MSC 35L70

ЯВНЫЙ ВИД РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ АНАЛОГА УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Х.Г. Умаров

Чеченский государственный университет,
ул. Шерипова, 32, Грозный, 364907, Россия, e-mail: umarov50@mail.ru

Аннотация. Явный вид решения начально-краевой задачи в банаховом пространстве для абстрактного уравнения теплопроводности с операторным коэффициентом получен по классической схеме с применением операторнозначного аналога фундаментального решения. Абстрактные рассмотрения иллюстрируются в пространстве непрерывных функций на неотрицательной полуоси, для которых существует предел на бесконечности.

Ключевые слова: сильно непрерывные полугруппы операторов, уравнения в частных производных, банахово пространство.

1. Постановка абстрактной начально-краевой задачи. В банаховом пространстве E рассмотрим аналог уравнения теплопроводности:

$$BV_t = V_{yy} + F, \quad 0 < t \le T < +\infty, y \in R^1_+ =]0, +\infty[\ , \tag{1}$$

в котором оператор $-B$ является производящим оператором [1, с. 58] сильно непрерывной полугруппы класса C_0 с неположительным типом: $\|U(t; -B)\| \le M\exp(-\beta t)$, $\beta \ge 0$, $t \ge 0$, а $F(y,t)$ — заданная функция со значениями в E.

Решение $V = V(y,t)$ уравнения (1) ищется непрерывным при $(y,t) \in \bar{R}^1_+ \times [0,T]$, $\bar{R}^1_+ = [0, +\infty[$ и непрерывно дифференцируемым при $(y,t) \in R^1_+ \times]0,T]$ по переменной t один раз, а по переменной y два раза. Кроме того, полагаем, что при $(x,t) \in R^1_+ \times]0,T]$ значения решения V и ее частной производной V_t принадлежат области определения $\mathcal{D}(B)$ оператора B.

Под первой краевой (смешанной) задачей для уравнения (1) будем понимать, как и в классическом случае, задачу нахождения решения, удовлетворяющего начальному и краевому условиям:

$$V|_{t=0} = \Phi(y), \quad y \in \bar{R}^1_+, \tag{2}$$

$$V|_{y=0} = \mathcal{M}(t), \quad t \in [0,T], \tag{3}$$

где $\Phi(y)$ и $\mathcal{M}(t)$ — заданные функции со значениями в банаховом пространстве E, подчиненные естественному условию согласования $\Phi(0) = \mathcal{M}(0)$.

Уравнение (1) является псевдопараболическим уравнением соболевского типа не разрешенным относительно производной по временной переменной t. Исследованию

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 13-01-00422-а.

абстрактных псевдопараболических уравнений $BV_t + AV = F$, где A, B — операторы, действующие в банаховом пространстве E, посвящено большое количество работ (см., например, обзор и подробную библиографию, приведенную в монографии [2]), в которых чаще всего рассматриваются вопросы глобальной во времени разрешимости и разрушения решений.

Наша цель, по классической схеме, с применением операторнозначного аналога фундаментального решения, получить явный вид решения первой краевой задачи (1)-(3), т.е. найти интегральное представление решения уравнения (1) через начальную (2) и граничную (3) функции.

В зависимости от того отрицательный или равный нулю тип полугруппы $U(t;-B)$, порождаемой оператором $-B$, будем обозначать уравнение (1) соответственно (1_-) или (1_0). Вначале рассматривается первая краевая задача (1_-)-(3) для случая экспоненциального убывания нормы полугруппы, порождаемой оператором $-B$. В этом случае существует ограниченный обратный оператор B^{-1} и, значит, абстрактное дифференциальное уравнение (1_-) допускает разрешение относительно производной по времени. Далее предполагается, что тип $\beta = 0$ и рассматривается уравнение (1_0), не допускающее разрешение относительно производной по времени. Решение первой краевой задачи для уравнения (1_0), в котором оператор $-B$ порождает полугруппу с нулевым типом, строится как предел при $\delta \to 0+$ решения вспомогательной первой краевой задачи для уравнения (1) с оператором $B_\delta = \delta I + B$ вместо B.

Все рассмотрения статьи иллюстрируются на примере оператора $B = -d/dx$ действующего в банаховом пространстве $C[0,+\infty] \equiv C\left(\overline{R}^1_+\right)$ непрерывных функций $\psi(x)$, для которых существует предел при $x \to +\infty$ и норма которого определяется по формуле $\|\psi(x)\|_{C\left(\overline{R}^1_+\right)} \equiv \|\psi(x)\|_C = \sup_{x\in\overline{R}^1_+} |\psi(x)|$. В пространстве $C\left(\overline{R}^1_+\right)$ дифференциальный оператор d/dx с областью определения

$$\mathcal{D}(d/dx) = \left\{ \psi(x) \in C\left(\overline{R}^1_+\right) : \psi'(x) \in C\left(\overline{R}^1_+\right)\right\}$$

является [3, с. 670] производящим оператором сжимающей сильно непрерывной полугруппы $U(t;d/dx)$ класса C_0 левых сдвигов: $U(t;d/dx)\psi(x) = \psi(x+t)$, $t \geq 0$.

2. Фундаментальное оператор - решение первой краевой задачи. Абстрактным фундаментальным оператор - решением первой краевой задачи для уравнения (1_-) в области изменения переменных $(\eta,\tau;y,t) : 0 \leq \tau < t, \quad \eta, y \in \bar{R}^1_+$, назовем операторнозначную функцию

$$G(\eta,\tau;y,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}}\left[U\left(\frac{(y-\eta)^2}{4(t-\tau)};-B\right) - U\left(\frac{(y+\eta)^2}{4(t-\tau)};-B\right)\right]B^{1/2}, \qquad (4)$$

где положительные дробные степени B^ν, $0 < \nu < 1$, определяются [1, с. 140] замыканием своего сужения на $\mathcal{D}(B)$ по формуле

$$B^\nu e = \frac{\sin \pi\nu}{\pi}\int_0^{+\infty} s^{\nu-1}(sI+B)^{-1}Be\,ds$$

или [4, с. 358] эквивалентной формулой

$$B^{\nu}e = \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \int_0^{+\infty} s^{-(1+\nu)} \left[U(s; -B)e - e\right] ds\,,$$

$0 < \nu < 1$, $e \in \mathcal{D}(B)$, где $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция. Если $k-1 \le \nu < k$, k — натуральное число, то для дробных степеней B^{ν} справедливо [5] представление

$$B^{\nu}e = \frac{1}{c_{\nu,k}} \int_0^{+\infty} \xi^{-(1+\nu)} \left[I - U(\xi; -B)\right]^k e\, d\xi\,,$$

$e \in \mathcal{D}\left(B^k\right)$, где

$$c_{\nu,k} = \int_0^{+\infty} [1 - \exp(-\xi)]^k \xi^{-(1+\nu)} d\xi\,.$$

На протяжении статьи будем пользоваться, вытекающими из приведенных определений соотношениями

$$B^{k+1/2}e = B^k B^{1/2}e = (2\sqrt{\pi})^{-1} \int_0^{+\infty} \xi^{-3/2} \left[I - U(\xi; -B)\right] B^k e\, d\xi\,,$$

$e \in \mathcal{D}\left(B^{k+1}\right)$, и, в частности, при $E = C\left(\overline{R}^1_+\right)$, $B = -d/dx$, дробная производная $(-d/dx)^{1/2}$ представляется [6, с. 95-97] через правостороннюю дробную производную Маршо $\mathbf{D}^{1/2}_{-}$ на полуоси:

$$\left(-\frac{d}{dx}\right)^{1/2} \psi(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \left[\psi(x) - \psi(x+\xi)\right] \frac{d\xi}{\xi\sqrt{\xi}} = \mathbf{D}^{1/2}_{-}(\psi(x))\,, \tag{5}$$

для $\psi(x) \in \mathcal{D}(d/dx)$.

Непосредственно из определения (4) следует:

1) если $e \in \mathcal{D}\left(B^{1/2}\right)$, то в области $\tau < t$, $\eta, y \in \overline{R}^1_+$ справедлива оценка нормы

$$\|G(\eta,\tau;y,t)e\| \le \frac{M\left\|B^{1/2}e\right\|}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} \left[1 + M\exp\left(-\beta\frac{y\eta}{t-\tau}\right)\right] \exp\left[-\beta\frac{(y-\eta)^2}{4(t-\tau)}\right]\,;$$

2) $G(\eta,\tau;y,t)e|_{\eta=0} = 0$ при $e \in \mathcal{D}\left(B^{1/2}\right)$;

3) $G(\eta,\tau;y,t)e \to 0$ при $e \in \mathcal{D}\left(B^{1/2}\right)$, $y \ne \eta$ и $\tau \to t$;

4) если $e \in \mathcal{D}\left(B^{3/2}\right)$, то имеет место представление

$$G(\eta,\tau;y,t)e = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} U\left(\frac{(y-\eta)^2}{4(t-\tau)}; -B\right) \int_0^{y\eta/(t-\tau)} U(s;-B)B^{3/2}e\, ds$$

и оценка нормы

$$\|G(\eta,\tau;y,t)e\| \le \frac{M\left\|B^{3/2}e\right\|}{2\beta\sqrt{\pi(t-\tau)}}\left[1-\exp\left(-\beta\frac{y\eta}{t-\tau}\right)\right]\ \exp\left[-\beta\frac{(y-\eta)^2}{4(t-\tau)}\right],$$

$\tau < t\,,\ \eta, y \in R^1_+$.

