MSC 74S05

МОДЕЛИРОВАНИЕ СВОЙСТВ ДЕФОРМИРУЕМЫХ СРЕД ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИМИ ЧАСТИЦАМИ

***М.М. Ошхунов, **З.В. Нагоев**

*Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова,
ул. Чернышевского, 173, Нальчик, 360004, Россия, e-mail: muaed@inbox.ru
**Кабардино-Балкарский научный центр РАН,
ул. И.Арманд, 37а, Нальчик, 360000, Россия, e-mail: zaliman@mail.ru

Аннотация. В работе предлагается альтернативный подход к проблемам моделирования в области механики деформируемого твердого тела. Суть подхода состоит в замене сплошной деформируемой среды эквивалентной по физико-механическим свойствам системой взаимодействующих частиц. Решение для этих частиц системы обыкновенных дифференциальных уравнений с учетом фактора затухания приводит в предельном случае к статическим задачам механики деформируемого твердого тела, в частности, задачам классической теории упругости. Такой подход позволяет, меняя потенциал взаимодействия между частицами, имитировать такие свойства деформируемых сред, как упругость, пластичность, вязко-упругость и т.д. Кроме того, появляется возможность смоделировать такой фактор как большие деформации, когда физическая и геометрическая нелинейность среды весьма существенны. Приводятся расчеты и сравнения с точным решением некоторых задач теории упругости (задача о деформации подвешенной упругой балки под действием гравитации, задача о прогибе балки при различных условиях опирания и т.д.). Результаты численных экспериментов по предлагаемому алгоритму показали его эффективность, т.к. появляется возможность учесть в рамках единого подхода такие факторы, как физическая и геометрическая нелинейность, большие перемещения и деформации, динамические эффекты и т.д.

Ключевые слова: метод динамических частиц, упругость, пластичность, геометрическая и физическая нелинейность, итерационные методы, метод конечных элементов.

Как известно [1], основные уравнения теории упругости в перемещениях имеют вид

$$
\begin{aligned}
&G\Delta u_i + (\lambda + G)\,\frac{\partial\theta}{\partial x_i} + X_i = 0\,, \qquad i = 1,2,3,\\
&\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\,, \qquad \lambda = K - \frac{2}{3}\,G > 0\,, \\
&\theta = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\,.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Математическая модель для динамических задач теории упругости, согласно вто-

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 12-07-00624 а, № 13-07-01003 а.

рому закону Ньютона, очевидно, запишется в виде:

$$
\begin{aligned}
&G\Delta u_i + (\lambda + G)\,\frac{\partial\theta}{\partial x_i} + X_i = \rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \qquad && i = 1, 2, 3, \\
&\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\,, && \lambda = K - \frac{2}{3}\,G, \\
&\theta = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\,. &&
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Естественно, для решения системы уравнений (**??**) наряду с краевыми условиями необходимо задать начальные условия вида:

$$
\begin{aligned}
u_i\,(x_1, x_2, x_3, t)_{(\,|t=0)} &= u_i^0\,(x_1, x_2, x_3)\,, \\
\dot{u}_i\,(x_1, x_2, x_3, t)_{(\,|t=0)} &= v_i^0\,(x_1, x_2, x_3)\,.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Здесь v_i^0 – скорость частиц сплошной среды в момент времени $t = 0$, u_i^0 – начальное перемещение точки области в тот же момент времени, $\dot{u}_i\,(x_1, x_2, x_3, t)$ означает производную по времени от перемещения точки в трех направлениях.

Отметим отдельно постановку тепловых задач теории упругости. Если справедлив экспериментальный закон Дюгамеля-Неймана о линейном расширении объема сплошной среды в результате действия температуры, то закон Гука в этих условиях запишется в виде:

$$
\sigma_{ij} - K\,(\theta - 3\alpha T)\,\delta_{ij} = 2G\left(\varepsilon_{ij} - \frac{\theta}{3}\,\delta_{ij}\right). \tag{4}
$$

Здесь α – коэффициент линейного расширения упругой сплошной среды под действием температурного поля $T = T\,(x_1, x_2, x_3)$. Подстановка выражения (4) в основные уравнения вида (1) приводит к системе дифференциальных уравнений в частных производных с правой частью, зависящей от градиента температурного поля T и коэффициента линейного расширения α.

