MSC 35Q05

ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ АБСТРАКТНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА-ПУАССОНА-ДАРБУ

А.В. Глушак, О.А. Покручин

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, 308007, Белгород, Россия, e-mail:
Glushak@bsu.edu.ru, pokru4in.oleg@yandex.ru

Аннотация. Доказано достаточное условие разрешимости задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу.

Ключевые слова: абстрактная задача Коши, уравнение Эйлера-Пуассона-Дарбу, операторная функция Бесселя, достаточное условие разрешимости.

Пусть A — замкнутый оператор в банаховом пространстве E с плотной в E областью определения $D(A)$. При $k > 0$ рассмотрим абстрактную задачу Коши для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу

$$u''(t) + \frac{k}{t}u'(t) = Au(t)\,, \quad t > 0\,, \tag{1}$$

$$u(0) = u_0\,, \quad u'(0) = 0. \tag{2}$$

Случай $k = 0$ подробно рассмотрен в [1], [2], [3]. В этих работах установлено, что задача (1), (2) при $k = 0$ равномерно корректна только тогда, когда оператор A является генератором операторной косинус-функции $C(t)$ или косинус-оператор-функции (КОФ). По поводу терминологии см. [4] и обзорные работы [?], [5]. В этих же работах приводятся необходимые и достаточные условия того, что оператор A является генератором КОФ, которые формулируются в терминах оценки нормы резольвенты $R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$ оператора A и ее производных.

Задача (1), (2) исследовалась ранее в работе [6], в которой необходимое и достаточное условия разрешимости сформулированы в терминах оценки нормы резольвенты $R(\lambda)$ и ее весовых производных. В рассматриваемой работе получено достаточное условие на резольвенту оператора A, которое, в отличие от [6], формулируется в терминах дробной степени резольвенты и ее, как и в случае КОФ, невесовых производных. Необходимое условие разрешимости получено ранее в [7].

Обозначим через $C^n(I, E_0)$ пространство n раз сильно непрерывно дифференцируемых при $t \in I$ функций со значениями в $E_0 \subset E$.

Определение 1. *Решением уравнения (1) называется функция $u(t)$, которая при $t \geq 0$ дважды сильно непрерывно дифференцируема, при $t > 0$ принимает значения,*

Работа первого автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 13-01-00378 А-2013

принадлежащие $D(A)$, то есть, $u(t) \in C^2(R_+, E) \cap C(R_+, D(A))$, и удовлетворяет уравнению (1).

Определение 2. Задача (1), (2) называется равномерно корректной, если существуют заданная на E коммутирующая с A операторная функция $Y_k(t)$ и числа $M \geq 1$, $\omega \geq 0$, такие, что для любого $u_0 \in D(A)$ функция $Y_k(t)u_0$ является ее единственным решением и при этом

$$\|Y_k(t)\| \leq M \exp(\omega t)\,, \tag{3}$$

$$\|Y_k'(t)u_0\| \leq M \exp(\omega t)\, \|Au_0\|\,. \tag{4}$$

Функцию $Y_k(t)$ назовем операторной функцией Бесселя (ОФБ) задачи (1), (2), а множество операторов, для которых задача (1), (2) равномерно корректна, обозначим через G_k, при этом G_0 — множество генераторов операторной косинус-функции, а $Y_0(t) = C(t)$.

В определении 2 и в дальнейшем используется обозначение $Y_k'(t)u_0 = (Y_k(t)u_0)'$.

В работе [7] доказана следующая теорема.