5) функция $Ge = G(\eta,\tau;y,t)\,e$, при $e \in \mathcal{D}\left(B^{5/2}\right)$, по переменным (η,τ) удовлетворяет уравнению $B\partial Ge/\partial\tau + \partial^2 Ge/\partial\eta^2 = 0$, а по переменным (y,t) — однородному уравнению соответствующему (1_-);

6) для любого элемента $e \in E$ выполняется равенство

$$B^{1/2}\int_0^{+\infty} G(\eta,\tau;y,t)\,B^{-1/2}ed\eta = \frac{1}{\sqrt{\pi}}B^{1/2}\int_0^{y^2/(4(t-\tau))} U(s;-B)e\,\frac{ds}{\sqrt{s}}, \quad \tau<t,\ y\in R^1_+, \tag{6}$$

где отрицательные дробные степени $B^{-\nu}$, если тип полугруппы $U(\cdot;-B)$ — отрицательный, вычисляются [7, с. 275] по формуле

$$B^{-\nu} = \frac{\sin\nu\pi}{\pi}\int_0^{+\infty} s^{-\nu}(sI+B)^{-1}ds\,,$$

$0<\nu<1$, и для них справедливо интегральное представление [7, с. 297] через полугруппу $U(t;-B)$:

$$B^{-\nu} = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^{+\infty} s^{\nu-1}U(t;-B)\,ds\,, \quad \nu>0. \tag{7}$$

Из равенства (6), в силу формулы (7), для любого элемента $e\in E$ вытекает предельное соотношение

$$\lim_{\tau\to t-0} B^{1/2}\int_0^{+\infty} G(\eta,\tau;y,t)\,B^{-1/2}ed\eta \ = e\,.$$

3. Теоремы существования и единственности решения задачи с оператором B, порождающим полугруппу с отрицательным типом. Сначала рассмотрим теорему единственности:

Теорема 1. *Пусть решение $V(y,t)$ первой краевой задачи (1_-)-(3) удовлетворяет условиям:*

$$\|V(y,t)\| \le \lambda(t)\exp\left(qy^2\right), \quad (y,t)\in \bar{R}^1_+\times[0,T]\,;$$

$$\|V_y(y,t)\| \le \frac{\lambda_1(t)}{y^\delta\sqrt{t}}\exp\left(qy^2\right), \quad \delta<1,\ q=\text{const}<\frac{\beta}{4T},\ (y,t)\in R^1_+\times]0,T]\,,$$

в которых $\lambda(t)$, $\lambda_1(t)$, $t\in[0,T]$ — непрерывные функции. Тогда в каждой точке $(y,t)\in R^1_+\times]0,T]$ имеет место формула

$$V\left(y,t\right)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}B^{1/2}\int_{0}^{+\infty}U\left(\frac{\left(y-\eta\right)^{2}}{4t};-B\right)\left[I-U\left(\frac{y\eta}{t};-B\right)\right]\Phi\left(\eta\right)d\eta+$$

$$+\frac{y}{2\sqrt{\pi}}B^{1/2}\int_{0}^{t}U\left(\frac{y^{2}}{4\left(t-\tau\right)};-B\right)\mathcal{M}\left(\tau\right)\frac{d\tau}{\left(t-\tau\right)^{3/2}}+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}B^{-1/2}\int_{0}^{t}\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_{0}^{+\infty}U\left(\frac{\left(y-\eta\right)^{2}}{4\left(t-\tau\right)};-B\right)\left[I-U\left(\frac{y\eta}{t-\tau};-B\right)\right]F\left(\eta,\tau\right)d\eta\,. \quad (8)$$

□ Пусть (y,t) — произвольная фиксированная точка множества $R_{+}^{1}\times]0,T]$ плоскости (η,τ), а s — достаточно большое число, причем $1/s<y<s$. На плоскости (η,τ) выделим прямоугольник Q_s со сторонами $\{1/s\le\eta\le s,\tau=1/s\}$, $\{\eta=s,1/s\le\tau\le t-1/s\}$, $\{1/s\le\eta\le s,\tau=t-1/s\}$, $\{\eta=1/s,1/s\le\tau\le t-1/s\}$ и рассмотрим в нем тождество

$$\left\{BG_{\tau}+G_{\eta\eta}\right\}B^{-3/2}V+GB^{-3/2}\left\{BV_{\tau}-V_{\eta\eta}\right\}=GB^{-3/2}F\,, \quad (9)$$

где $G=G\left(\eta,\tau;y,t\right)$ — фундаментальное оператор - решение (4), а $V=V\left(\eta,\tau\right)$ — решение смешанной задачи (1_{-})–(3).

Проинтегрируем обе части тождества (9) по области Q_s, предварительно представив левую часть (9) в виде дивергенции, тогда получим

$$\left\{\int_{1/s}^{t-1/s}\left[G_{\eta}\left(s,\tau;y,t\right)B^{-3/2}V\left(s,\tau\right)-G\left(s,\tau;y,t\right)B^{-3/2}V_{\eta}\left(s,\tau\right)\right]d\tau+\right.$$

$$\left.+\int_{1/s}^{t-1/s}G\left(\frac{1}{s},\tau;y,t\right)B^{-3/2}V_{\eta}\left(\frac{1}{s},\tau\right)d\tau\right\}+\int_{1/s}^{s}G\left(\eta,t-\frac{1}{s};y,t\right)B^{-1/2}V\left(\eta,t-\frac{1}{s}\right)d\eta-$$

$$-\left\{\int_{1/s}^{t-1/s}G_{\eta}\left(\frac{1}{s},\tau;y,t\right)B^{-3/2}V\left(\frac{1}{s},\tau\right)d\tau+\int_{1/s}^{s}G\left(\eta,\frac{1}{s};y,t\right)B^{-1/2}V\left(\eta,\frac{1}{s}\right)d\eta\right\}=$$

$$=\int_{1/s}^{t-1/s}\int_{1/s}^{s}G\left(\eta,\tau;y,t\right)B^{-3/2}F\left(\eta,\tau\right)d\eta d\tau. \quad (10)$$

Сумма интегралов в первой фигурной скобке в левой части (10) стремится к нулю при $s\to+\infty$, так как норма первого интеграла этой суммы оценивается выражением

$$\frac{M\left(1+M\right)}{2\sqrt{\pi}}E_{q}\left(T,y\right)\int_{0}^{t}\left[\lambda\left(\tau\right)+s^{-2-\delta}\frac{M}{\beta}\frac{\lambda_{1}\left(\tau\right)}{\sqrt{\tau}}\right]d\tau\;s^{5/2}\exp\left(-\frac{\left(s\beta_{q}\left(T\right)-\beta y\right)^{2}}{4T\beta_{q}\left(T\right)}\right),$$

где $E_q(t,y) = \exp\left(q\beta y^2/\beta_q(t)\right)$, $\beta_q(t) = \beta - 4qt$, а для нормы второго интеграла мажорантой будет

$$s^{\delta-1}\frac{yM}{(y-1/s)\sqrt{\beta t}}\exp\left(-\beta\frac{(y-1/s)^2}{4t}\right)\max_{\tau\in[0,t]}\lambda_1(\tau).$$

В интегралах из второй фигурной скобки в левой части (10) у подынтегральных функций если и есть особенности при $s\to+\infty$, то они устранимые, поэтому

$$\lim_{s\to+\infty}\int_{1/s}^{t-1/s}G_\eta\left(\frac{1}{s},\tau;y,t\right)B^{-3/2}V\left(\frac{1}{s},\tau\right)d\tau = \int_0^t G_\eta(0,\tau;y,t)\,B^{-3/2}V(0,\tau)\,d\tau$$

и

$$\lim_{s\to+\infty}\int_{1/s}^{s}G\left(\eta,\frac{1}{s};y,t\right)B^{-1/2}V\left(\eta,\frac{1}{s}\right)d\eta = \int_0^{+\infty}G(\eta,0;y,t)\,B^{-1/2}V(\eta,0)\,d\eta.$$

Предел интеграла вне фигурных скобок в левой части (10) равен $B^{-1/2}V(y,t)$. Это следует, учитывая формулу (6), из малости для достаточно больших s нормы разности:

$$\left\|\int_{1/s}^{s}G\left(\eta,t-\frac{1}{s};y,t\right)B^{-1/2}V\left(\eta,t-\frac{1}{s}\right)d\eta - B^{-1/2}V(y,t)\right\| \le$$

$$\le \frac{M}{\sqrt{\pi}}\left\{\lambda(t)\exp\left(qy^2\right)\int_{sy^2/4}^{+\infty}\exp(-\beta r)\frac{dr}{\sqrt{r}}+\right.$$

$$+\frac{M(1+M)}{\sqrt{\beta}}\max_{|\eta|\le\eta_0}\left\|V\left(y+\frac{2}{\sqrt{s}}\eta,t-\frac{1}{s}\right)-V(y,t)\right\|+$$

$$+(1+M)\left\{\lambda\left(t-\frac{1}{s}\right)\exp\left(\frac{\beta q y^2}{\beta-4q/s}\right)\times\right.$$

$$\times\left(\int_{-\infty}^{-\eta_0}+\int_{\eta_0}^{+\infty}\right)\exp\left[-\left(\eta\sqrt{\beta-\frac{4q}{s}}-\frac{2qy}{\sqrt{\beta s-4q}}\right)^2\right]d\eta+$$

$$\left.\left.+\lambda(t)\exp\left(qy^2\right)\left(\int_{-\infty}^{-\eta_0}+\int_{-\infty}^{(1/s-y)\sqrt{s}/2}+\int_{(s-y)\sqrt{s}/2}^{+\infty}+\int_{\eta_0}^{+\infty}\right)\exp\left(-\beta\eta^2\right)d\eta\right\}\right\},$$

где η_0 — достаточно большое положительное число.

Итак, переходя в обеих частях тождества (10) к пределу при $s\to+\infty$, в каждой точке $(y,t)\in R_+^1\times\,]0,T]$, получим

$$B^{-1/2}V(y,t)=\int_0^{+\infty}G(\eta,0;y,t)\,B^{-1/2}V(\eta,0)\,d\eta+\int_0^{t}G_\eta(0,\tau;y,t)\,B^{-3/2}V(0,\tau)\,d\tau+$$

$$+B^{-1}\int_0^{t}\int_0^{+\infty}G(\eta,\tau;y,t)\,B^{-1/2}F(\eta,\tau)\,d\eta d\tau.$$

Откуда и следует формула (8). ■

Теперь выясним, каким условиям достаточно подчинить начальную $\Phi(y)$ и граничную $\mathcal{M}(t)$ функции и свободный член $F(y,t)$ чтобы формула (8) давала решение первой краевой задачи (1_{-}) -(3).

Теорема 2. *Пусть значения начальной $\Phi(y)$ и граничной $\mathcal{M}(t)$ функций принадлежат множеству $\mathcal{D}\left(B^{5/2}\right)$, а значения $F(y,t)\in\mathcal{D}\left(B^{3/2}\right)$, $F_y(y,t)\in\mathcal{D}\left(B^{1/2}\right)$, и справедливы оценки норм непрерывных функций*

$$\left\|B^{5/2}\Phi(y)\right\|\le K\exp\left(hy^2\right),\quad K=\mathrm{const},\quad y\in\bar{R}^1_+,\quad h=\mathrm{const}<\beta\;/4T;$$

$$\left\|B^{5/2}\mathcal{M}(t)\right\|\le\lambda(t),\quad t\in[0,T];$$

$$\left\|B^{3/2}F(y,t)\right\|,\quad\left\|B^{1/2}F_y(y,t)\right\|\le\Lambda(t)\exp\left(hy^2\right),\quad(y,t)\in\bar{R}^1_+\times[0,T],$$

в которых $\lambda(t)$, $\Lambda(t)$ — непрерывные на $[0,T]$ функции, тогда решение первой краевой задачи (1_{-}) - (3) в каждой точке $(y,t)\in R^1_+\times\,]0,T]$ дается формулой (8) и для него справедлива оценка нормы

$$\|V(y,t)\|\le\frac{M^3}{\beta^2\sqrt{\beta_h(t)}}\left[K+\int_0^t\Lambda(\tau)\,d\tau\right]E_h(t,y)+\frac{M^3}{\beta^{5/2}}\lambda_t\le$$

$$\le\frac{M^3}{\beta^2\sqrt{\beta_h(T)}}\left[K+\int_0^T\Lambda(\tau)\,d\tau\right]E_h(T,y)+\frac{M^3}{\beta^{5/2}}\lambda_T,\qquad(11)$$

в которой $\lambda_t=\max_{\tau\in[0,t]}\lambda(\tau)$.