Геометрически нелинейными моделями теории упругости традиционно называют модели, учитывающие большие деформации, которые могут доходить до 100 процентов и больше. При этом определяющие законы также становятся нелинейными, т.е. нельзя считать их удовлетворяющими закону Гука. В классической теории упругости при малых деформациях не различаются системы координат до и после деформации. Кроме того, в формулах Коши, связывающих компоненты тензора деформации с перемещениями, учитывается только линейные члены. В случае геометрически нелинейной модели механики деформируемого твердого тела формулы для вычисления деформации через перемещения учитывают также квадратичные слагаемые. Формула Коши в этом случае запишется в виде:

$$
\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right), \quad i, j, k = 1, 2, 3. \tag{5}
$$

В отличие от классической модели теории упругости геометрически нелинейные модели обладают свойством неединственности решения в состоянии равновесия. Для определения положения сплошной среды после приложения значительных нагрузок поступают следующим образом. Прикладывают к деформируемой конструкции внешнюю нагрузку малыми дозами, определяя каждый раз новое положение ее равновесия. Такой процесс завершается, когда будет достигнута заданная нагрузка и при этом будет найдено положение конструкции после приложения внешних сил. Такой подход позволяет линеаризовать задачу для каждого шага нагружения. Однако, математическое исследование существования и единственности решения, полученного таким способом, является трудной проблемой. Следует отметить, что геометрически нелинейные задачи являются также и физически нелинейными и их решение даже с применением математических и компьютерных методов является весьма сложной задачей.

Для описания свойств деформируемых сплошных сред под действием нагрузок можно использовать дискретно-динамическую модель частиц аналогично тому, как это делается в классической теории упругости. Основная идея метода динамических частиц [2] состоит в замене упругой сплошной среды системой взаимодействующих между собой частиц, жесткостные свойства которых эквивалентны физико-механическим характеристикам изучаемой реальной среды. При таком подходе необходимо рассредоточить общую массу сплошной среды по дискретным точкам. Сопротивление на растяжение и сжатие образца, выполненного из таких дискретных частиц, должно быть эквивалентно по физико-механическим свойствам реальному сопротивлению сплошного прототипа. Кроме того, дискретный образец должен обладать свойством поперечного сокращения при растяжении, т.е. иметь определенный коэффициент Пуассона. После такой замены реальной сплошной среды можно изучить динамические свойства дискретной системы на основе уравнений второго закона Ньютона с учетом затухания колебательного процесса. Тогда стационарное, не зависящее от времени, состояние дискретной системы под действием различных нагрузок будет соответствовать реальному статическому состоянию деформируемой среды под действием тех же нагрузок. В этом состоит основная идея метода дискретных динамических частиц.

В связи с предлагаемой моделью, следует изучить следующие вопросы. Так как сплошная упругая среда заменяется системой взаимодействующих частиц, необходимо найти эквиваленты таким упругим константам как модуль Юнга, коэффициент Пуассона, модуль сдвига и модуль объемного расширения для изотропной сплошной среды. В рамках этой модели также необходимо проанализировать вопросы деформирования неупругих сплошных сред при малых и больших деформациях. Известно, что эти задачи (физически и геометрически нелинейные проблемы теории упругости) являются математически весьма сложными ввиду их существенной нелинейности. Нам представляется, что эти задачи могут быть решены по единому алгоритму, если будут должным образом выбраны силы взаимодействия между дискретными частицами, имитирующими физическую нелинейность, т.е. отклонение от закона Гука. Кроме того, на наш взгляд, не потребуется дополнительных усилий, чтобы учесть большие перемещения сплошной среды под действием внешних нагрузок. Наконец, динамические задачи теории упругости, которые являются весьма сложными, могут быть решены без дополнительных усилий, так как метод дискретных динамических частиц позволяет находить состояния ансамбля частиц в любой момент времени.