Теорема 1. Если задача (1), (2) равномерно корректна и $\mathrm{Re}\lambda > \omega$, то λ^2 принадлежит резольвентному множеству $\rho(A)$ оператора A, для дробной степени резольвенты справедливо представление

$$R^{1+k/2}(\lambda^2) = \frac{1}{\Gamma(k+1)\,\lambda}\int_0^\infty t^k \exp(-\lambda t) Y_k(t)\, dt \tag{5}$$

и при этом выполняются оценки

$$\left\| \frac{d^n}{d\lambda^n}\left(\lambda R^{1+k/2}\left(\lambda^2\right)\right)\right\| \leq \frac{M\,\Gamma(k+n+1)}{(\mathrm{Re}\lambda - \omega)^{k+n+1}}\,, \quad n = 0,\ 1,\ 2, \dots \tag{6}$$

Теперь покажем, что неравенство (6) будет являться и достаточным условием равномерной корректности задачи (1), (2). В последующих леммах 1 – 7 мы будем предполагать, что оператор A является генератором аналитической C_0-полугруппы $T(t)$ (обозначим этот класс операторов через G) и выполнены оценки (6). Для $\mathrm{Re}\lambda > \omega$ положим $F_k(\lambda) = \Gamma(k+1)\lambda R^{1+k/2}(\lambda^2)$.

Лемма 1. *Для для любого $x \in E$ справедливо равенство*

$$\frac{1}{\Gamma(k+1)} \lim_{n\to\infty} n^{k+1} F_k(n)x = x\,. \tag{7}$$

□ Пусть $x \in D(A)$ и $\Gamma = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$, где $\Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$ — контур, состоящий из лучей $\lambda = \sigma + \rho\exp(-i\varphi)$, $0 \leq \rho < \infty$ и $\lambda = \sigma + \rho\exp(i\varphi)$, $0 \leq \rho < \infty$, $\sigma \geq \omega_0$, $\dfrac{\pi}{2} < \varphi < \dfrac{\pi}{2} + \arcsin[M_0(k)]^{-1}$. Тогда справедливо равенство

$$\frac{1}{\Gamma(k+1)} n^{k+1} F_k(n)x = n^{k+2} R^{1+k/2}(n^2)x = \frac{n^{k+2}}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{R(\mu)}{(n^2-\mu)^{1+k/2}}\, x\, d\mu =$$

$$= \frac{n^{k+2}}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{(n^2-\mu)^{1+k/2}} R(\mu)\frac{(\mu I - A)+A}{\mu} x\, d\mu =$$

$$= \frac{n^{k+2}}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{\mu(n^2-\mu)^{1+k/2}} x\, d\mu + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{n^{k+2}}{\mu(n^2-\mu)^{1+k/2}} R(\mu)Ax\, d\mu =$$

$$= x + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{n^{k+2}}{\mu(n^2-\mu)^{1+k/2}} R(\mu)Ax\, d\mu\,.$$

При этом интеграл был вычислен с помощью замыкания в левую полуплоскость контура Γ частью окружности радиуса R, интеграл но которой стремится к пулю при $R \to \infty$.

Нам осталось показать, что интеграл в последнем равенстве при $n \to \infty$ стремится к нулю. Действительно,

$$\int_\Gamma \frac{n^{k+2}}{\mu(n^2-\mu)^{1+k/2}} R(\mu)Ax\, d\mu = \int_\Gamma \frac{1}{\mu}\left(1+\frac{\mu}{(n^2-\mu)}\right)^{1+k/2} R(\mu)Ax\, d\mu =$$

$$= \int\limits_\Gamma \frac{1}{\mu}\left(1+(1+k/2)\frac{\mu}{n^2-\mu}+\ldots+\frac{(1+k/2)\ldots(k/2+1-m)}{(m+1)!}\left(\frac{\mu}{n^2-\mu}\right)^{m+1}+\ldots\right) R(\mu)Axd\mu\,.$$

При $m \in N$ вычислим интеграл

$$\int_\Gamma \frac{\mu^m}{(n^2-\mu)^{m+1}} R(\mu)Ax\, d\mu = 2\pi i \lim_{\mu\to n^2}(\mu^m R(\mu))^{(m)}Ax =$$

$$= 2\pi i \sum_{j=0}^{m}(-1)^j C_m^j n^{2j} R^{j+1}(n^2)Ax\,.$$

Полученная сумма стремится к 0 при $n \to \infty$, поскольку операторная функция $n^2R(n^2)$ ограничена, а $R(n^2)$ стремится к нулю при $n \to \infty$. ■