□ Оценка (15) нормы функции (8) выводится из неравенства

$$\|V(y,t)\|\le\frac{M^3 2\lambda_t}{\beta^2\sqrt{\pi}}\int_{y/(2\sqrt{t})}^{+\infty}\exp\left(-\beta\tau^2\right)d\tau+$$

$$+\frac{M^2(1+M)}{\beta\sqrt{\pi}}\exp\left(hy^2\right)\left[\frac{MK}{\beta}+\int_0^t\Lambda(\tau)\,d\tau\right]\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-(\beta-4th)\,\eta^2+4hy\sqrt{t}\eta\right]d\eta,$$

используя значения табличных интегралов [8, с. 321].

Покажем, что функция (8) удовлетворяет уравнению (1_{-}). Для этого, в силу пятого свойства в вышеприведенном списке свойств фундаментального оператор - решения (4), достаточно проверить, что условия теоремы 2 обеспечивают возможность вычисления частных производных функции $V(y,t)$ дифференцированием под знаком интеграла. А это следует, применяя вспомогательную оценку

$$\int_0^{+\infty} s^m \exp\left(-ar^2+2br\right)dr \le \frac{2^{m-1}}{a^{(m+1)/2}}\left[\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)+\sqrt{\pi}\left(\frac{b^2}{a}\right)^{m/2}\right]\exp\left(\frac{b^2}{a}\right), \quad a>0,$$

из соотношений

1^0) для нормы частной производной по переменной y

$$\|V_y(y,t)\| =$$

$$= \left\| -\frac{1}{4\sqrt{\pi}t^{3/2}}\int_0^{+\infty}(y+\eta)\,U\left(\frac{(y-\eta)^2}{4t};-B\right)\left[\frac{y-\eta}{y+\eta}+U\left(\frac{y\eta}{t};-B\right)\right]B^{3/2}\Phi(\eta)\,d\eta + \right.$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t U\left(\frac{y^2}{4(t-\tau)};-B\right)B^{1/2}\mathcal{M}(\tau)\frac{d\tau}{(t-\tau)^{3/2}} -$$
$$-\frac{y^2}{4\sqrt{\pi}}\int_0^t U\left(\frac{y^2}{4(t-\tau)};-B\right)B^{3/2}\mathcal{M}(\tau)\frac{d\tau}{(t-\tau)^{5/2}} +$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{d\tau}{t-\tau}\int_0^{+\infty}d\eta\int_{\frac{(y-\eta)^2}{4(t-\tau)}}^{\frac{(y+\eta)^2}{4(t-\tau)}}\left[\frac{1}{2\sqrt{s}}U(s;-B)\,B^{1/2}F(\eta,\tau) - \right.$$
$$\left.\left. -\sqrt{s}U(s;-B)\,B^{3/2}F(\eta,\tau)\right]ds\right\| \le$$

$$\le \frac{M^2(1+M)K}{t\beta\sqrt{\pi}\beta_h(t)}\left[\frac{\beta\sqrt{\pi}}{\sqrt{\beta_h(t)}}+\frac{1}{2}\sqrt{t}\right]E_h(T,y) + \frac{M^2(1+M)}{\beta^{5/2}y}\lambda_t + \frac{4M}{\sqrt{\pi}\beta_h(t)}\int_0^t\Lambda(\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\times$$
$$\times\left\{\frac{M}{2\beta}\left(1+\frac{2hy\sqrt{\pi t}}{\sqrt{\beta_h(t)}}\right)+\frac{4}{\beta_h(t)}\left[1+\frac{8h^3y^3t\sqrt{\pi t}}{\beta_h(t)\sqrt{\beta_h(t)}}\right]\right\}E_h(T,y);$$

2^0) для нормы частной производной второго порядка по переменной y

$$\|V_{yy}(y,t)\| = \left\| -\frac{1}{4\sqrt{\pi}t^{3/2}}\int_0^{+\infty}U\left(\frac{(y-\eta)^2}{4t};-B\right)\left[I-U\left(\frac{y\eta}{t}\right)\right]B^{3/2}\Phi(\eta)\,d\eta + \right.$$

$$+\frac{1}{8\sqrt{\pi}t^{5/2}}\int_0^{+\infty}(y+\eta)^2U\left(\frac{(y-\eta)^2}{4t};-B\right)\left[\frac{(y-\eta)^2}{(y+\eta)^2}I-U\left(\frac{y\eta}{t}\right)\right]B^{5/2}\Phi(\eta)\,d\eta +$$

$$+\frac{y^3}{8\sqrt{\pi}}\int_0^t U\left(\frac{y^2}{4(t-\tau)};-B\right)B^{5/2}\mathcal{M}(\tau)\frac{d\tau}{(t-\tau)^{7/2}} -$$

$$
-\frac{3y}{4\sqrt{\pi}}\int_0^t U\left(\frac{y^2}{4(t-\tau)};-B\right)B^{3/2}\mathcal{M}(\tau)\frac{d\tau}{(t-\tau)^{5/2}}+
$$

$$
+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{d\tau}{t-\tau}\int_{-y/(2\sqrt{t-\tau})}^{+\infty}\left[U\left(\left(\eta+\frac{y}{\sqrt{t-\tau}}\right)^2;-B\right)B^{1/2}F\left(y+2\sqrt{t-\tau}\eta,\tau\right)-\right.
$$

$$
\left.-2\left(\eta+\frac{y}{\sqrt{t-\tau}}\right)^2U\left(\left(\eta+\frac{y}{\sqrt{t-\tau}}\right)^2;-B\right)B^{3/2}F\left(y+2\sqrt{t-\tau}\eta,\tau\right)\right]d\eta+
$$

$$
+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_{-y/(2\sqrt{t-\tau})}^{+\infty}\left[\eta U\left(\eta^2;-B\right)+\right.
$$

$$
\left.+\left(\eta+\frac{y}{\sqrt{t-\tau}}\right)U\left(\left(\eta+\frac{y}{\sqrt{t-\tau}}\right)^2;-B\right)\right]B^{1/2}F_y\left(y+2\sqrt{t-\tau}\eta,\tau\right)d\eta\Bigg\|\le
$$

$$
\le\frac{M}{\sqrt{\beta_h(t)}}\left\{\frac{(1+M)K}{t}\left\{\frac{M}{2\beta}+\frac{1}{t}\left[y^2+\frac{4y\sqrt{t}}{\sqrt{\beta_h(t)}}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}+\frac{2hy\sqrt{t}}{\sqrt{\beta_h(t)}}\right)+\right.\right.\right.
$$

$$
\left.\left.\left.+\frac{2t}{\beta_h(t)}\left(1+\frac{8h^2y^2t}{\beta_h(t)}\right)\right]\right\}\right\}E_h(T,y)+\frac{3M}{y}\left(1+\frac{M}{\beta y}\right)\lambda_t+
$$

$$
+\frac{M}{\beta_h(t)}\left[\left(\frac{2M}{\beta\sqrt{\pi}y}+3\right)\left(1+\frac{2hy\sqrt{\pi t}}{\sqrt{\beta_h(t)}}\right)+\frac{4}{\sqrt{\beta_h(t)}y}\left(1+\frac{8h^2y^2t}{\beta_h(t)}\right)\right]\int_0^t\Lambda(\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}E_h(T,y);
$$

3^0) для нормы частной производной по переменной t

$$
\|V_t(y,t)\|=\left\|-\frac{1}{4\sqrt{\pi}t^{3/2}}\int_0^{+\infty}U\left(\frac{(y-\eta)^2}{4t};-B\right)\left[I-U\left(\frac{y\eta}{t}\right)\right]B^{1/2}\Phi(\eta)\,d\eta+\right.
$$

$$
+\frac{1}{8\sqrt{\pi}t^{5/2}}\int_0^{+\infty}(y+\eta)^2U\left(\frac{(y-\eta)^2}{4t};-B\right)\left[\frac{(y-\eta)^2}{(y+\eta)^2}I-U\left(\frac{y\eta}{t}\right)\right]B^{3/2}\Phi(\eta)\,d\eta+
$$

$$
+\frac{y^3}{8\sqrt{\pi}}\int_0^t U\left(\frac{y^2}{4(t-\tau)};-B\right)B^{3/2}\mathcal{M}(\tau)\frac{d\tau}{(t-\tau)^{7/2}}-
$$

$$
-\frac{3y}{4\sqrt{\pi}}\int_0^t U\left(\frac{y^2}{4(t-\tau)};-B\right)B^{1/2}\mathcal{M}(\tau)\frac{d\tau}{(t-\tau)^{5/2}}+
$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}U\left(\eta^2;-B\right)B^{-1/2}F\left(y,t\right)d\eta-\frac{y}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{d\tau}{\left(t-\tau\right)^{3/2}}\times$$

$$\times\int_{-y/\left(2\sqrt{t-\tau}\right)}^{+\infty}\left(\eta+\frac{y}{\sqrt{t-\tau}}\right)U\left(\left(\eta+\frac{y}{\sqrt{t-\tau}}\right)^2;-B\right)B^{1/2}F\left(y+2\sqrt{t-\tau}\eta,\tau\right)d\eta+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_{-y/\left(2\sqrt{t-\tau}\right)}^{+\infty}\eta U\left(\eta^2;-B\right)[I-$$

$$-U\left(\frac{y}{\sqrt{t-\tau}}\left(2\eta+\frac{y}{\sqrt{t-\tau}}\right);-B\right)\Big]B^{-1/2}F_y\left(y+2\sqrt{t-\tau}\eta,\tau\right)d\eta\Big\|\leq$$

$$\leq\frac{M^2E_h\left(T,y\right)}{\beta\sqrt{\beta_h\left(t\right)}}\left\{\frac{\left(1+M\right)K}{t}\left\{\frac{M}{2\beta}+\frac{1}{t}\left\{y^2\left[1+\frac{8\sqrt{\pi}ht}{\beta_h\left(t\right)}+\frac{16h^2t}{\beta_h^2\left(t\right)}\right]+\frac{4y\sqrt{t}}{\sqrt{\beta_h\left(t\right)}}+\frac{2}{\beta_h\left(t\right)}\right\}\right\}+\right.$$

$$+\frac{2}{\sqrt{\pi\beta_h\left(t\right)}}\int_0^t\Lambda\left(\tau\right)\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\times$$

$$\left.\times\left\{\frac{8}{\beta_h\left(t\right)}\left[1+\frac{8\sqrt{\pi}h^3y^3t^{3/2}}{\beta_h^{3/2}\left(t\right)}\right]+\left(1+M\right)\left(1+\frac{2\sqrt{\pi}hy\sqrt{t}}{\sqrt{\beta_h\left(t\right)}}\right)\right\}\right\}+\frac{3M^2}{\beta y}\left(1+\frac{M}{\beta y}\right)\lambda_t\,.$$

