MSC 11Y99

РЕШЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ $f(f(x)) = \exp(x)$

К.А. Рубцов, G.F. Romerio

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: rubtsov@bsu.edu.ru

Аннотация. Описана методика решения функционального уравнения $f(f(x)) = e^x$, использующая гомоморфизм сложения на основе понятия суперлогарифма. Методика предполагает взаимосвязь между непрерывным повторным возведением в степень и тетрацией. Расширение этой методики предложено для решения обобщенного функционального уравнения $f(f(x)) = u(a, x)$ и аналогичных ему. Гомоморфизм сложения, используемый при решении функционального уравнения, находит практическое применение в алгоритмах гиперформата, описывающего сверхбольшие числа.

Ключевые слова: гомоморфизм, суперлогарифм, тетрация, сверхстепень, алгоритм, гиперформат.

Введение. Более века назад в математике была поставлена задача решения функционального уравнения $f(f(x)) = e^x$. В 1950 году H. Kneser в работе [1] нашел реальное аналитическое решение. Однако, в дальнейших исследованиях [2,4] отмечается, что полученное решение в работе [1] определено неоднозначно и не может быть вычислено. В последующие годы неоднократно предпринимались попытки найти решение этого функционального уравнения. Например, в работе [4] указана взаимосвязь поиска решения с обобщенными экспоненциальными и логарифмическими функциями. Отмечена их важность будущего применения в вычислительной технике для расширения формата чисел, аналогичных числам с плавающей занятой в арифметике [5,6]. Во всех приведенных исследованиях, включая работу J.C.Appleby [7], осуществлялся поиск приближенного решения функционального уравнения $f(f(x)) = e^x$. В настоящей работе, авторы поставили задачу точного решения этого уравнения. Эта задача была решена методом, основанным на использовании гипероперации «Тетрация» и ее инверсии.

1. Поиск решения. Рассмотрим два частных случая: $f_1(f_1(x)) = e + x$ и $f_2(f_2(x)) = e \cdot x$. Эти уравнения легко решить: $f_1(x) = e/2 + x$ и $f_2(x) = \sqrt{e} \cdot x$. Сравнивая исходные функциональные уравнения и получаемые результаты, можно сделать следующий прогноз ожидаемого решения уравнения $f(f(x)) = e^x$:

- структура решения должна быть аналогична решениям для f_1 и f_2, то есть $f(x) = \psi(e) * x$;

- ранг оператора «$*$» идентичен рангу функции e^x, то есть рангу операции степени, и желательна его коммутативность;

Работа выполнена в рамках проекта «Исследование и разработка эффективных гомоморфных методик для техники и информационных технологий» (регистрационный номер: 8.8539.2013).

- ранг функции $\psi(e)$, вероятно, выше ранга $\sqrt{e}$, а функция аналогична последовательности $e/2$, $\sqrt{e}$, $\psi(e)$, то есть характеризует разделение на две операции предыдущего ранга.

Из поставленной задачи и вышеизложенного прогноза можно сделать выводы о методике решения:

1. Следует использовать операции рангом выше чем e^x.

2. Для сохранения структуры формулы решения и её преобразования необходимо использовать *гомоморфизм*.

2. Тетрация и обратные функции. Последовательность операций $a+b$, $a\cdot b$, a^b можно продолжить и ввести ${}^{b}a$ [8, 9], где ${}^{b}a$ – операция названная *Тетрация*. (Имеется несколько наименований этой операции: «Hyperpower», «*Tetration*» [10–12], «Power Tower» [13], «Гипероператор-4», «сверхстепень», «суперстепень» [14]. Далее, в статье применяется термин *Тетрация* — русскоязычный аналог *Tetration*. Эта операция определенна в четвертом разряде иерархии Grzegorczyk, для которой авторы использовали примечание Морера [9]: $x^x = {}^{2}x$.) Тетрация – операция, имеющая ранг выше, чем a^b. Она не коммутативна и имеет две различные обратные операции типа «корень» и типа «логарифм». Наиболее удачными названиями являются «суперкорень» и «суперлогарифм». В работе [14] предложен простой вариант обозначений этих обратных операций. Так, если $a^b = c \Rightarrow b = \log_a c$, то ${}^{b}a = c \Rightarrow b = \mathrm{slog}_a c$, где $\mathrm{slog}_a c$ – суперлогарифм от c по основанию a, а сверхкорень обозначен согласно [21]. В работе [14] дана формула (1), инвариантная относительно операций:

$$ {}^{n}_{1}R_a^{\left(k+{}^{n}_{3}R_a^b\right)} = {}^{n-1}_{1}\overset{k}{R}{}^{b}_{a} \qquad (\forall\ n \in N, \text{ для } n=1,\ a<b), \tag{1}$$