Наша цель заключается в определении ОФБ $Y_k(t)$ как сильного предела некоторой последовательности. Предполагая, что $A \in G$ и выполнены оценки (6), при $k > 0$ введем в рассмотрение последовательность линейных ограниченных при каждом $t \geq 0$ операторов

$$Y_{k,n}(t) = e^{-nt}\left(I+\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{n^{k+2m+2}}{m!\,\Gamma(k+m+2)}\, t^{m+1} F_k^{(m)}(n)\right). \tag{8}$$

Отметим, что при $k = 0$ аналогичная последовательность была использована в [8].

Из неравенства (6) следует, что ряд в (8) сходится равномерно но t в любом ограниченном интервале и, кроме того, для $t \geq 0$

$$\|Y_{k,n}(t)\| \leq M_1\, e^{\omega_1 t}\,, \quad \omega_1 > \omega\,. \tag{9}$$

Действительно,

$$\|Y_{k,n}(t)\| \le e^{-nt}\left(1+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{n^{k+2m+2}\;t^{m+1}}{m!\;\Gamma(k+m+2)}\cdot\frac{M\;\Gamma(k+m+1)}{(n-\omega)^{k+m+1}}\right)\le$$

$$\le e^{-nt}\left(1+M\sum_{m=0}^{\infty}\frac{n^{k+2m+2}\;t^{m+1}}{(m+1)!\;(n-\omega)^{k+m+1}}\right)\le M_2\,e^{-nt}\,\exp\left(\frac{n^2t}{n-\omega}\right)\le M_1\,e^{\omega_1 t},$$

что и доказывает справедливость неравенства (9).

Аналогично доказывается и дифференцируемость $Y_{k,n}(t)$ в пространстве линейных ограниченных операторов.

Таким образом, к $t^kY_{k,n}(t)$ можно применить преобразование Лапласа. Обозначим

$$F_{k,n}(\lambda)=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}t^kY_{k,n}(t)\;dt\,,\quad \mathrm{Re}\lambda>\omega_1\,, \tag{10}$$

при этом в силу дифференцируемости $Y_{k,n}(t)$ справедлива формула обращения

$$t^kY_{k,n}(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{\lambda t}F_{k,n}(\lambda)\;d\lambda\,,\quad \sigma>\omega_1\,. \tag{11}$$

Лемма 2. *Для любого $x\in D(A)$ существует сильный предел последовательности $Y_{k,n}(t)$, и справедливо равенство*

$$\lim_{n\to\infty}t^kY_{k,n}(t)x=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{\lambda t}F_k(\lambda)x\,d\lambda\,,\quad \sigma>\omega_1\,. \tag{12}$$

□ Докажем вначале, что интеграл

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{\lambda t}F_k(\lambda)x\;d\lambda \tag{13}$$

имеет смысл для $x\in D(A)$. Действительно, используя формулу представления полугруппы через резольвенту, будем иметь

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{\lambda t}F_k(\lambda)x\;d\lambda=\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{\lambda t}\left(\frac{x}{\lambda^{k+1}}+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\lambda}{\mu(\lambda^2-\mu)^{1+k/2}}R(\mu)Ax\;d\mu\right)d\lambda\,.$$

Далее, оценим интеграл

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{\lambda t}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\lambda}{\mu(\lambda^2-\mu)^{1+k/2}}R(\mu)Ax\;d\mu\right)d\lambda,$$

учитывая очевидное неравенство $\dfrac{|\lambda|}{|\lambda^2-\mu|^{1+k/2}}\le\dfrac{C_0}{|\lambda|^{1+k}}$ справедливое для $\mathrm{Re}\lambda=\sigma$, $\mathrm{Re}\mu=\omega_1>\sigma$, при этом $|\lambda^2-\mu|>\delta>0$. Получим

$$\left\|\int_\Gamma\frac{\lambda}{\mu(\lambda^2-\mu)^{1+k/2}}R(\mu)Ax\;d\mu\right\|\le\frac{M||Ax||}{|\lambda|^{k+1}}\left(\int_{\Gamma_1}\frac{ds}{|\mu|(|\mu|+1)}+\int_{\Gamma_2}\frac{ds}{|\mu|(|\mu|+1)}\right)=$$

$$= \frac{2M||Ax||}{|\lambda|^{k+1}} \int_{\sigma_0}^{\infty} \frac{ds}{s(s+1)} = \frac{2M||Ax||}{|\lambda|^{k+1}} \ln\left(1+\frac{1}{\sigma_0}\right), \quad \sigma_0 > \omega_1 ,$$