Переписывая внутренний интеграл в последнем слагаемом в представлении производной $V_{yy}\left(y,t\right)$ в виде

$$\int_{-\frac{y}{2\sqrt{t-\tau}}}^{+\infty}\left[\eta U\left(\eta^2;-B\right)+\left(\eta+\frac{y}{\sqrt{t-\tau}}\right)U\left(\left(\eta+\frac{y}{\sqrt{t-\tau}}\right)^2;-B\right)\right]\times$$
$$\times B^{1/2}F_y\left(y+2\sqrt{t-\tau}\eta,\tau\right)d\eta=$$

$$=\int_{-y/\left(2\sqrt{t-\tau}\right)}^{+\infty}\eta\left[U\left(\eta^2;-B\right)-U\left(\left(\eta+\frac{y}{\sqrt{t-\tau}}\right)^2;-B\right)\right]B^{1/2}F_y\left(y+2\sqrt{t-\tau}\eta,\tau\right)d\eta+$$

$$+\int_{-y/\left(2\sqrt{t-\tau}\right)}^{+\infty}\left(\eta+\frac{y}{2\sqrt{t-\tau}}\right)U\left(\left(\eta+\frac{y}{\sqrt{t-\tau}}\right)^2;-B\right)B^{1/2}F_\eta\left(y+2\sqrt{t-\tau}\eta,\tau\right)d\eta$$

и интегрируя по частям второй интеграл в правой части последнего равенства, убеждаемся, что

$$V_t-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}U\left(\eta^2;-B\right)B^{-1/2}F\left(y,t\right)d\eta=V_t-B^{-1}F$$

и V_{yy} отличаются только показателями степеней оператора B, причем $B\left(V_t - B^{-1}F\right) = V_{yy}$, т.е. функция $V(y,t)$, определяемая формулой (8), является решением уравнения (1_-).

Осталось показать выполнение начального (2) и краевого (3) условий.

Обозначим через $V_\Phi(y,t)$, $V_{\mathrm{M}}(y,t)$ и $V_F(y,t)$ соответственно первое, второе и третье слагаемые в формуле (8): $V(y,t) = V_\Phi(y,t) + V_{\mathrm{M}}(y,t) + V_F(y,t)$.

Так как

$$\|V_{\mathrm{M}}(y,t) + V_F(y,t)\| \le \frac{M^3 2}{\beta^2\sqrt{\pi}}\lambda_t \int_{y/(2\sqrt{t})}^{+\infty} \exp\left(-\beta\tau^2\right)d\tau + \frac{M^2(1+M)}{\beta\sqrt{\beta_h(T)}}E_h(T,y)\int_0^t \Lambda(\tau)\,d\tau,$$

то $V_{\mathrm{M}}(y,t) + V_F(y,t) \to 0$ при $t \to 0$. Поэтому, чтобы проверить выполнение начального условия (2) для функции $V(y,t)$, достаточно установить, что $V_\Phi(y,t) \to \Phi(y)$ при $t \to 0$. Используя формулу (6) и то, что интеграл

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{y^2/(4t)}^{+\infty} U(s;-B)\,B^{1/2}\Phi(y)\frac{ds}{\sqrt{s}}$$

есть бесконечно малая величина $o(t)$ при $t \to 0$, для всех достаточно малых значений t имеем

$$\|V_\Phi(y,t) - \Phi(y)\| = \left\| \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{y^2/(4t)} U(s;-B)\,B^{1/2}\Phi(y)\frac{ds}{\sqrt{s}} - \right.$$

$$- \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} U(s;-B)\,B^{1/2}\Phi(y)\,\frac{ds}{\sqrt{s}} +$$

$$\left. + \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_0^{+\infty}\left[U\left(\frac{(y-\eta)^2}{4t};-B\right) - U\left(\frac{(y+\eta)^2}{4t};-B\right)\right]\left[B^{1/2}\Phi(\eta) - B^{1/2}\Phi(y)\right]d\eta \right\| \le$$

$$\le o(t) + \frac{M(1+M)}{\sqrt{\pi}}\int_{-y/(2\sqrt{t})}^{+\infty}\exp\left(-\beta\eta^2\right)\left\|B^{1/2}\Phi\left(y + 2\sqrt{t}\eta\right) - B^{1/2}\Phi(y)\right\|d\eta \le$$

$$\le o(t) + \frac{M^3(1+M)}{\beta^2\sqrt{\pi}}\left\{\int_{-\eta_0}^{\eta_0}\exp\left(-\beta\eta^2\right)d\eta \max_{|\eta|\in\eta_0}\left\|B^{5/2}\Phi\left(y+2\sqrt{t}\eta\right) - B^{5/2}\Phi(y)\right\| + \right.$$

$$\left. + K\exp\left(hy^2\right)\left(\int_{-\infty}^{-\eta_0} + \int_{\eta_0}^{+\infty}\right)\left[\exp\left(-\beta\eta^2\right) + \exp\left(-\beta_h(T)\,\eta^2 + 4hy\sqrt{T}\eta\right)\right]d\eta\right\} < \varepsilon,$$

где η_0 — достаточно большое, а ε — сколь угодно малое положительные числа.

Проверке выполнения для функции $V(y,t)$ краевого условия (3) предпошлем оценку нормы:

$$\|V_\Phi(y,t)+V_F(y,t)\| = \left\| \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} B^{1/2} \int_0^{+\infty} U\left(\frac{(y-\eta)^2}{4t};-B\right)\left[I-U\left(\frac{y\eta}{t};-B\right)\right]\Phi(\eta)\,d\eta + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} B^{-1/2} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int_0^{+\infty} U\left(\frac{(y-\eta)^2}{4(t-\tau)};-B\right)\left[I-U\left(\frac{y\eta}{t-\tau};-B\right)\right] F(\eta,\tau)\,d\eta \right\| \leq$$

$$\leq \frac{M^2}{\sqrt{\pi}} \exp\left(hy^2\right)\left\{\left[\frac{K}{\sqrt{t}}\left(2\sqrt{t}\int_0^{y^2/(4t)} + y\int_{y^2/(4t)}^{+\infty}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\left(2\sqrt{t}\int_0^{y^2/[4(t-\tau)]} + y\int_{y^2/[4(t-\tau)]}^{+\infty}\right)\right] \exp\left(-\beta_h(T)\,s + 4hy\sqrt{Ts}\right) ds\right\},$$

из которой следует, что $V_\Phi(y,t)+V_F(y,t)\to 0$ при $y\to 0+$.

Используя то, что интеграл

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{y/\left(4\sqrt{t}\right)} U\left(s^2;-B\right) B^{1/2}\mathcal{M}(t)\,ds$$

есть бесконечно малая величина $o(y)$ при $y\to 0$, после замены $y/\left(2\sqrt{t-\tau}\right) = s$ в интеграле, определяющем $V_{\mathcal{M}}(y,t)$, для всех достаточно малых $y>0$, имеем

$$\|V_{\mathcal{M}}(y,t)-\mathcal{M}(t)\| \leq o(y) + \left\| \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{y/\left(4\sqrt{t}\right)}^{+\infty} U\left(s^2;-B\right)\left[B^{1/2}\mathcal{M}\left(t-\frac{y^2}{4s^2}\right) - B^{1/2}\mathcal{M}(t)\right] ds \right\| \leq$$

$$\leq o(y) + \frac{2M^3}{\beta^2\sqrt{\pi}}\left\{\left[\lambda(t)+\lambda_T\right]\left(\int_{y/\left(4\sqrt{t}\right)}^{1/s_0} + \int_{s_0}^{+\infty}\right)\exp\left(-\beta s^2\right) ds + \right.$$

$$\left. + \max_{s\in[1/s_0,s_0]} \left\| B^{5/2}\mathcal{M}\left(t-\frac{y^2}{4s^2}\right) - B^{5/2}\mathcal{M}(t)\right\| \int_{1/s_0}^{s_0} \exp\left(-\beta s^2\right) ds\right\} < \varepsilon,$$

где s_0 — достаточно большое, а ε — сколь угодно малое положительные числа. ■

4. Первая краевая задача с оператором B, порождающим полугруппу с нулевым типом. В формуле (8) решения первой краевой задачи для уравнения (1_-) фигурируют дробные степени оператора B. Представление (7) отрицательной дробной степени $B^{-\nu}$, $0<\nu<1$, через полугруппу $U(\cdot;-B)$ справедливо, если тип полугруппы $U(\cdot;-B)$ — отрицательный. Воспользоваться этим представлением для отрицательной дробной степени оператора B, для которого $-B$ является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы $U(\cdot;-B)$ класса C_0 с нулевым типом, нельзя, так как интеграл (7) может оказаться расходящимся на бесконечности без дополнительных предположений относительно полугруппы (и, значит, её производящего оператора) или банахова пространства. Так как производящие операторы задаются рассматриваемым дифференциальным уравнением, то, чтобы сохранить представление (7), перейдем на подмножество банахова пространства E. Обозначим через E_ν, $\nu > 0$, подмножество [1] пространства E, для элементов e которого справедлива оценка $\|U(\tau;-B)\,e\| \le \omega_e(\tau)$, $e \in E_\nu$, $\tau \ge 0$, где мажоранта $\omega_e(\tau)$ из пространства $L_{1,\nu-1}$, здесь $L_{1,\rho}$ — пространство функций, абсолютно интегрируемых па полуоси $\overline{R}^1_+$ с весом τ^ρ:

$$\|\omega_e\|_\rho = \int_0^{+\infty} \tau^\rho\,|\omega_e(\tau)|\,d\tau < \infty\,.$$

Пусть $-B$ является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы класса C_0 с пулевым типом, тогда оператор $-B_\delta = -\delta I - B$, $\delta > 0$, является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы с отрицательным типом $U(t;-B_\delta) = \exp(-\delta t)\,U(t;-B)$, поэтому отрицательные дробные степени $B_\delta^{-\nu}$, $\nu > 0$, представляются формулой (7) через полугруппу $U(t;-B_\delta)$. При этом существует предел $B_\delta^{-\nu}e$, $e \in E_\nu$, при $\delta \to 0+$ (так как существует мажоранта $\omega_e(\tau)$: $\|\exp(-\delta\tau)\,U(\tau;-B)\,e\| \le \omega_e(\tau) \in L_{1,\nu-1}$), который и задает на элементах e подмножества E_ν банахова пространства E отрицательную дробную степень $B^{-\nu}$, когда полугруппа $U(t;-B)$ имеет нулевой тип:

$$\lim_{\delta\to 0+} B_\delta^{-\nu} e = \lim_{\delta\to 0+} \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^{+\infty} s^{\nu-1} \exp(-\delta s)\,U(s;-B)\,e\,ds = B^{-\nu}e, \quad \nu > 0,\; e \in E_\nu. \tag{12}$$

Итак, формула (16) дает представление

$$B^{-\nu}e = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^{+\infty} s^{\nu-1} U(t;-B)\,e ds\,,$$

$\nu > 0$, $e \in E_\nu$, отрицательной дробной степени оператора B на элементах $e \in E_\nu$ через полугруппу $U(t;-B)$. В этом случае [2], если $e \in \mathcal{D}(B^\nu)$, $0 < \nu < 1$, и $e, B^\nu e \in E_\nu$, то на таких элементах оператор $B^{-\nu}$ является обратным к оператору B^ν : $B^{-\nu}B^\nu e = B^\nu B^{-\nu} e = e$, $0 < \nu < 1$, $e \in \mathcal{D}(B^\nu) \cap E_\nu$, $B^\nu e \in E_\nu$.