где ${}^{n}_{i}\overset{k}{R}{}^{b}_{a}$: n– ранг операции (полагаем, что $n=1$ — ранг сложения, $n=2$ — ранг умножения и т.д.), i – номер инверсии ($i=1$ – без инверсии, $i=2$ – отношение инверсии типа «корень», $i=3$ – отношение инверсии типа «логарифм»), k – число повторений операции ($k=1$ не пишется), a, b – аргументы. При $n=4$, $a>1$, $k\geqslant 0$ из (1) нетрудно получить [15, 16] для Тетрации и суперлогарифма:

$$ {}^{(k+\mathrm{slog}_a b)}a = \underbrace{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a^b}}}}}_{k \text{ повторений } a} \quad \text{и} \quad {}^{(-k+\mathrm{slog}_a b)}a = \underbrace{\log_a \ldots \log_a}_{k \text{ повторений } a} b\,. \tag{2}$$

3. Гомоморфизм сложения.

Лемма 1. *Если $y=f(x)$ – функция действительного переменного, то при $a>\sqrt[e]{e}$ имеет место тождество:*

$$ x * y = {}^{(\mathrm{slog}_a x + \mathrm{slog}_a y)}a\,. $$

□ В Тетрации и обратных ей операциях отсутствуют некоторые полезные зависимости, имеющиеся в степени. Частично преодолеть эти ограничения позволяет гомоморфизм. Согласно [17], гомоморфизм φ:

$$\varphi\big(F_i'(a_1,\dots,a_{n_i})\big) = F_i\big(\varphi(a_1),\dots,\varphi(a_{n_i})\big). \tag{3}$$

Приняв в (3): $\varphi(z) = \mathrm{slog}_a z$, $i = 1$, $n = 2$, $a_1 = x$, $a_2 = y$, $F_1(a_1,a_2) = x + y$, а $F_i'(a_1,a_2) = x * y$, получим гомоморфизм сложения с помощью суперлогарифма (2). В статье принято ограничение $a > \sqrt[e]{e}$ согласно свойствам Тетрации [11]:

$$\mathrm{slog}_a(x*y) = \mathrm{slog}_a x + \mathrm{slog}_a y, \tag{4}$$

откуда

$$x * y = {}^{(\mathrm{slog}_a x + \mathrm{slog}_a y)}a. \tag{5}$$

Полученный гомоморфизм сложения (4) правильнее представить во взаимосвязи с основанием суперлогарифма. Тогда, тождество (5) примет вид:

$$x \overset{[a]}{*} y = {}^{(\mathrm{slog}_a x + \mathrm{slog}_a y)}a\,. \qquad \blacksquare \tag{6}$$

Зависимость (6) имеет, в частности, свойства:

1. Коммутативность: $x \overset{[a]}{*} y = y \overset{[a]}{*} x$, если $a \neq x$, $a \neq y$.

2. Ранг оператора "$*$" соответствует степени, так как $x \overset{[x]}{*} y = x^y$ и $x \overset{[y]}{*} y = y^x$.

Из (4) видно, что найденный гомоморфизм аналогичен умножению в тождестве $\log_a(x\cdot y) = \log_a x + \log_a y$. Таким образом, в поиске решения функционального уравнения $f(f(x)) = e^x$ как и $f(x) = \psi(e) * x$, полученный гомоморфизм полностью отвечает поставленным требованиям.

4. Решение функционального уравнения $f(f(x)) = e^x$.

Теорема 1. *Функция любого переменного $f(x) = (0,5 + \mathrm{sln}x) * e$ является точным решением уравнения $f(f(x)) = e^x$.*

□ Для нахождения решения функционального уравнения $f(f(x)) = e^x$, следует определить $\psi(e)$, такое, что $f(x) = \psi(e) * x$. Как уже отмечалось, эта функция должна быть подобна обратной операции типа «корень», но она не может быть суперкорнем. Так как оператор «$*$» в формуле $f(x) = \psi(e) * x$ аналогичен умножению для $f_2(x) = \sqrt{e}\cdot x$, то аналог корня можно записать как $\psi(e) \overset{[e]}{*} \psi(e) = e$, аналогично $\sqrt{e}\cdot\sqrt{e} = e$. Тогда, искомая функция принимает вид $f(x) = \psi(e) \overset{[e]}{*} x$, а функцию e^x можно записать как $e^x = e \overset{[e]}{*} x$. Откуда,

$$f(f(x)) = \left[\psi(e) \overset{[e]}{*} \psi(e)\right] \overset{[e]}{*} x = e^x\,. \tag{7}$$