следовательно,

$$\left\| \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t} F_k(\lambda) x \, d\lambda \right\| \le \frac{e^{\sigma t} M \ln\left(1+{\sigma_0}^{-1}\right) \|Ax\|}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{(\sigma^2+\tau^2)^{1/2+k/2}} =$$

$$= \frac{B(1/2, k/2) M e^{\sigma t} \ln\left(1+{\sigma_0}^{-1}\right) \|Ax\|}{\pi \sigma^k} ,$$

и рассматриваемый интеграл (13) существует.

Мы хотим показать, что для $x \in D(A)$ имеет место равенство (12). Отметим вначале, что справедливо равенство

$$F_{k,n}(\lambda) = \frac{\Gamma(k+1)}{(n+\lambda)^{k+1}} I + \frac{n^{k+2}}{(n+\lambda)^{k+2}} F_k\left(\frac{\lambda n}{n+\lambda}\right) . \tag{14}$$

Действительно, из (10) и (8) выводим

$$F_{k,n}(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} t^k Y_{k,n}(t) \, dt =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-(\lambda+n)t} \left(t^k \ I + \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{n^{k+2m+2}}{m! \ \Gamma(k+m+2)} \ t^{k+m+1} F_k^{(m)}(n) \right) \ dt =$$

$$= \frac{\Gamma(k+1)}{(n+\lambda)^{k+1}} \ I + \sum_{m=0}^{\infty} \left((-1)^m \frac{n^{k+2m+2}}{m! \ \Gamma(k+m+2)} \int_0^{\infty} t^{k+m+1} e^{-(\lambda+n)t} \ dt \ F_k^{(m)}(n) \right) =$$

$$= \frac{\Gamma(k+1)}{(n+\lambda)^{k+1}} \ I + \frac{n^{k+2}}{(n+\lambda)^{k+2}} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^m}{m!} \left(\frac{n^2}{n+\lambda} \right)^m F_k^{(m)}(n) \right) = \frac{\Gamma(k+1)}{(n+\lambda)^{k+1}} \ I +$$

$$+ \frac{n^{k+2}}{(n+\lambda)^{k+2}} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{m!} \left(\frac{\lambda n}{n+\lambda} - n \right)^m F_k^{(m)}(n) \right) = \frac{\Gamma(k+1)}{(n+\lambda)^{k+1}} \ I + \frac{n^{k+2}}{(n+\lambda)^{k+2}} \ F_k\left(\frac{\lambda n}{n+\lambda}\right) ,$$

что и доказывает (14).

При каждом λ : $\mathrm{Re}\lambda = \sigma > \omega_1$, из установленного соотношения (14) вытекает равенство

$$\lim_{n\to\infty} \left(F_{k,n}(\lambda) - \frac{\Gamma(k+1)}{(n+\lambda)^{k+1}} \ I \right) = F_k(\lambda). \tag{15}$$

Чтобы перейти к пределу под знаком интеграла в равенстве (11) покажем, что справедливо неравенство

$$\left\| F_{k,n}(\lambda) - \frac{\Gamma(k+1)}{(n+\lambda)^{k+1}} \ I \right\| \le \frac{M_1}{|\lambda|^{k+1}} , \quad k > 0 . \tag{16}$$