---

[1] Покажем, что множества E_ν , $\nu > 0$, не пустые, например, в $E = C\left(\overline{R}^1_+\right)$. Пусть $B = -d/dx$ и $g_\alpha(x) = (1 + x^\alpha)^{-1}$, $\alpha > 0$, тогда $\left\|U\left(\tau; \frac{d}{dx}\right) g_\alpha(x)\right\|_C = \sup_{x\in\overline{R}^1_+}\left|\frac{1}{1+(x+\tau)^\alpha}\right| = \frac{1}{1+\tau^\alpha} = \psi_\alpha(\tau)$, $\tau \ge 0$. Функции $\psi_\alpha(\tau)$ из пространства $L_{1,\nu-1}$: $\|\psi_\alpha(\tau)\|_{\nu-1} = \int_0^{+\infty} \tau^{\nu-1}\frac{d\tau}{1+\tau^\alpha} = \frac{\pi}{\alpha\sin(\nu\pi/\alpha)} < \infty$, $\alpha > \nu > 0$ [8, с. 306]. Значит, $g_\alpha(x) \in E_\nu \subset C\left(\overline{R}^1_+\right)$ при $\alpha > \nu$.

[2] Для подмножеств E_ν банахова пространства E и, таким образом определенной на подмножествах E_ν , отрицательной дробной степени оператора B справедливы утверждения: 1) $E_\nu \subset E_r$, если $r < \nu$; 2) пусть для элемента $e \in \mathcal{D}(B^\nu)$ выполняется e , $B^\nu e \in E_r$, тогда $B^\delta e \in E_r$ при $0 < \delta < \nu$; 3) пусть $e \in E_\nu$, тогда $B^{-r}e \in E_{\nu-r}$, $0 < r < \nu$; 4) если $e \in E_{\nu+r}$, $0 < r$, ν , то $B^{-r}B^{-\nu}e = B^{-(r+\nu)}e$; 5) пусть $e \in \mathcal{D}(B^\nu)$, $\nu > 0$, и e , $B^\nu e \in E_r$, $r > 0$, тогда $B^{-r}B^\nu e = B^\nu B^{-r}e$; $B^{-r}B^\nu e = B^{\nu-r}e$ при $\nu > r$; $B^{-r}B^\nu e = B^{-(r-\nu)}e$ при $\nu < r$.

Если $E = C\left(\overline{R}^1_+\right)$, то отрицательная степень оператора $B = -d/dx$ представляется [6, с. 42] через правосторонний дробный интеграл Римана-Лиувилля:

$$\left(-\frac{d}{dx}\right)^{-1/2}\psi\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\psi\left(x+s\right)\frac{ds}{\sqrt{s}} = \left(\mathbf{I}^{1/2}_{\infty-}\psi\right)\left(x\right), \tag{13}$$

для функций $\psi\left(x\right)$ из подмножества $E_{1/2}$ пространства $C\left(\overline{R}^1_+\right)$ удовлетворяющих оценке $\sup\limits_{x\in\bar{R}^1_+}\psi\left(x+\tau\right) \le \omega\left(\tau\right)$, в которой мажоранта $\omega\left(\tau\right)$ из весового пространства $L_{1,-1/2}$.

Пусть $\Psi\left(y,t\right)$ — функция со значениями в банаховом пространстве E. Будем говорить, что функция $\Psi\left(y,t\right)$ равномерно по не временным переменным y принадлежит классу CE_ν, $\nu > 0$, и писать $\Psi\left(y,t\right) \in CE_\nu$, если она непрерывна по совокупности переменных в области задания и удовлетворяет оценке $\sup_y\left\|U\left(\tau;-B\right)\Psi\left(y,t\right)\right\| \le \lambda\left(t\right)\psi\left(\tau\right)$, $\tau \ge 0$, где $\lambda\left(t\right)$, $\psi\left(\tau\right)$ — непрерывные функции, причем, $\psi\left(\tau\right) \in L_{1,\nu-1}$, $\nu > 0$. Если функция $\Psi\left(y,t\right)$ не зависит от временной переменной t: $\Psi\left(y,t\right) = \mathrm{Z}\left(y\right)$, то принадлежность функции $\mathrm{Z}\left(y\right) \in CE_\nu$ означает, что выполнена оценка $\sup_y\left\|U\left(\tau;-B\right)\mathrm{Z}\left(y\right)\right\| \le \psi\left(\tau\right)$, $\tau \ge 0$, в которой функция $\psi\left(\tau\right) \in L_{1,\nu-1}$. Если функция $\mathrm{Z}\left(y\right)$ — постоянная, т.е. $\mathrm{Z}\left(y\right) = e$, то принадлежность её классу CE_ν означает, что $e \in E_\nu$.

Если функция $\Psi\left(y,t\right)$ принимает значения из множества $\mathcal{D}\left(B^\nu\right)$ и принадлежит классу CE_ν, то справедливо интегральное представление

$$\Psi\left(y,t\right) = \frac{1}{\Gamma\left(\delta\right)}\int_0^{+\infty}\tau^{\delta-1}U\left(\tau;-B\right)B^\delta\Psi\left(y,t\right)d\tau, \quad 0 < \delta \le \nu\,,$$

которое часто используется в дальнейшем.

Рассмотрим теперь вспомогательную первую краевую задачу для уравнения

$$B_\delta V_t = V_{yy} + F, \qquad t \in \left]0,T\right], \quad y \in R^1_+\,, \tag{14}$$

в котором $B_\delta = \delta I + B$, $\delta > 0$, а оператор $-B$ является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы класса C_0 с нулевым типом. Согласно теоремам 1, 2, для каждого положительного δ решение $V_\delta\left(y,t\right)$ первой краевой задачи (18), (2), (3) дается формулой (8) в которой оператор B заменяется на B_δ:

$$V_\delta\left(y,t\right) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_0^{+\infty}\left[\exp\left(-\delta\frac{\left(y-\eta\right)^2}{4t}\right)U\left(\frac{\left(y-\eta\right)^2}{4t};-B\right) - \right.$$

$$\left. - \exp\left(-\delta\frac{\left(y+\eta\right)^2}{4t}\right)U\left(\frac{\left(y+\eta\right)^2}{4t};-B\right)\right]\left(\delta I + B\right)^{1/2}\Phi\left(\eta\right)d\eta +$$

$$+ \frac{y}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t\exp\left(-\delta\frac{y^2}{4\left(t-\tau\right)}\right)U\left(\frac{y^2}{4\left(t-\tau\right)};-B\right)\left(\delta I + B\right)^{1/2}\mathcal{M}\left(\tau\right)\frac{d\tau}{\left(t-\tau\right)^{3/2}} +$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_0^{+\infty}\left[\exp\left(-\delta\frac{(y-\eta)^2}{4(t-\tau)}\right)U\left(\frac{(y-\eta)^2}{4(t-\tau)};-B\right)-\right.$$

$$\left.-\exp\left(-\delta\frac{(y+\eta)^2}{4(t-\tau)}\right)U\left(\frac{(y+\eta)^2}{4(t-\tau)};-B\right)\right](\delta I+B)^{-1/2}F(\eta,\tau)\,d\eta\,. \qquad (15)$$

Используя в последнем слагаемом формулы (15) представление

$$(\delta I+B)^{-1/2}F(\eta,\tau)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\exp(-\delta s)\,U(s;-B)\,F(\eta,\tau)\frac{ds}{\sqrt{s}}\,,$$

формальный предел при $\delta\to 0$ функции $V_\delta(y,t)$ запишем в виде

$$V(y,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_0^{+\infty}\left[U\left(\frac{(y-\eta)^2}{4t};-B\right)-U\left(\frac{(y+\eta)^2}{4t};-B\right)\right]B^{1/2}\Phi(\eta)\,d\eta+$$

$$+\frac{y}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t U\left(\frac{y^2}{4(t-\tau)};-B\right)B^{1/2}\mathcal{M}(\tau)\frac{d\tau}{(t-\tau)^{3/2}}+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_0^{+\infty}\left[U\left(\frac{(y-\eta)^2}{4(t-\tau)};-B\right)-U\left(\frac{(y+\eta)^2}{4(t-\tau)};-B\right)\right]d\eta\,\times$$

$$\times\int_0^{+\infty}U(s;-B)\,F(\eta,\tau)\frac{ds}{\sqrt{s}}\,. \qquad (16)$$

Теорема 3. *Пусть*

I) *функции* $\Phi(y)$, $\mathcal{M}(t)$ *принимают значения из множества* $\mathcal{D}\left(B^{5/2}\right)$, *а функции* $F(y,t)$ *и* $F_y(y,t)$ *– из* $\mathcal{D}(B)$;

II) *для непрерывных функций* $\Phi(y)$, $\mathcal{M}(t)$, $F(y,t)$ *справедливы соотношения:*

1) $\Phi(y)$, $\mathcal{M}(t)\in CE_{1/2}$, $F(y,t)\in CE_1$;

2) $B^{3/2}\Phi(y)$, $B^{5/2}\Phi(y)$, $B^{1/2}\mathcal{M}(t)$, $BF(y,t)$, $F_y(y,t)$, $BF_y(y,t)\in CE_{3/2}$;

3) $B^{3/2}\mathcal{M}(t)$, $B^{5/2}\mathcal{M}(t)\in CE_{5/2}$.