Перечисленные выше преимущества метода делают его весьма актуальным и общим для решения любых задач механики деформируемого твердого тела, включая задачи классической теории упругости, когда выполняется закон Гука, физически нелинейные задачи при малых деформациях, когда не имеет место закон Гука, геометрически нелинейные задачи, когда деформации сплошной среды могут быть большими, а физико-механические свойства - нелинейными, а также динамические задачи теории упругости.

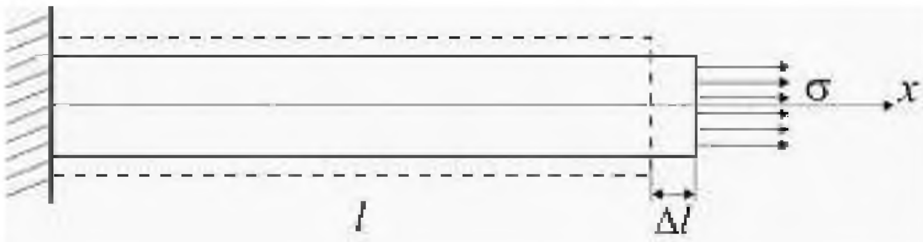

Рис. 1. Растяжение образца: $\sigma = F/S$, F – растягивающая сила, S – сечение (после растяжения), $\varepsilon = \Delta l/l$ – деформация образца.

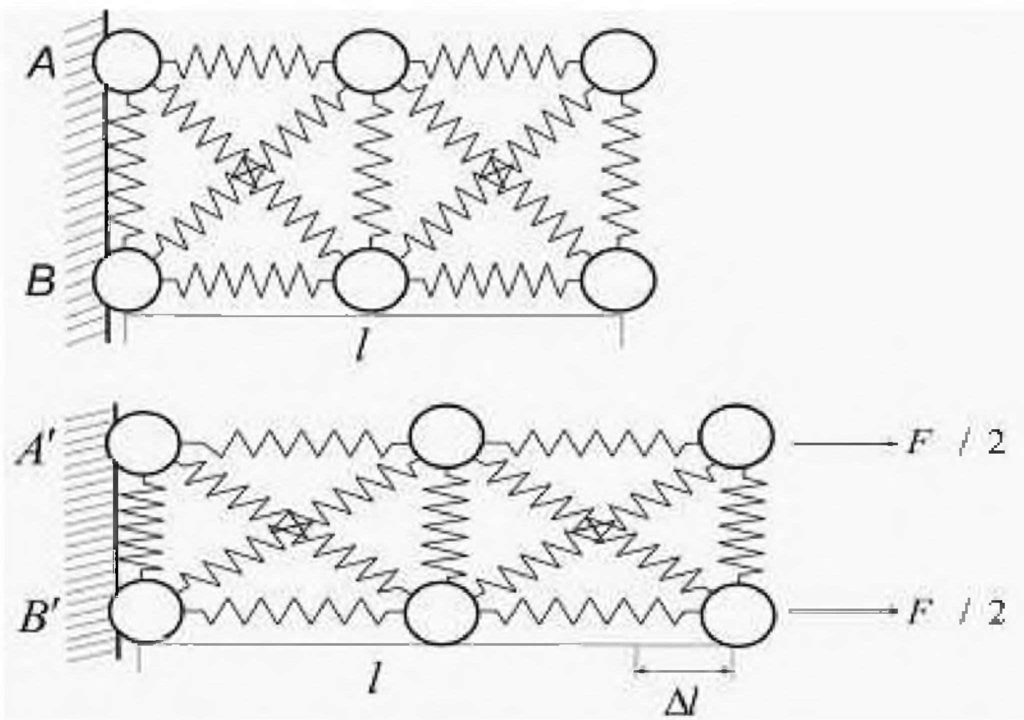

Рис. 2. Схема плоского деформирования сплошной среды, представленной прямоугольной системой дискретных частиц до- и после приложения нагрузки.

Требует отдельного исследования вопрос интерпретации модуля Юнга, коэффициента Пуассона, модуля сдвига, коэффициента объемного расширения, которые играют ключевую роль в математической модели классической теории упругости. Вначале рассмотрим вопрос об определении дискретно-динамических аналогов наиболее часто используемых в теории упругости физико-механических коэффициентов – модуля Юнга и коэффициента Пуассона.

