mathrm{B})}\mathbf{u}',\mathbf{u}'\big)$ и $\big(K^{(\mathrm{H})}\mathbf{v},\mathbf{v}\big) = \big(K^{(\mathrm{A})}\mathbf{v}',\mathbf{v}'\big)$, а в правую – выражение для $\big(K^{(\mathrm{E,H})}\mathbf{u},\mathbf{v}\big)$, полученное в результате преобразований

$$\big(K^{(\mathrm{E,H})}\mathbf{u},\mathbf{v}\big) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} u_i(\mathbf{x})v_j(\mathbf{y})\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jmn}\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial y_m}K_{ln}^{(\mathrm{B,A})}(\mathbf{x},\mathbf{y}) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^3} u_l'(\mathbf{x})v_n'(\mathbf{y})K_{ln}^{(\mathrm{B,A})}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \big(K^{(\mathrm{B,A})}\mathbf{u}',\mathbf{v}'\big)\,,$$

в результате, находим эквивалентное неравенство

$$\big(K^{(\mathrm{B})}\mathbf{u}',\mathbf{u}'\big)\big(K^{(\mathrm{A})}\mathbf{v}',\mathbf{v}'\big) \ge \big(K^{(\mathrm{B,A})}\mathbf{u}',\mathbf{v}'\big)^2\,, \tag{14}$$

которое достаточно, чтобы оно выполнялось при всех непрерывных финитных функциях $\mathbf{u}'$ и $\mathbf{v}'$.

Полученная совокупность неравенств (14) и $\big(K^{(\mathrm{B})}\mathbf{u}',\mathbf{u}'\big) \ge 0$, $\big(K^{(\mathrm{A})}\mathbf{v}',\mathbf{v}'\big) \ge 0$ означает, что матриц-функция вида

$$K_{ij}^{(\alpha,\beta)}(\mathbf{x};\mathbf{y})\,,\quad \alpha,\beta = \mathrm{B},\mathrm{A}\,,\ i,j = 1,2,3$$

является положительно-определенной относительно пары пространственных точек $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$. Это влечет за собой возможность определить пару случайных полей $\langle\mathbf{B}(\mathbf{x}),\mathbf{A}(\mathbf{x})\rangle$, для которых эта матриц-функция является матрицей парных корреляционных функций

$$K_{ij}^{(\alpha,\beta)}(\mathbf{x};\mathbf{y}) = \langle B_i(\mathbf{x})A_j(\mathbf{y})\rangle,,\quad \alpha,\beta = \mathrm{B},\mathrm{A}\,,\ i,j = 1,2,3\,.$$

Таким образом, нами доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *В общем случае, совокупность парных корреляционных функций* $K_{ij}^{(\alpha,\beta)}(\mathbf{x};\mathbf{y})$, $\alpha,\beta = \mathrm{E},\mathrm{H}$ *стохастического электромагнитного поля* $\langle\mathbf{E},\mathbf{H}\rangle$ *допускает представление в виде*

$$K_{ij}^{(\mathrm{E,E})}(\mathbf{x};\mathbf{y}) = \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jmn}\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial y_m}K_{ln}^{(\mathrm{B,B})}(\mathbf{x};\mathbf{y})\,,\qquad K_{ij}^{(\mathrm{H,H})}(\mathbf{x};\mathbf{y}) = \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jmn}\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial y_m}K_{ln}^{(\mathrm{A,A})}(\mathbf{x};\mathbf{y})\,,$$

$$K_{ij}^{(\mathrm{E,H})}(\mathbf{x};\mathbf{y}) = \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jmn}\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial y_m}K_{ln}^{(\mathrm{B,A})}(\mathbf{x};\mathbf{y})\,,$$

где совокупность

$$K_{ij}^{(\mathrm{B,B})}(\mathbf{x};\mathbf{y})\,,\qquad K_{ij}^{(\mathrm{A,A})}(\mathbf{x};\mathbf{y})\,,\quad K_{ij}^{(\mathrm{B,A})}(\mathbf{x};\mathbf{y})$$

является набором парных корреляционных функций упорядоченной пары случайных полей $\langle \mathbf{B}(\mathbf{x}), \mathbf{A}(\mathbf{x})\rangle$.

Эта теорема дает ответ на поставленный во введении вопрос об общем виде корреляционной функции стохастического электромагнитного поля.

Литература

1. Борн М. Атомная физика/ М.: Мир, 1965 - 492с.
2. Планк М. О законе распределения энергии в нормальном спектре // Избранные труды / М.: Наука, 1975. – С.259-267.
3. Федорюк М.В. Метод перевала / М.: Наука, 1977. – 368 с.
4. Лам Тан Фат, Вирченко Ю.П. Гауссовские почти периодические в среднем квадратичном соленоидальные векторные поля // Belgorod State University Scientific. Bulletin Mathematics & Physics. – 2014. – 5(176);34. – С.134-141.
5. Рытов С.М. Теория электрических флуктуаций и теплового излучения.- М.: Изд. АН СССР, 1953.
6. Рытов С.М., Татарский В.И., Кравцов Ю.А. Введение в статистическую радиофизику, ч.2 Случайные поля/ С.М. Рытов.- М.: Наука, 1978.- 464с.
7. Клаудер Дж., Сударшан Э. Основы квантовой оптики / М.: Мир, 1970. - 428 с.
8. Фат Л.Т., Вирченко Ю.П. Движение частицы в случайном стохастически однородном и изотропном магнитном поле с частотным спектром белого шума// Материалы международной конференции "Дифференциальные уравнения и их приложения"26-31 мая 2013, Белгород/ Белгород: Политерра, 2013.- С.192-193.
9. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей.– М.: Эдиториал, УРСС, 2001.
10. Фат Лам Тан, Вирченко Ю.П. Стохастически однородные и изотропные магнитные поля// Belgorod State University Scientific Bulletin Mathematics & Physics.- 2013.- 19(162); 32.- С.176-183.
11. Фат Лам Тан, Вирченко Ю.П. О теореме Гельмгольца для почти-периодических в среднем квадратичном векторных полей// Belgorod State University Scientific. Bulletin Mathematics & Physics.- 2013.- 26(169); 33.- С.99-104.
12. Лам Тан Фат, Вирченко Ю.П. Стохастически однородные и изотропные соленоидальные гауссовские поля// Тезисы зимней математической школы С.Г.Крейна/ Воронеж: ВГУ, 2014.- С.204-208.
13. Лам Тан Фат, Вирченко Ю.П. Гауссовские почти периодические в среднем квадратичном соленоидальные векторные поля// Belgorod State University Scientific. Bulletin Mathematics & Physics.- 2014.- 5(176); 34.- С.134-141.

PAIR CORRELATION FUNCTIONS OF STOCHASTIC ELECTROMAGNETIC FIELD

Lam Tan Phat, Yu.P. Virchenko

Belgorod State University,
Studencheskaya St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail:virch@bsu.edu.ru

Abstract. Stochastic electromagnetic field that describes heat fluctuation in vacuum is studied. The general form of pair matrix correlation functions of the field is found.

Key words: stochastic electromagnetic field, gaussian random field, Maxwell's equations, stochastic model, correlation function.