Из равенства $\psi(e) \overset{[e]}{*} \psi(e) = e$ найдем функцию $\psi(e)$, учитывая Лемму 1:

$$e = \psi(e) \overset{[e]}{*} \psi(e) = {}^{(\mathrm{slog}_e\psi(e)+\mathrm{slog}_e\psi(e))}e = {}^{2\cdot\mathrm{slog}_e\psi(e)}e = {}^{2\cdot\mathrm{sln}\psi(e)}e; \tag{8}$$

$$2\cdot\mathrm{sln}\psi(e) = \mathrm{sln}e \quad\Rightarrow\quad \mathrm{sln}\psi(e) = \frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad \psi(e) = {}^{1/2}e\,. \tag{9}$$

Таким образом, искомая функция $f(x)$ согласно (8):

$$f(x) = \psi(e) \overset{[e]}{*} x = {}^{1/2}e \overset{[e]}{*} x\,.$$

Для проверки подставим $\psi(e) = {}^{1/2}e$ из (9) в (7):

$$f(f(x)) = \left[{}^{1/2}e \overset{[e]}{*} {}^{1/2}e\right] \overset{[e]}{*} x = {}^{\left(\mathrm{sln}\left({}^{(1/2)}e\right)+\mathrm{sln}\left({}^{(1/2)}e\right)\right)}e \overset{[e]}{*} x =$$

$$= {}^{\left(1/2+1/2\right)}e \overset{[e]}{*} x = e \overset{[e]}{*} x = {}^{(\mathrm{sln}e+\mathrm{sln}x)}e = {}^{(1+\mathrm{sln}x)}e = e^{\left({}^{\mathrm{sln}x}e\right)} = e^x\,.$$

Итак, решение $f(f(x)) = e^x$ имеет вид:

$$f(x) = {}^{(1/2)}e \overset{[e]}{*} x = {}^{(0{,}5+\mathrm{sln}x)}e\,. \qquad \blacksquare \tag{10}$$

5. Общее решение функционального уравнения $f(f(x)) = u(a,x)$.

Лемма 2. *Решением уравнения $f(f(x)) = u(a,x)$ для любой действительной функции двух переменных будет $f(x) = {}^{1/n}a \overset{[a]}{*} x = {}^{\left(1/n+\mathrm{slog}_a x\right)}a$.*

☐ Согласно теореме 1 можно решить функциональное уравнение типа

$$\underbrace{f(f(\ldots\ f(x))\ldots)}_{n\ \text{повторений}\ f} = a^x\,.$$

Решение этого уравнения:

$$f(x) = {}^{1/n}a \overset{[a]}{*} x = {}^{\left(1/n+\mathrm{slog}_a x\right)}a\,. \qquad \blacksquare$$

Методику решения с применением гомоморфизма, приведенную в теореме 1 и лемме 2, целесообразно использовать и для решения уравнения

$$\underbrace{f(f(\ldots\ f(x))\ldots)}_{n\ \text{повторений}\ f} = u(a,x)\,. \tag{11}$$

Рассмотрим решение уравнения $f(f(x)) = u(a,x)$, где $u(a,x)$ – функция 2-х переменных. Тогда запишем функцию $U(x,n)$:

$$U(x,n) = \underbrace{u(x,u(x,\ldots\ u(x,x))\ldots)}_{n\ \text{повторений}\ x}\,.$$

Обозначим обратную ей функцию как «L»: если $U(a,x)=y$, то $L(a,y)=x$.