Обычно, в теории упругости определяют модуль Юнга упругой сплошной среды как коэффициент жесткости между напряжением (силой, приходящейся на единицу площади) и деформацией (относительным удлинением) образца (рис. 1).

Таким образом, модуль Юнга определяется согласно закону Гука но формуле:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \,. \tag{6}$$

В соответствии с вышеизложенным, аналогом модуля Юнга в двумерных задачах теории упругости, когда дискретизации среды осуществляется но одной из прямоугольных схем, может служить жесткость взаимодействия материальных частиц при их растяжении или сжатии (рис. 2).

Как следует из рис. 2, образец при растяжении несколько сокращается в поперечном направлении из-за растяжения диагональных пружин, что говорит о наличии аналога коэффициента Пуассона для данной модели. Предполагается, что точки закрепления A и B свободно перемещаются по вертикальной оси (в реальных экспериментах для определения модуля Юнга образец берут достаточно длинным и, в соответствии с принципом Сен-Венана. Способ закрепления образца не влияет на его деформацию при достаточном удалении. Таким образом, в предлагаемой модели:

$$\sigma = F/S\,, \quad \varepsilon = \Delta l/l\,, \quad \sigma = \tilde{E}\varepsilon \,. \tag{7}$$

Здесь $\tilde{E}$ – суммарный модуль Юнга с учетом растягиваемых, в том числе и диагональных, пружин.

В качестве примера рассмотрим задачу о деформации подвешенной балки под действием гравитации. Для простоты в качестве задачи теории упругости, имеющей точное решение, выбрана задача о деформации упругой балки прямоугольного сечения под действием вертикальной гравитационной силы. Балка может быть подвешена или опираться на основании в единственной точке. Согласно принципу Сен-Венана и принципу суперпозиции упругих решений локальные вариации граничных условий не влияют на перемещение точек сплошной среды в достаточном отдалении от точки закрепления при условии, что главный суммарный вектор сил но вертикали не меняется. Это означает, что при дискретно-динамическом моделировании граничных условий имеется некоторая свобода: можно подвесить балку, состоящую из частиц, в районе торца за одну точку (частицу) или закрепить все частицы, моделирующие торцевую область балки. Согласно принципу Сен-Венана вне зависимости от способа закрепления упругие перемещения вдали от границы не должны существенно меняться (рис. 3).

Точное решение задачи о перемещениях упругой балки, подвешенной в одной центральной точке торца (рис. 4) имеет вид:

$$\begin{aligned} u &= \frac{v}{E}\rho g\,(z-l)\,x, \\ v &= \frac{v}{E}\rho g\,(z-l)\,y, \\ w &= -\frac{\rho g}{2E}\left\{z^2 + v\left(x^2+y^2\right) - 2lz\right\}. \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь l – длина балки, ρ – ее массовая плотность, g – ускорение свободного падения, E, v – модуль Юнга и коэффициент Пуассона соответственно, ось Oz направлена вниз по центру балки, u, v, w – перемещения точек сплошной среды в направлениях Ox, Oy, Oz.