Для доказательства (16) воспользуемся представлением (14) и вытекающей из неравенства для резольвенты генератора аналитической полугруппы оценкой $\|F_k(\lambda)\| \leq \dfrac{M_0}{|\lambda|^{k+1}}$, $\mathrm{Re}\lambda > \omega_0 > 0, \quad k > 0$. Имеем

$$\left\| F_{k,n}(\lambda) - \frac{\Gamma(k+1)}{(n+\lambda)^{k+1}}\, I \right\| = \left\| \frac{n^{k+2}}{(n+\lambda)^{k+2}}\, F_k\left(\frac{\lambda n}{n+\lambda}\right) \right\| \leq M_0 \left|\frac{n}{n+\lambda}\right|^{k+2} \left|\frac{n+\lambda}{\lambda n}\right|^{k+1} \leq \frac{M_1}{|\lambda|^{k+1}},$$

что и доказывает (16).

Из (15), (16) следует, что при $x \in D(A)$ можно перейти к пределу под знаком интеграла в равенстве

$$t^k Y_{k,n}(t)x - t^k e^{-nt}x = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t}\left(F_{k,n}(\lambda) - \frac{\Gamma(k+1)}{(n+\lambda)^{k+1}}\, I\right) x\, d\lambda\,, \quad \sigma > \omega_1 > 0\,,$$

и мы приходим к равенству (12). ■

Как следует из неравенства (9), последовательность $Y_{k,n}(t)$ равномерно но n ограничена и но лемме 2 сильно сходится на плотном в E множестве $D(A)$. В силу теоремы Банаха-Штейнгауза уже для любого $x \in E$ существует предел

$$\lim_{n\to\infty} Y_{k,n}(t)x = Y_k(t)x. \tag{17}$$

При этом определяемая равенством (17) операторная функция $Y_k(t)$ обладает следующими свойствами:

$$Y_k(0) = I\,, \tag{18}$$

$$\|Y_k(t)\| \leq M_1\, e^{\omega_1 t}, \quad \omega_1 > \omega > 0\,. \tag{19}$$

Стало быть, к операторной функции $t^k Y_k(t)$ можно применить преобразование Лапласа и, учитывая (9), (14) и (19), из (10) получим

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} t^k Y_k(t)\, dt = F_k(\lambda), \quad \mathrm{Re}\lambda > \omega_1\,. \tag{20}$$

Лемма 3. *Равенство (12) справедливо для любого $x \in E$, если интеграл в правой части (12) существует.*

□ Действительно, если интеграл в правой части (12) существует, то положив $x_n = \dfrac{1}{\Gamma(k+1)} n^{k+1} F_k(n)x \in D(A)$, в силу леммы 2 получим

$$t^k Y_k(t)x_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t} F_k(\lambda)x_n\, d\lambda = \frac{n^{k+1}F_k(n)}{2\pi i\;\Gamma(k+1)}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t} F_k(\lambda)x\, d\lambda\,. \tag{21}$$

Учитывая лемму 1, после перехода к пределу в (21), получим требуемое утверждение. ■

Лемма 4. *Равенство* $AY_k(t)x = Y_k(t)Ax$ *справедливо для любого* $x \in D(A)$.

☐ Поскольку $F_k(n) = \Gamma(k+1)nR^{1+k/2}(n^2)$, то, очевидно, $F_k(n) \in D(A)$ и $AF_k(n)x = F_k(n)Ax$.

По индукции для $m = 1, 2, \ldots$ имеем $F_k^{(m)}(n) \in D(A)$ и $AF_k^{(m)}(n)x = F_k^{(m)}(n)Ax$. Следовательно, из (8) следует, что $Y_{k,n}(t)x \in D(A)$ и $AY_{k,n}(t)x = Y_{k,n}(t)Ax$, и, в силу замкнутости оператора A, получаем требуемое утверждение. ■

Лемма 5. *Для определяемой равенствами (17), (8) операторной функции* $Y_k(t)$ *справедливо соотношение*

$$k\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^t s^{k-1}Y_k(s)\, dsdt = \frac{\Gamma(k+1)}{\lambda}R^{k/2}(\lambda^2)\,, \quad \mathrm{Re}\lambda > \omega_1\,.$$