Тогда решение $V_\delta(y,t)$ *вспомогательной задачи (18), (2), (3) при* $\delta\to 0$ *равномерно по* $(y,t)\in\overline{R}^1_+\times[0,T]$ *стремится к решению* $V(y,t)$ *первой краевой задачи* (1_0) *– (3). Решение* $V(y,t)$ *дается формулой (23) и для его нормы справедлива оценка*

$$\|V(y,t)\|\le\frac{1+M}{\sqrt{\pi}}\left[\|\omega\|_{-1/2}+\frac{\lambda_t}{1+M}\|\sigma\|_{-1/2}+\sqrt{\pi}\|\gamma\|_0\int_0^t\chi(\tau)\,d\tau\right], \qquad (17)$$

в которой функции $\omega(\tau)$, $\lambda(t)$, $\sigma(\tau)$, $\chi(t)$, $\gamma(\tau)$ *определяются неравенствами*

$$\left\|U(\tau;-B)\,B^{1/2}\Phi(y)\right\|\le\omega(t)\,,\quad \left\|U(\tau;-B)\,B^{1/2}\mathcal{M}(t)\right\|\le\lambda(t)\,\sigma(\tau)\,,$$

$$\|U(\tau;-B)\,F(y,t)\ \| \le \chi(t)\,\gamma(\tau)\,. \tag{18}$$

□ Так как по условию $B^{3/2}\Phi(y) \in CE_{3/2} \subset CE_{1/2}$ и $\Phi(y) \in CE_{1/2}$, то функция $B^{1/2}\Phi(y) \in CE_{1/2}$. Используя принадлежность функций $B^{1/2}\Phi(y)$, $B^{1/2}\mathcal{M}(t)$ классу $CE_{1/2}$, а функции $F(y,t)$ — классу CE_1, т.е. используя выполнение для функций $\omega(\tau)$, $\sigma(\tau)$, $\gamma(\tau)$ из (25) соотношений $\omega(\tau)$, $\sigma(\tau) \in L_{1,-1/2}$, $\gamma(\tau) \in L_{1,0}$, оцепим норму функции $V(y,t)$, определяемой формулой (23):

$$\|V(y,t)\| \le \frac{1+M}{\sqrt{\pi}}\int_{-y/(2\sqrt{t})}^{+\infty}\omega\left(\eta^2\right)d\eta + \frac{2\lambda_t}{\sqrt{\pi}}\int_{y/(2\sqrt{t})}^{+\infty}\sigma\left(s^2\right)ds +$$

$$+\frac{1+M}{2\pi}\int_0^t\chi(t-\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{\tau}}\int_0^{+\infty}d\eta\int_{(y-\eta)^2/(4\tau)}^{+\infty}\gamma(\xi)\frac{d\xi}{\sqrt{\xi-(y-\eta)^2/(4\tau)}}\,.$$

В первых двух слагаемых в правой части последнего неравенства увеличиваем область интегрирования и, затем, производим замену переменных интегрирования, а в последнем меняем порядок интегрирования и, затем, оцениваем внутренний интеграл:

$$\|V(y,t)\| \le \frac{1+M}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\omega(s)\frac{ds}{\sqrt{s}} + \frac{\lambda_t}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\sigma(s)\frac{ds}{\sqrt{s}} + (1+M)\int_0^t\chi(\tau)\,d\tau\int_0^{+\infty}\gamma(\xi)d\xi\,.$$

Откуда и следует оценка нормы (24).

Выполнение для функции (23) начального условия (2) следует из того, что для всех достаточно малых значений $t>0$, применяя, в силу принадлежности $\Phi(y)$ классу $CE_{1/2}$, представление

$$\Phi(y) = \pi^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty}U\left(\eta^2;-B\right)B^{1/2}\Phi(y)\,d\eta\,,$$

имеем

$$\|V(y,t)-\Phi(y)\| \le \frac{\lambda_t}{\sqrt{\pi}}\int_{y^2/(4t)}^{+\infty}\sigma(s)\frac{ds}{\sqrt{s}} + (1+M)\,\|\gamma_0\|_0\int_0^t\chi_0(\tau)\,d\tau +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{2\eta_0 M\max_{\eta\in[-\eta_0,\eta_0]}\left\|B^{1/2}\Phi\left(y+2\eta\sqrt{t}\right)-B^{1/2}\Phi(y)\right\| +\right.$$

$$\left.+\left[2\left(\int_{-\infty}^{-\eta_0}+\int_{\eta_0}^{+\infty}\right)+\int_{y/(2\sqrt{t})}^{+\infty}\right]\omega\left(\eta^2\right)d\eta\right\} < \varepsilon,$$

где ε — сколь угодно малое, а η_0 — достаточно большое положительные числа.

Для проверки краевого условия (3), для всех достаточно малых значений $y>0$, оцепим норму разности $V(y,t)-\mathcal{M}(t)$, в которой $V(y,t)$ определяется формулой (23):

$$\|V(y,t)-\mathcal{M}(t)\| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-y/\left(2\sqrt{t}\right)}^{+\infty} d\eta \int_{\eta^2}^{\left(\eta+y/\sqrt{t}\right)^2} \left\| U(s;-B) B^{3/2} \Phi\left(y+2\eta\sqrt{t}\right) \right\| ds +$$

$$+\left\| \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{y/\left(2\sqrt{t}\right)} U\left(s^2;-B\right) B^{1/2} \mathcal{M}(t)\, ds \right\| +$$

$$+\left\| \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{y/\left(2\sqrt{t}\right)}^{+\infty} U\left(s^2;-B\right) \left[B^{1/2} \mathcal{M}\left(t-\frac{y^2}{4s^2}\right) - B^{1/2}\mathcal{M}(t)\right] ds \right\| +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t d\tau \int_{-y/\left(2\sqrt{t-\tau}\right)}^{+\infty} d\eta \int_{\eta^2}^{\left(\eta+y/\sqrt{t-\tau}\right)^2} \left\| U(s;-B) B^{1/2} F\left(y+2\eta\sqrt{t-\tau},\tau\right) \right\| ds\,. \qquad (19)$$

При записи последнего слагаемого в правой части (26) воспользовались тем, что функции $F(y,t) \in CE_1$ и $BF(y,t) \in CE_{3/2}$ принадлежат классу $CE_{1/2} \supset CE_1 \supset CE_{3/2}$ и, значит, справедливы равенства

$$BB^{-1/2}F(y,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} B \int_0^{+\infty} U(s;-B)\, F(y,t) \frac{ds}{\sqrt{s}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} U(s;-B)\, BF(y,t) \frac{ds}{\sqrt{s}} = B^{1/2}F(y,t)\,,$$

в которых функция $B^{1/2}F(y,t) \in CE_1$. Действительно, применяя оценку

$$\|U(\tau;-B)\, BF(y,t)\| \leq \chi_1(t)\, \gamma_1(\tau)\ ,$$

где $\gamma_1(\tau) \in L_{1,1/2}$, имеем

$$\left\|U(\tau;-B)\, B^{1/2}F(y,t)\right\| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \|U(\tau+s;-B)\, BF(y,t)\| \frac{ds}{\sqrt{s}} \leq$$

$$\leq \frac{\chi_1(t)}{\sqrt{\pi}} \int_\tau^{+\infty} \gamma_1(\xi) \frac{d\xi}{\sqrt{\xi-\tau}} \equiv \chi_1(t)\, J(\tau)\,,$$

причем

$$\int_0^{+\infty} J(\tau)\, d\tau = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} d\tau \int_\tau^{+\infty} \gamma_1(\xi) \frac{d\xi}{\sqrt{\xi-\tau}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \sqrt{\xi}\gamma_1(\xi)\, d\xi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \|\gamma_1\|_{1/2} < +\infty\,.$$

Используя принадлежность функций $B^{3/2}\Phi(y)$ и $B^{1/2}F(y,t)$ классу $CE_{3/2} \subset CE_1$, т.е. неравенства

$$\left\|U(\tau;-B)\,B^{3/2}\Phi(y)\right\| \le \omega_{3/2}(\tau)\ , \qquad \left\|U(\tau;-B)\,B^{1/2}F(y,t)\right\| \le \chi_{1/2}(t)\,\gamma_{1/2}(\tau)\,,$$

оцепим вспомогательные интегралы

$$1)\qquad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-y/(2\sqrt{t})}^{+\infty} d\eta \int_{\eta^2}^{\left(\eta+y/\sqrt{t}\right)^2} \omega_{3/2}(s)ds =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\int_0^{y^2/(4t)} \omega_{3/2}(s)\,ds \int_{-\sqrt{s}}^{\sqrt{s}} d\eta + + \int_{y^2/(4t)}^{+\infty} \omega_{3/2}(s)\,ds \int_{\sqrt{s}-y/\sqrt{t}}^{\sqrt{s}} d\eta\right] \le$$

$$\le \frac{y}{\sqrt{\pi t}}\left[\int_0^{y^2/(4t)} \omega_{3/2}(s)\,ds + \int_{y^2/(4t)}^{+\infty} \omega_{3/2}(s)\,ds\right] = \frac{y}{\sqrt{\pi t}}\left\|\omega_{3/2}\right\|_0 = j_1(y)\,;$$

$$2)\qquad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \chi_{1/2}(\tau)\,d\tau \int_{-y/\left(2\sqrt{t-\tau}\right)}^{+\infty} d\eta \int_{\eta^2}^{\left(\eta+y/\sqrt{t-\tau}\right)^2} \gamma_{1/2}(s)ds \le$$

$$\le \frac{y}{\sqrt{\pi}}\left\|\gamma_{1/2}\right\|_0 \int_0^t \chi_{1/2}(\tau)\,\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = j_2(y)\ ;$$

$$3)\qquad \left\|\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{y/\left(2\sqrt{t}\right)} U\left(s^2;-B\right) B^{1/2}\mathcal{M}(t)\,ds\right\| \le y\frac{M}{\sqrt{\pi t}}\left\|B^{1/2}\mathcal{M}(t)\right\| = j_3(y)\ ;$$

$$4)\qquad \left\|\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{y/\left(2\sqrt{t}\right)}^{+\infty} U\left(s^2;-B\right)\left[B^{1/2}\mathcal{M}\left(t-\frac{y^2}{4s^2}\right) - B^{1/2}\mathcal{M}(t)\right] ds\right\| \le$$

$$\le \frac{2Ms_0}{\sqrt{\pi}} \max_{s\in[1/s_0,s_0]}\left\|B^{1/2}\mathcal{M}\left(t-\frac{y^2}{4s^2}\right) - B^{1/2}\mathcal{M}(t)\right\| +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\int_0^{1/s_0^2} + \int_{s_0^2}^{+\infty}\right)\sigma(\tau)\,\frac{d\tau}{\sqrt{\tau}}\left[\lambda(t)+\lambda_t\right] = j_4(y)\,.$$

Применяя полученные оценки, из (26) выводим справедливость краевого условия:

$$\left\|V(y,t) - \mathcal{M}(t)\right\| \le \sum_{k=1}^{4} j_k(y) < \varepsilon,$$

где ε — сколь угодно малое, а s_0 — достаточно большое положительные числа.