Из полученных функций и леммы 2 запишем гомоморфизм сложения на базе $L(a,x)$: $b \overset{[a]}{\diamondsuit} c = U(a,(L(a,b)+L(a,c)))$, где «$\diamondsuit$»– оператор, используемый для компактного обозначения этого гомоморфизма. Далее ищем функцию $f(x)$: $f(x)=g(a)\overset{[a]}{\diamondsuit} x$, где $g(a)\overset{[a]}{\diamondsuit} g(a) = a$ и $a\overset{[a]}{\diamondsuit} x = u(a,x)$. Откуда, найдем вспомогательную функцию $g(a)$ и искомое решение $f(x)$:

$$g\left(a\right)=U\left(a,\ \frac{L\left(a,\ a\right)}{2}\right)=U\left(a,\ \frac{1}{2}\right)\ ,$$

$$f\left(x\right)=g\left(a\right)\overset{[a]}{\diamondsuit}x=U\left(a,\ \frac{1}{2}\right)\overset{[a]}{\diamondsuit}x=U\left(a,\ \left(L\left(a,\ U\left(a,\ \frac{1}{2}\right)\right)+L\left(a,\ x\right)\right)\right).$$

Для общего случая (11), решение имеет вид:

$$f\left(x\right)=U\left(a,\ \frac{1}{n}\right)\overset{[a]}{\diamondsuit}x=U\left(a,\ \left(L\left(a,\ U\left(a,\ \frac{1}{n}\right)\right)+L\left(a,\ x\right)\right)\right).$$

Заключение. При решении функционального уравнения $f(f(x))=e^x$ авторы использовали оператор «$\overset{[a]}{*}$». Этот оператор удобно применять для построения новых форматов чисел, аналогичных известному формату с плавающей занятой. В работах [19,20] авторы предлагают несколько алгоритмов и программ для таких форматов. В одном из форматов число D представляется как:

$$D={}^{(n+\mathrm{slog}_a d)}a=d\overset{[a]}{*}({}^n a)\quad , \tag{12}$$

где $n\in\mathbf{Z}$, $a\in\mathbf{R}$, $a>1$, $d\in[1;a[$, $d\in\mathbf{R}$. Если для базиса a (12) принять одно из значений, например $a=10$, или $a=2$, то получим упрощенную запись:

$$D={}^{(n+\mathrm{slog}_{10}d)}10=d*{}^n10 \quad \text{и} \quad D={}^{(n+\mathrm{slog}_{2}d)}10=d*{}^n2\ . \tag{13}$$

В случае (13), оператор «$*$» обязательно следует рассматривать в паре с основанием сверхстепени. Алгоритм преобразования в новый формат чисел и обратно выполняется по формулам (2).

В заключение, следует отметить, что полученное решение (10) может быть вычислено, так как функции ${}^xe$ и $\mathrm{sln}(x)$ имеют аппроксимации. Авторы предлагают аппроксимацию, основанную на формулах (2) и приближении $\mathrm{sln}(x)\approx\ln(x)$ для $x\in[1;e]$. Из (6) и известных аппроксимаций [18, 19] можно записать:

$$\mathrm{sln}(x)\approx\begin{cases}\mathrm{sln}(e^x)-1, & \text{если } x\leqslant 0,\\ \mathrm{sln}(\ln(x))+1, & \text{если } 1<x,\\ x-1 & \text{в противном случае.}\end{cases} \tag{14}$$

Гиперформат чисел (12) рационализирует вычисление сверхлогарифмов (14) путем применения стандартных вычислительных процедур для логарифмов. В частности, приближенное вычисление функции $\mathrm{sln}(x)$ можно реализовать алгоритмом [21]:

1. Преобразовать число x в новый формат $x = d * {}^n e$.

2. Преобразовать $x = d * {}^n e \quad \Rightarrow \quad x^* = d \cdot e^n$.

3. Вычислить $\mathrm{sln}(x) = \ln\big(x^*\big) = n + \ln(d)$, так как $d \in [1; e[$.

Авторы использовали указанные алгоритмы в программах преобразования форматов чисел и гиперкалькуляторе [23,24]. Элементы этого исследования были изложены па ICM [19,20]. Авторские права па изложенный в статье материал, а также на алгоритмы и программы защищены [22].