☐ Свойства изображение интеграла и интегрирование изображения для преобразования Лапласа, а также соотношение (20) позволяют записать равенства

$$k\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^t s^{k-1}Y_k(s)\, ds\, dt = \frac{k}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda t}t^{k-1}Y_k(t)\, dt = \frac{k}{\lambda}\int_\lambda^\infty F_k(z)\, dz =$$

$$= \frac{k\,\Gamma(k+1)}{\lambda}\int_\lambda^\infty zR^{1+k/2}(z^2)\, dz = \frac{k\,\Gamma(k+1)}{2\lambda}\int_{\lambda^2}^\infty R^{1+k/2}(\zeta)\, d\zeta =$$

$$= -\frac{\Gamma(k+1)}{\lambda}R^{k/2}(\zeta)\Big|_{\lambda^2}^\infty = \frac{\Gamma(k+1)}{\lambda}R^{k/2}(\lambda^2), \quad \mathrm{Re}\lambda > \omega_1. \qquad ■$$

Лемма 6. Пусть $x \in D(A)$, тогда для определяемой равенствами (17), (8) операторной функции $Y_k(t)$ справедливо соотношение

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}t^kY_k(t)Ax\, dt = \lambda^2F_k(\lambda)x - \Gamma(k+1)\lambda R^{k/2}(\lambda^2)x, \quad \mathrm{Re}\lambda > \omega_1\,.$$

☐ В силу леммы 4 и равенства (20) имеем

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}t^kAY_k(t)x\, dt = F_k(\lambda)Ax = \Gamma(k+1)\lambda R^{1+k/2}(\lambda^2)Ax =$$

$$= -\Gamma(k+1)\left(\lambda R^{k/2}(\lambda^2)R(\lambda^2)(-\lambda^2I + \lambda^2I - A\right)x = \lambda^2F_k(\lambda)x - \Gamma(k+1)\lambda R^{k/2}(\lambda^2)x. \qquad ■$$

Следующая лемма 7 является непосредственным следствием лемм 3, 5 и 6.

Лемма 7. *Пусть* $x \in D(A)$, *тогда для определяемой равенствами (17), (8) операторной функции* $Y_k(t)$ *справедливо соотношение*

$$\int_0^t\int_0^\tau s^kY_k(s)Ax\, ds\, d\tau = t^kY_k(t)x - k\int_0^t s^{k-1}Y_k(s)x\, ds. \qquad (22)$$

□ Действительно, в силу леммы 6 справедливо равенство

$$\frac{1}{\lambda^2}\int_0^\infty e^{-\lambda t}t^k AY_k(t)x\,dt + \frac{\Gamma(k+1)}{\lambda}R^{k/2}(\lambda^2)x = F_k(\lambda)x, \quad \mathrm{Re}\lambda > \omega_1,$$

из которого, учитывая леммы 3 и 5, выводим требуемое соотношение (22). ■

С помощью доказанных лемм 1 – 7 установим достаточное условие равномерной корректности задачи (1), (2). Напомним, что требования, обеспечивающие равномерную корректность, приведены в определении 2.

Теорема 2. *Пусть $A \in G$ и выполнены оценки (6). Тогда задача (1), (2) равномерно корректна и при этом ОФБ $Y_k(t)$ определяется равенствами (17), (8), в частности, на элементах из области определения оператора A она имеет вид*

$$Y_k(t)u_0 = \frac{\Gamma(k+1)}{2\pi i\; t^k}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t}\lambda R^{1+k/2}(\lambda^2)u_0\,d\lambda\,, \quad u_0 \in D(A)\,, \quad \sigma > \omega\,. \tag{23}$$

□ Нам осталось проверить, что построенная с помощью равенств (17), (8) операторная функция $Y_k(t)$, удовлетворяет всем требованиям определения 2.