Теперь покажем, что функция (23) является пределом при $\delta \to 0$ решения $V_\delta(y,t)$ вспомогательной задачи (18), (2), (3). Для всех достаточно малых значений $\delta > 0$, обозначая $E_\delta(r,B) = U(r;-B)\left[e_\delta(r)B^{1/2} + \exp(-\delta r)\left(B_\delta^{1/2} - B^{1/2}\right)\right]$, $e_\delta(r) = \exp(-\delta r) - 1$, $Q_\delta(r,B) = e_\delta(r)U(r;-B)$, используя неравенства

$$\|U(\tau;-B)\varphi(x)\| \le \omega_0(\tau), \qquad \|U(\tau;-B)\mu(t)\| \le \lambda_0(t)\sigma_0(\tau),$$

в которых $\omega_0(\tau)$, $\sigma_0(\tau) \in L_{1,-1/2}$, и учитывая оценку [1, с. 155] $\|B_\delta^\nu e - B^\nu e\| \le c\delta^\nu \|e\|$, $e \in \mathcal{D}(B^\nu)$, $0<\nu<1$, $c = \mathrm{const}$, имеем

$$\|V_\delta(y,t) - V(y,t)\| = \left\| \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{y/(2\sqrt{t})}^{+\infty} E_\delta(\eta^2,B)\mathcal{M}\left(t - \frac{y^2}{4\tau^2}\right)d\tau + \frac{1}{\pi}\int_0^t d\tau \int_{-y/(2\sqrt{t-\tau})}^{+\infty} d\eta \times\right.$$

$$\times \int_0^{+\infty}\left[Q_\delta(s+\eta^2,B) - Q_\delta\left(s + \left(\eta + \frac{y}{\sqrt{t-\tau}}\right)^2, B\right)\right]F\left(y + 2\eta\sqrt{t-\tau},\tau\right)\frac{ds}{\sqrt{s}} +$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-y/(2\sqrt{t})}^{+\infty}\left[E_\delta(\eta^2,B) - E_\delta\left(\left(\eta + \frac{y}{\sqrt{t}}\right)^2, B\right)\right]\Phi\left(y + 2\eta\sqrt{t}\right)d\eta\right\| \le$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\|\omega\|_{-1/2}\, e_\delta(\xi_0) + 2\int_{\xi_0}^{+\infty}\omega(\xi)\frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} + c\sqrt{\delta}\|\omega_0\|_{-1/2}\right] +$$

$$+ \frac{2}{\sqrt{\pi}}\max\{\lambda_t;\lambda_{0,t}\}\left[\|\sigma\|_{-1/2}\, e_\delta(\xi_0) + 2\int_{\xi_0}^{+\infty}\sigma(\xi)\frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} + c\sqrt{\delta}\|\sigma_0\|_{-1/2}\right] +$$

$$+ \left[\|\gamma_0\|_0\, e_\delta(\xi_0) + 2\int_{\xi_0}^{+\infty}\gamma_0(\xi)\,d\xi\right]\int_0^t \chi_0(\tau)\,d\tau < \varepsilon,$$

где $e_\delta(\xi_0) = \max_{\xi\in[0,\xi_0]}|e_\delta(\xi)|$, $\lambda_{\alpha,t} = \max_{\tau\in[0,t]}\lambda_\alpha(\tau)$, а ε — сколь угодно малое и ξ_0 — достаточно большое положительные числа.

Осталось показать, что предельная функция $V(y,t)$ является решением дифференциального уравнения (1_0).

Вычислим и оценим нормы частных производных функции (23):

1^0). для частной производной первого порядка по переменной y имеем формулу и, используя принадлежность $B^{3/2}\mathcal{M}(t)$ классу $CE_{5/2} \subset CE_{3/2}$, т.е. неравенство

$$\left\|U(\tau;-B)B^{3/2}\mathcal{M}(t)\right\| \le \lambda_{3/2}(t)\sigma_{3/2}(\tau),$$

в котором $\sigma_{3/2}(\tau) \in L_{1,1/2}$, оценку нормы

$$\|V_y(y,t)\| = \left\| \frac{-1}{4t\sqrt{\pi t}}\int_0^{+\infty}\left[(y-\eta)U\left(\frac{(y-\eta)^2}{4t};-B\right) - \right.\right.$$

$$- \left.(y+\eta)\,U\left(\frac{(y+\eta)^2}{4t};-B\right)\right]B^{3/2}\Phi(\eta)\,d\eta -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^t\frac{d\tau}{(t-\tau)^{3/2}}\int_0^{+\infty}\left[(y-\eta)\,U\left(\frac{(y-\eta)^2}{4(t-\tau)};-B\right)-(y+\eta)\,U\left(\frac{(y+\eta)^2}{4(t-\tau)};-B\right)\right]d\eta\,\times$$

$$\times\int_0^{+\infty}U(s;-B)\,BF(\eta,\tau)\frac{ds}{\sqrt{s}}+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t U\left(\frac{y^2}{4(t-\tau)};-B\right)B^{1/2}\mathcal{M}(\tau)\frac{d\tau}{(t-\tau)^{3/2}}-$$

$$\left.-\frac{y^2}{4\sqrt{\pi}}\int_0^t U\left(\frac{y^2}{4(t-\tau)};-B\right)B^{3/2}\mathcal{M}(\tau)\frac{d\tau}{(t-\tau)^{5/2}}\right\|\le$$

$$\le\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\left\|\omega_{3/2}\right\|_0+\frac{\max\left\{\lambda_t;\lambda_{3/2,t}\right\}}{y}\left(\|\sigma\|_{-1/2}+\left\|\sigma_{3/2}\right\|_{1/2}\right)+\|\gamma_1\|_0\int_0^t\chi_1(\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\right].$$

2^0). для частной производной второго порядка по y имеем формулу и, используя неравенства

$$\left\|U(\tau;-B)\,B^{\frac{5}{2}}\Phi(y)\right\|\le\omega_{5/2}(\tau)\;,\quad\left\|U(\tau;-B)\,B^{\frac{5}{2}}\mathcal{M}(t)\right\|\le\lambda_{5/2}(t)\,\sigma_{5/2}(\tau)\,,$$

$$\left\|U(\tau;-B)\,B^{\frac{1}{2}}F_y(y,t)\right\|\le\chi^1_{1/2}(t)\,\gamma^1_{1/2}(\tau)\;,$$

в которых $\omega_{5/2}(\tau)\,,\gamma^1_{1/2}(\tau)\in L_{1,3/2}$, $\sigma_{5/2}(\tau)\in L_{1,5/2}$, оценку нормы

$$\|V_{yy}(y,t)\|=\left\|-\frac{1}{2t\sqrt{\pi}}\left[\int_{-y/(2\sqrt{t})}^{+\infty}U\left(\eta^2;-B\right)B^{3/2}\Phi\left(y+2\eta\sqrt{t}\right)d\eta-\right.\right.$$

$$\left.-\int_{y/(2\sqrt{t})}^{+\infty}U\left(\eta^2;-B\right)B^{3/2}\Phi\left(-y+2\eta\sqrt{t}\right)d\eta\right]+$$

$$+\frac{1}{t\sqrt{\pi}}\left[\int_{-y/(2\sqrt{t})}^{+\infty}\eta^2U\left(\eta^2;-B\right)B^{5/2}\Phi\left(y+2\eta\sqrt{t}\right)d\eta-\right.$$

$$\left.-\int_{y/(2\sqrt{t})}^{+\infty}\eta^2U\left(\eta^2;-B\right)B^{5/2}\Phi\left(-y+2\eta\sqrt{t}\right)d\eta\right]-$$

$$-\frac{12}{y^2\sqrt{\pi}}\int_{y/(2\sqrt{t})}^{+\infty}s^2U\left(s^2;-B\right)B^{3/2}\mathcal{M}\left(t-\frac{y^2}{4s^2}\right)ds+$$

$$+\frac{8}{y^2\sqrt{\pi}}\int_{y/(2\sqrt{t})}^{+\infty}s^4U\left(s^2;-B\right)B^{5/2}\mathcal{M}\left(t-\frac{y^2}{4s^2}\right)ds-$$

$$- \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{y/(2\sqrt{t})}^{+\infty} U\left(s^2; -B\right) B^{1/2} F\left(0, t - \frac{y^2}{4s^2}\right) ds +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \left[\int_{-y/(2\sqrt{t-\tau})}^{+\infty} \eta U\left(\eta^2; -B\right) B^{1/2} F_y\left(y + 2\eta\sqrt{t-\tau}, \tau\right) d\eta + \right.$$

$$\left. + \int_{y/(2\sqrt{t-\tau})}^{+\infty} \eta U\left(\eta^2; -B\right) B^{1/2} F_y\left(-y + 2\eta\sqrt{t-\tau}, \tau\right) d\eta \right] \Bigg\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{1}{t} \left[\frac{1}{2} \left\| \omega_{3/2} \right\|_{-1/2} + \left\| \omega_{5/2} \right\|_{1/2} \right] + \frac{2}{y^2} \left[3\lambda_{3/2,t} \left\| \sigma_{3/2} \right\|_{1/2} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + 2\lambda_{5/2,t} \left\| \sigma_{5/2} \right\|_{3/2} \right] + \chi_{1/2,t} \left\| \gamma_{1/2} \right\|_{-1/2} + \left\| \gamma_{1/2}^1 \right\|_0 \int_0^t \chi_{1/2}^1(\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \right\},$$

где обозначено $\chi_{\alpha,t} = \max_{\tau \in [0,t]} \chi_\alpha(\tau)$.

3^0). Прежде чем вычислять частную производную $V_t(y,t)$, преобразуем (обозначив $\widetilde{\mathcal{M}}(y,t)$) второе слагаемое из правой части формулы (23):

$$\widetilde{\mathcal{M}}(y,t) = \frac{y}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t d\xi \int_0^\xi U\left(\frac{y^2}{4(t-\tau)}; -B \right) B^{1/2} \mathcal{M}(\tau) \frac{d\tau}{(t-\tau)^{5/2}} .$$

Вычислим частную производную по переменной t функции $\widetilde{\mathcal{M}}(y,t)$ и оценим её норму

$$\left\| \widetilde{\mathcal{M}}_t(y,t) \right\| = \left\| \frac{y}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t U\left(\frac{y^2}{4(t-\tau)}; -B \right) B^{1/2} \mathcal{M}(\tau) \frac{d\tau}{(t-\tau)^{5/2}} + \right.$$

$$+ \frac{x^3}{8\sqrt{\pi}} \int_0^t d\xi \int_0^\xi U\left(\frac{x^2}{4(t-\tau)}; -B \right) B^{3/2} \mathcal{M}(\tau) \frac{d\tau}{(t-\tau)^{9/2}} -$$

$$\left. - \frac{5y}{4\sqrt{\pi}} \int_0^t d\xi \int_0^\xi U\left(\frac{y^2}{4(t-\tau)}; -B \right) B^{1/2} \mathcal{M}(\tau) \frac{d\tau}{(t-\tau)^{7/2}} \right\| \leq$$

$$\leq \frac{y}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \sigma\left(\frac{y^2}{4(t-\tau)} \right) \frac{\lambda(\tau)\, d\tau}{(t-\tau)^{5/2}} +$$

$$+ \frac{y^3 N}{8\sqrt{\pi}} \int_0^t d\xi \int_0^\xi \sigma_{3/2}\left(\frac{y^2}{4(t-\tau)} \right) \frac{\lambda_{3/2}(\tau)\, d\tau}{(t-\tau)^{9/2}} + \frac{5x}{4\sqrt{\pi}} \int_0^t d\xi \int_0^\xi \sigma\left(\frac{y^2}{4(t-\tau)} \right) \frac{\lambda(\tau)\, d\tau}{(t-\tau)^{7/2}} .$$

Откуда, заменяя переменные интегрирования: $x/2\sqrt{t-\tau} = s$, $d\tau/(t-\tau)^{5/2} = 16s^2 ds/x^3$, $d\tau/(t-\tau)^{7/2} = 64s^4 ds/x^5 ds$, $d\tau/(t-\tau)^{9/2} = 256s^6 ds/x^7$, и оценивая подынтегральные функции, получим

$$\left\| \widetilde{\mathcal{M}}_t(y,t) \right\| \leq \frac{1}{y^2\sqrt{\pi}} \left[14\lambda_t \|\sigma\|_{1/2} + 4\lambda_{3/2,t} \left\| \sigma_{3/2} \right\|_{3/2} \right] .$$