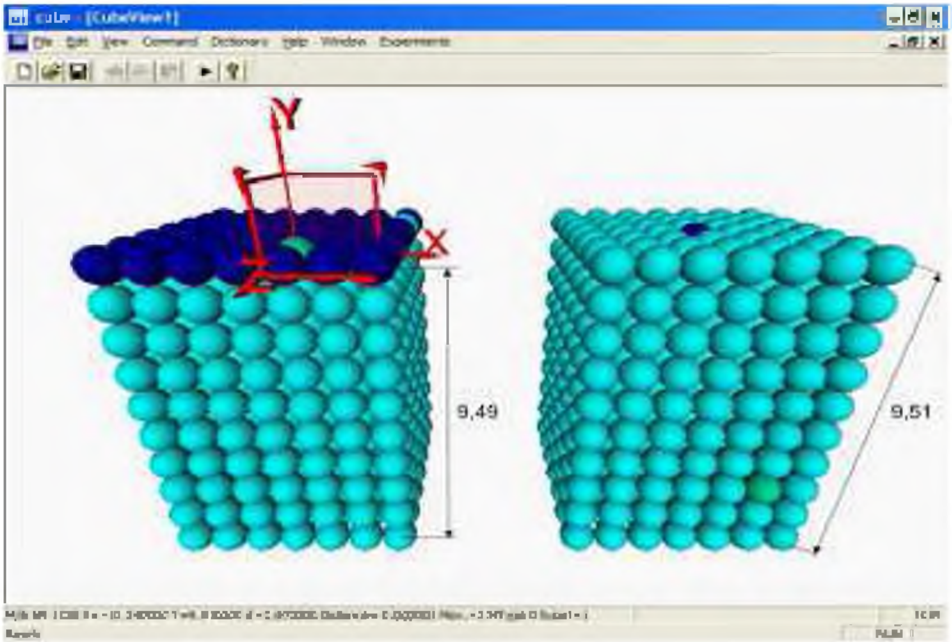

Рис. 3. Два варианта закрепления торца упругой призматической балки: (а) – закреплены все точки верхнего торца, (б) – закреплена единственная центральная точка.

Как следует из формул (8), наибольшее вертикальное перемещение оси упругой балки имеет место при $z = l$, $x = 0$, $y = 0$ и равно

$$w = \frac{\rho g l^2}{2E} \ . \tag{9}$$

Заметим, что решение задачи об опирании балки прямоугольного сечения в нижней точке может быть легко получено видоизменением формул (8). Формула (9) позволяет вычислить один из параметров дискретно-динамической модели, а именно, модуль Юнга, если известно смещение нижнего торца балки длины l и плотности ρ с заданными жесткостными характеристиками. Считается, что модулю Юнга в классической теории упругости соответствует тангенсу угла наклона кривой, описывающей связь «напряжение-деформация» между макрочастицами.

В рассмотренной нами дискретно-динамической модели упругая балка аппроксимировалась 490 пространственными частицами, т.е. решалась система $N = 490 \times 3 \times 2 = 2940$ обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка методом Рунге-Кутта. Так как данным методом решается задача о трехмерном движении системы из 490 частиц с учетом затухания, статическое состояние балки определялось как предельное по времени. Очевидно, что такое предельное состояние частиц будет соответствовать статическому решению задачи теории упругости о деформации балки под действием силы тяжести или собственного веса. Кроме того сравнивались перемещения поверхности балки после приложения гравитации по классической теории упругости и па основе численных решений уравнений динамики дискретных частиц.

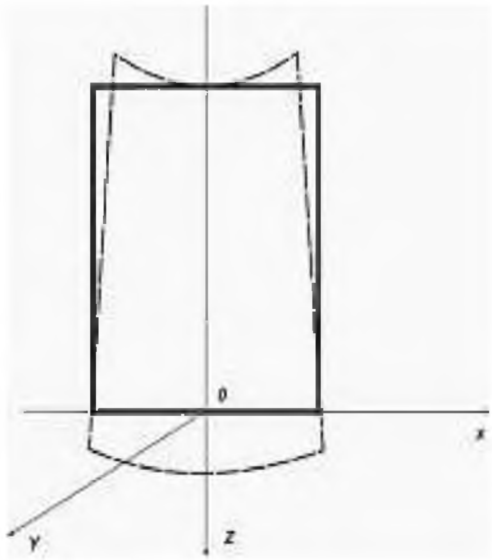

Рис. 4. Деформация подвешенной упругой балки под действием гравитационных сил, направленных по оси OZ.

На рис. 4 пунктирной линией показана качественная картина перемещения поверхности упругой балки в поле тяжести в соответствии с точным решением классической задачи теории упругости. Расчет перемещений граничных частиц балки дискретно-динамическим методом дает приблизительно такую же картину (рис. 5). Как видно из рисунка, верхний торец балки под действием сил гравитации сужается, а нижний – расширяется.