Из установленного в лемме 7 равенства (22) выводим равенства

$$\int_0^t s^k Y_k(s)Au_0\,ds \; = t^k Y_k'(t)u_0\,, \tag{24}$$

$$t^k Y_k(t)Au_0 = kt^{k-1}Y_k'(t)u_0 + t^k Y_k''(t)u_0\,,$$

следовательно, $Y_k(t)u_0$ удовлетворяет уравнению (1). Равенство (18) обеспечивает выполнение начального условия (2). Единственность же построенного решения задачи (1), (2) фактически доказана в теореме 1 [7], если положить $w(t,s) = f\left(Y_k(s)\left(u_1(t) - u_2(t)\right)\right)$.

Операторная функция $Y_k(t)$ коммутирует с оператором A (лемма 4). Ее оценка вида (3) установлена в (19), а оценка вида (4) вытекает из (24) и (19).

Таким образом, операторная функция $Y_k(t)$ является ОФБ для задачи (1), (2), а задача (1), (2) равномерно корректна. Завершая доказательство теоремы, укажем, что равенство (23) установлено в лемме 2. ■

Доказанные теоремы 1 и 2 объединяются в следующий критерий.

Теорема 3 (критерий равномерной корректности). *Пусть оператор A является генератором аналитической C_0-полугруппы. Для того чтобы задача (1), (2) была равномерно корректной, необходимо и достаточно, чтобы при некоторых постоянных $M \geq 1$, $\omega \geq 0$ число λ^2 с $Re\lambda > \omega$ принадлежало резольвентному множеству оператора A и для дробной степени резольвенты оператора A были выполнены оценки*

$$\left\|\frac{d^n}{d\lambda^n}\left(\lambda R^{1+k/2}\left(\lambda^2\right)\right)\right\| \leq \frac{M\;\Gamma(k+n+1)}{(\mathrm{Re}\lambda-\omega)^{k+n+1}}, \quad n = 0,\ 1,\ 2, \ldots\,. \tag{25}$$

Установим далее еще некоторые свойства ОФБ $Y_k(t)$.

Лемма 8. *Пусть $u_0 \in D(A)$, тогда для операторной функции $Y_k(t)$ справедливо соотношение*

$$Y_k'(t)u_0 = \frac{t}{k+1}Y_{k+2}(t)Au_0\,, \tag{26}$$

$\square$ Пусть $u_0 \in D(A^2)$, тогда, учитывая (24), непосредственной проверкой убеждаемся в том, что функция $h(t) = \dfrac{1}{t}Y_k'(t)u_0$ является решением уравнения

$$h''(t) + \frac{k+2}{t}h'(t) = Ah(t)\,, \quad t > 0\,, \tag{27}$$

и удовлетворяет начальным условиям

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}Y_k'(t)u_0 = \frac{1}{k+1}Au_0\,, \quad \lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t}Y_k'(t)u_0\right)' = 0\,, \quad u_0 \in D(A)\,. \tag{28}$$

Действительно,

$$h'(t) = \frac{1}{t}Y_k(t)Au_0 - \frac{k+1}{t^{k+2}}\int_0^t s^kY_k(s)Au_0\,ds\,, \tag{29}$$

$$h''(t) = \frac{1}{t}Y_k'(t)Au_0 - \frac{2k+2}{t^2}Y_k(t)Au_0 - \frac{(k+1)(k+2)}{t^{k+3}}\int_0^t s^kY_k(s)Au_0\,ds\,, \tag{30}$$

и из (29), (30) выводим (27).

Первое из равенств (28) очевидно, в силу (24). А второе вытекает из (29), поскольку

$$h'(0) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t^{k+2}}\left(t^{k+1}Y_k(t)Au_0 - (k+1)\int_0^t s^kY_k(s)Au_0\;ds\right) = \lim_{t\to 0}\frac{Y_k'(t)Au_0}{k+2} = 0\,.$$

На основании теоремы о единственности решения задачи Коши для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу, мы приходим к равенству (26), которое справедливо пока для $u_0 \in D(A^2)$.

Если $u_0 \in D(A)$, то, применяя доказанное утверждение к элементу $w_0 = R(\mu^2)u_0$, $\mu > \omega$, мы установим справедливость равенства (26) уже для $u_0 \in D(A)$.