Литература

1. Kneser H. Reelle analytische Lösungen der Gleichung $\varphi(\varphi(x)) = e^x$ und verwandter Funktionalgleichungen // J. Reine angew. Math. – 1950. – 187. – B.56-67.
2. Baker I.N. The iteration of entire transcendental functions and the solution of the functional equation $f(f(z)) = F(z)$ // Math. Ann. – 1955. – 120. – P.174-180.
3. Kuczma M. Functional Equations in a Single Variable / Warsaw: PWN-Polish Scientific Publishers, 1968.
4. Mathematics of Computation, October 1991. – 57;196. – P.723-733.
5. Clenshaw C.W., Lozier D.W., Olver F.W.J., Turner P.R. Generalized exponential and logarithmic functions // Comput. Math. Appl. – 1986. – 128 (5/6). – P.1091-1101.
6. Clenshaw C.W., Olver F.W.J., Turner P.R. Level-index arithmetics an introductory survery // Numerical Analysis and Parallel Processing, Lecture Notes in Math. – vol. 1397, Springer-Verlag, New York, 1989.
7. Appleby J.C. Notes on Hexponentiation // The Mathematical Gazette. – 1995. – 79; №484 1995. A short investigation on finding expressions for $h(x)$, such that $h(h(x)) = exp(x)$.
8. Eisenstein G. Entwicklung von. $a^{a^{a^{\cdots}}}$ // J. reine angew. Math. – 1844. – 28 – B.49-52.
9. Maurer H. Über die Funktion $y = x^{\left[x^{[x^{(\cdots)}]}\right]}$ für ganzzahliges Argument (Abundanzen) // Mittheilungen der Mathematische Gesellschaft in Hamburg. – 1901. – 4. – P.33-50.
10. Goodstein R.L. Transfinite ordinals in recursive number theory // Journal of Symbolic Logic. – 1947. – 12.
11. Macdonnell J. Some Critical Points on the Hyperpower Function ${}^n x = x^{x^{\cdots^{x}}}$ // Int. J. Math. Educ. Sci. Technol. – 1989. – 20. – P.297-305.
12. Wolfram MathWorld$^{\mathrm{TM}}$, http://mathworld.wolfram.com/Tetration.html
13. Wolfram MathWorld$^{\mathrm{TM}}$, http://mathworld.wolfram.com/PowerTower.html
14. Рубцов К.А. Алгоритмизация ингредиентов во множестве алгебраических операций // Кибернетика. – 1989. – №3. – С.111-112.
15. Rubtsov K. Integro-differential objects of a new nature // The Proceeding ICM 94. – Zurich, Section: 8, AMS-Classification number: 26 (short communications), P.57.
16. Рубцов К.А. Новые математические объекты // Белгород: БелГТАСМ, Киев: НПП ИНФОРМАВТОСИМ. – 1996, 251 с.
17. Математическая энциклопедия / М.: Сов. энциклопедия, 1977. – Т.1. – С.1061.
18. Super-logarithm, from Wikipedia - The linear approximation approach by Rubstov and Romerio, http://en.wikipedia.org/wiki/Superlogarithm
19. Rubtsov K.A., Romerio G.F. International Congress of Mathematicians, Madrid 2006: Abstracts, Posters, Short Communications, Mathematical Software, Other Activities, p. 22-23, Hyper-operations as a tool for science and engineering.

20. Rubtsov K.A., Romerio G.F., International Congress of Mathematicians, Hyderabad 2010: Abstracts, Short Communications, p. 626-627, Applications of a number notation hyperformat for science and engineering.
21. Rubtsov K.A., Romerio G.F. Hyperoperations, for science and technology. New algorithmic tools for computer science - Lambert Academic Publishing, 2011, 185 p.
22. Romerio G.F., Rubtsov C.A. Iperformato Rubtsov-Romerio (RRH) // Società Italiana degli Autori ed Editori (SIAE), Roma, 2005, 2010.
23. Рубцов К.А., Romerio G.F. Гипероперации в математическом моделировании и научных исследованиях. Математические методы в технике и технологиях - ММТТ-25: сб. трудов XXV Междунар. науч. конф.: Т. 1. Секция 1,2, 2012, с. 67-70.
24. Рубцов К.А., Romerio G.F. Алгоритмизация гиперформата чисел в научных исследованиях. Математические методы в технике и технологиях - ММТТ-25: сб. трудов XXV Междунар. науч. конф.: Т. 10. Секция 12, 2012, с. 118-122.

THE SOLUTION OF THE FUNCTIONAL EQUATION $f(f(x)) = \exp(x)$ BY MEANS OF A HOMOMORPHISM

K.A. Rubtsov, G.F. Romerio

The National Research University "Belgorod State University" / "BelSU",
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: rubtsov@bsu.edu.ru

Abstract. The solution strategy of the $f(f(x)) = e^x$ functional equation is described using a homomorphism with the super-logarithm as mapping function. The strategy shows the analytical relationship between continuous iterated exponentiations and tetration. An extension of the same strategy is proposed for the solution of a generalized $f(f(x)) = u(a, x)$ functional equation. A practical application is mentioned for the definition of a super-format for the notation of very large numbers.

Key words: homomorphisms, computability and recursion theory, arithmetic functions, computational number theory.