В рамках дискретно-динамической модели осуществлялась также проверка справедливости принципа Сен-Венана для данной задачи. Расчеты показали, что локальное изменение граничных условий, например, закрепление только единственной частицы, или закрепление целого слоя частиц в верхнем торце призматического бруса не отражается существенно на перемещениях точек вдали от верхней плоскости.

В заключении отметим, что дискретно-динамическое представление сплошной среды требует дальнейшего глубокого изучения и анализа. В частности, следует разработать алгоритм нахождения аналога модуля Юнга и коэффициента Пуассона – коэффициента поперечного сокращения для изотропной упругой сплошной среды при различных дискретных решетках. Подчеркнем, что основной идеей метода динамических частиц является замена сплошной среды эквивалентной но жесткостным характеристикам дискретной структурой. Изучение динамических свойств такой структуры позволит с единых позиций ответить на многие вопросы, которые являются весьма сложными и специфическими в рамках классической модели упругости.

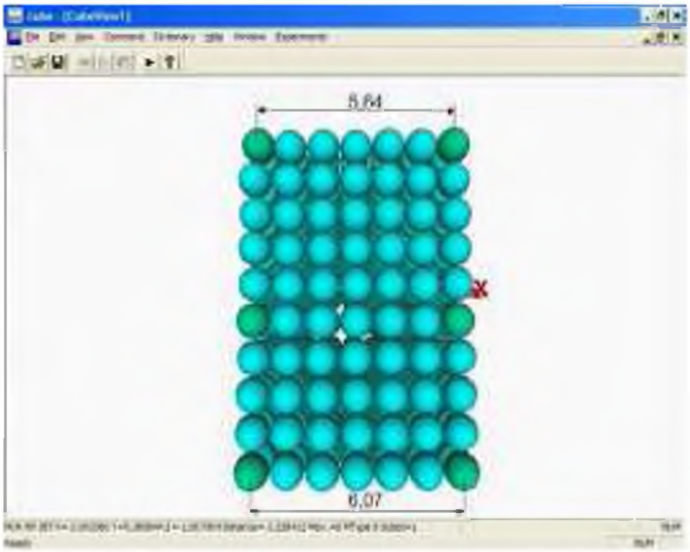

Рис. 5. Перемещения граничных частиц балки под действием сил гравитации.

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.Н. Теория упругости. – М.: Наука, 1965. – 231 с.
2. Нагоев З.В., Ошхунов М.М. Метод дискретно-динамических частиц в задачах механики деформируемого твердого тела // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2011. – №4. – С.155-169.

MODELING THE DEFORMABLE MEDIUM PROPERTIES BY INTERACTING PARTICLES

***M.M. Oshkhunov, **Z.V. Nagoev**

*Kabardino-Balkarian State University of H.M. Berbekov,
Chernishevskogo St., 173, Nal'chik, 360004, Russia, e-mail: muaed@inbox.ru
**Kabardino- Balkarian Scientific Center of Russian Academy of Sciences,
I.Armand St., 37a, Nalchik, 360000, Russia, e-mail: zaliman@mail.ru

Abstract. Alternative approach to modeling to solve of solid mechanics problem is proposed. The approach consists of change of continuous deformable medium by corresponding system of interacting particles having equivalent physical and mechanical properties. The solution of corresponding ordinary differential equations system with the damping factor results in the limiting case of static problems of solid mechanics, in particular, the problems of classical elasticity theory. Changing of interaction potential between particles, this approach allows the to mimic the properties of deformable media such as elasticity, plasticity, visco-elasticity, etc. In addition, it is possible to model such a factor as large deformations when the physical and geometric nonlinearity of the medium is very important. Some calculations and comparisons with the exact solution of some problems of the theory of elasticity (the problem of deformation of a suspended elastic beam under the influence of gravity, the problem of deflection of the beam under different support conditions etc.) are given. The results of numerical experiments according to the proposed algorithm has shown its effectiveness since it is possible to consider in frames of unique approach such factors as physical and geometric nonlinearities, large displacements and deformations and dynamic effects etc.

Key words: dynamic particles method, elasticity, plasticity, geometric and physical nonlinearity, iterative methods, finite element method.