Отметим также, что из (26) вытекает и равенство

$$\lim_{t\to 0}Y_k''(t)u_0 = \frac{1}{k+1}Au_0\,,\ u_0 \in D(A)\,. \qquad \blacksquare$$

Теорема 4. *Пусть задача (1), (2) равномерно корректна и $Y_k(t)$ является соответствующей ОФБ. Тогда имеет место равенство*

$$Y_k(t)Y_k(s) = T_s^tY_k(s)\,,$$

где оператор обобщённого сдвига T_s^t, соответствующий уравнению (1), определяется равенством (см. [9])

$$T_s^tH(s) = \frac{1}{B(k/2,1/2)}\int_0^\pi H\left(\sqrt{s^2+t^2-2st\cos\varphi}\right)\sin^{k-1}\varphi\,d\varphi\,.$$

□ Введем в рассмотрение функцию двух переменных $w(t,s) = f\left(Y_k(t)Y_k(s)u_0\right)$, где $f \in E^*$ (E^* — сопряженное пространство), $t, s \geq 0$. Она, очевидно, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{k}{t}\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{k}{s}\frac{\partial w}{\partial s}\,, \quad t, s > 0$$

и условиям

$$w(0,s) = f\left(Y_k(s)u_0\right)\,, \quad \frac{\partial w(0,s)}{\partial t} = 0\,.$$

Полученная задача в классе дважды непрерывно дифференцируемых при $t, s \geq 0$ функций рассматривалась в [9] (§5, п.2). Из установленной в [9] явной формулы для решения указанной задачи получаем $w(t,s) = T_s^t f\left(Y_k(s)u_0\right) = f\left(T_s^t Y_k(s)u_0\right)$, откуда, в силу произвольности $f \in E^*$ и вытекает требуемое равенство. ■

Литература

1. Fattorini H.O. Ordinary differential equations in linear topological space, II // J. Different. Equat. – 1969. – 6. – P.50-70.
2. Sova M. Cosine operator functions // Rozpr. mat. – 1966. – № 49. – P.1-47.
3. Da Prato G., Giusti E. Una caratterizzazione dei generatori di funzioni coseno astratte // Boll. Union. Mat. Ital. – 1967. – №22. – P.357-362.
4. Голдстейн Дж. Полугруппы линейных операторов и их приложения / Киев: Выща школа, 1989. bibitemУКР Васильев В.В., Крейн С.Г., Пискарев С.И. Полугруппы операторов, косинус-оператор функции и линейные дифференциальные уравнения // Итоги науки и техники. Серия Математический анализ. – М.: ВИНИТИ, 1990. – Т.28. – С.87-202.
5. Васильев В.В., Пискарев С.И. Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве II. Теория косинус оператор-функций // http://www.srcc.msu.su/nivc/english/about/home_pages/piskarev/obz2ru.pdf
6. Глушак А.В. Операторная функция Бесселя // Доклады РАН. – 1997. – 352, №5. – С.587-589.
7. Глушак А.В., Покручин О.А. Необходимое условие разрешимости задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу // Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика. – 2012. – №11(130). Вып. 27. – С.29-37.
8. Da Prato G., Iannelli M. Linear integro-differential equations in banach spaces // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova / 1980. – 62. – P.207-219.
9. Левитан Б.М. Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // УМН. – 1951. – 1, Вып.2(42). – С. 102 – 143.

SUFFICIENT CONDITION OF THE CAUCHY PROBLEM SOLVABILITY OF ABSTRACT EULER-POISSON-DARBOUX EQUATION

A.V. Glushak, O.A. Pokruchin

Belgorod State University,
Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail:
Glushak@bsu.edu.ru, pokru4in.oleg@yandex.ru

Abstract. The sufficient condition of the Cauchy problem solvability of abstract Euler-Poisson-Darboux equation is proved.

Key words: abstract Cauchy problem, Euler-Poisson-Darboux's equation, operator Bessel function, sufficient condition of solvability.