Во втором и третьем слагаемых из представления $\widetilde{\mathcal{M}}_t(t,x)$ меняем порядок интегрирования и, после приведения подобных, получим

$$\widetilde{\mathcal{M}}_t(y,t) = -\frac{3y}{4\sqrt{\pi}}\int_0^t U\left(\frac{y^2}{4(t-\tau)};-B\right)B^{1/2}\mathcal{M}(\tau)\frac{d\tau}{(t-\tau)^{5/2}} +$$
$$+\frac{y^3}{8\sqrt{\pi}}\int_0^t U\left(\frac{y^2}{4(t-\tau)};-B\right)B^{3/2}\mathcal{M}(\tau)\frac{d\tau}{(t-\tau)^{7/2}}\,.$$

Учитывая найденное значение $\widetilde{\mathcal{M}}_t(t,x)$, имеем

$$V_t(y,t) = -\frac{1}{4\sqrt{\pi}t^{3/2}}\int_0^{+\infty}\left[U\left(\frac{(y-\eta)^2}{4t};-B\right)-U\left(\frac{(y+\eta)^2}{4t};-B\right)\right]B^{1/2}\Phi(\eta)\,d\eta +$$

$$+\frac{1}{8\sqrt{\pi}t^{5/2}}\int_0^{+\infty}\left[(y-\eta)^2U\left(\frac{(y-\eta)^2}{4t};-B\right)-(y+\eta)^2U\left(\frac{(y+\eta)^2}{4t};-B\right)\right]B^{3/2}\Phi(\eta)\,d\eta -$$

$$+\widetilde{\mathcal{M}}_t(t,x)+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}U\left(\eta^2;-B\right)d\eta\int_0^{+\infty}U(s;-B)\,F(y,t)\frac{ds}{\sqrt{s}} -$$

$$-\frac{2y}{\pi}\int_0^t U\left(\frac{y^2}{4(t-\tau)};-B\right)\frac{d\tau}{(t-\tau)^{3/2}}\int_0^{+\infty}U(s;-B)\,F(0,\tau)\frac{ds}{\sqrt{s}} +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^t\left[\int_{-y/(2\sqrt{t-\tau})}^{+\infty}\eta U\left(\eta^2;-B\right)d\eta\int_0^{+\infty}U(s;-B)\,F_y\left(y+2\eta\sqrt{t-\tau},\tau\right)\frac{ds}{\sqrt{s}} -\right.$$

$$\left.-\int_{y/(2\sqrt{t-\tau})}^{+\infty}\eta U\left(\eta^2;-B\right)d\eta\int_0^{+\infty}U(s;-B)\,F_y\left(-y+2\eta\sqrt{t-\tau},\tau\right)\frac{ds}{\sqrt{s}}\right]\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\,. \qquad (20)$$

Используя неравенство $\|U(\tau;-B)\,F_y(y,t)\| \le \chi_0^1(t)\,\gamma_0^1(\tau)$, в котором $\gamma_0^1(\tau)\in L_{1,1/2}$, оценке нормы частной производной $V_t(y,t)$ предпошлем оценку нормы суммы последних трех слагаемых (обозначим $\tilde{F}_t(y,t)$) в правой части формулы (20):

$$\left\|\tilde{F}_t(y,t)\right\| \le \frac{\chi(t)}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\eta\int_0^{+\infty}\gamma\left(s+\eta^2\right)\frac{ds}{\sqrt{s}}+\frac{y}{2\pi}\int_0^t\frac{\chi(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{3/2}}\int_0^{+\infty}\gamma\left(s+\frac{y^2}{4(t-\tau)}\right)\frac{ds}{\sqrt{s}} +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^t\left[\int_{-y/(2\sqrt{t-\tau})}^{+\infty}|\eta|\,d\eta\int_0^{+\infty}\gamma\left(s+\eta^2\right)\frac{ds}{\sqrt{s}}+\int_{y/(2\sqrt{t-\tau})}^{+\infty}\eta d\eta\int_0^{+\infty}\gamma\left(s+\eta^2\right)\frac{ds}{\sqrt{s}}\right]\frac{\chi(\tau)\,d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \le$$

$$\leq [\chi(t) + \chi_t] \|\gamma\|_0 + \frac{2}{\pi} \left\|\gamma_0^1\right\|_{1/2} \int_0^t \chi_0^1(\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}},$$

где обозначено $\chi_t = \max_{\tau \in [0,t]} \chi(\tau)$.

Теперь, используя оценки норм функций $\widetilde{\mathfrak{M}}_t(y,t)$, $\tilde{F}_t(y,t)$ и ранее полученные оценки норм $V(y,t)$ и $V_{yy}(y,t)$, имеем

$$\|V_t(y,t)\| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{1}{2t} \|\omega\|_{-1/2} + \left\|\omega_{3/2}\right\|_{1/2} + \frac{2}{y^2} \left(3\lambda_t \|\sigma\|_{1/2} + 2\lambda_{1,t} \left\|\sigma_{3/2}\right\|_{3/2} \right) \right] +$$

$$+ [\chi(t) + \chi_t] \|\gamma\|_0 + \frac{2}{\pi} \left\|\gamma_0^1\right\|_{1/2} \int_0^t \chi_0^1(\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}.$$

4^0). Сравнивая между собой результаты пунктов 2), 3), осталось заметить, что

$$BV_t(y,t) = V_{yy}(y,t) + \frac{1}{\pi} B \int_{-\infty}^{+\infty} U\left(\eta^2; -B\right) d\eta \int_0^{+\infty} U(s; -B) F(y,t) \frac{ds}{\sqrt{s}} =$$

$$= V_{yy}(y,t) + F(y,t). \quad \blacksquare$$

5. Пример решения первой краевой задачи. Пусть в уравнении (1) оператор $B = -d/dx$ действует в банаховом пространстве $C\left(\bar{R}_+^1\right)$. Полагая, что начальная $\varphi = \varphi(x,y)$ и граничная $\mu = \mu(x,t)$ функции, свободный член $f = f(x,y,t)$ и искомое решение $v = v(x,y,t)$ для всех значений $(y,t) \in \bar{R}_+^1 \times [0,T]$ по переменной $x \in \bar{R}_+^1$ принадлежат пространству $C\left(\bar{R}_+^1\right)$, рассмотрим смешанную задачу

$$v_{xt} + v_{yy} + f(x,y,t) = 0, \quad x \in \bar{R}_+^1, \quad y \in R_+^1, \ t \in]0,T], \tag{21}$$

$$v|_{t=0} = \varphi(x,y), \quad (x,y) \in \bar{R}_+^1 \times R_+^1, \tag{22}$$

$$v|_{y=0} = \mu(x,t), \quad (x,t) \in \bar{R}_+^1 \times [0,T], \tag{23}$$

где $\varphi(x,0) = \mu(x,0)$, $x \in \bar{R}_+^1$.

В рассматриваемом случае для выполнения условий теоремы 3 достаточно, чтобы

1) частные производные по переменной x до третьего порядка включительно начальной $\varphi(x,y)$ и граничной $\mu(x,t)$ функций принадлежали по x пространству $C\left(\bar{R}_+^1\right)$ и

$$\sup_{y \in \bar{R}_+^1} \left\{ \|\varphi(x+\tau,y)\|_C, \ \|\varphi_x(x+\tau,y)\|_C \right\} \leq \omega(\tau),$$

$$\sup_{y \in \bar{R}_+^1} \left\{ \|\varphi_{xx}(x+\tau,y)\|_C, \ \|\varphi_{xxx}(x+\tau,y)\|_C \right\} \leq \omega_1(\tau),$$

$$\|\mu(x+\tau,t)\|_C \leq \lambda(t)\,\sigma(\tau)\,, \quad \|\mu_x(x+\tau,t)\|_C \leq \lambda_1(t)\,\sigma_1(\tau)\,,$$

$$\|\mu_{xx}(x+\tau,t)\|_C, \|\mu_{xxx}(x+\tau,t)\|_C \leq \lambda_2(t)\,\sigma_2(\tau)\,, \tag{24}$$

где $\lambda(t)$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ — непрерывные при $t\in[0,T]$ функции, причем $\omega(\tau)$, $\sigma(\tau)\in L_{1,-1/2}$, $\omega_1(\tau)$, $\sigma_1(\tau)\in L_{1,1/2}$, $\sigma_2(\tau)\in L_{1,3/2}$;

2) частные $f_x(x,y,t)$, $f_y(x,y,t)$ и смешанная $f_{xy}(x,y,t)$ производные свободного члена $f(x,y,t)$, принадлежали по переменной x пространству $C\left(\overline{R}^1_+\right)$ и

$$\sup_{y\in\overline{R}^1_+}\left\{\|f(x+\tau,y,t)\|_C\right\} \leq \chi(t)\,\gamma(\tau)\,,$$

$$\sup_{y\in\overline{R}^1_+}\left\{\|f_x(x+\tau,y,t)\|_C, \|f_y(x+\tau,y,t)\|_C\,, \|f_{xy}(x+\tau,y,t)\|_C\right\} \leq \chi_1(t)\,\gamma_1(\tau)\,, \tag{25}$$

где $\chi(t)$, $\chi_1(t)$ — непрерывные при $t\in[0,T]$ функции, причем $\gamma(\tau)\in L_{1,0}$, $\gamma_1(\tau)\in L_{1,1/2}$.

При выполнении условий (24), (35), согласно формуле (23), используя представления (5), (17) дробных степеней оператора $-d/dx$ в пространстве $C\left(\overline{R}^1_+\right)$, решение смешанной задачи (30)-(32), запишется в явном виде

$$\begin{aligned} v(x,y,t) = \frac{1}{4\pi\sqrt{t}}\int_0^{+\infty} d\eta \int_0^{+\infty}\left[\varphi\left(x+\frac{(y-\eta)^2}{4t},\eta\right) - \varphi\left(x+s+\frac{(y-\eta)^2}{4t},\eta\right) - \right.\\ \left. - \varphi\left(x+\frac{(y+\eta)^2}{4t},\eta\right) + \varphi\left(x+s+\frac{(y+\eta)^2}{4t},\eta\right)\right]\frac{ds}{s^{3/2}} + \\ + \frac{y}{4\pi}\int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{3/2}}\int_0^{+\infty}\left[\mu\left(x+\frac{y^2}{4(t-\tau)},\tau\right) - \mu\left(x+s+\frac{y^2}{4(t-\tau)},\tau\right)\right]\frac{ds}{s^{3/2}} + \\ + \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_0^{+\infty}d\eta\int_0^{+\infty}\left[f\left(x+s+\frac{(y-\eta)^2}{4(t-\tau)},\eta,\tau\right) - \right.\\ \left. - f\left(x+s+\frac{(y+\eta)^2}{4(t-\tau)},\eta,\tau\right)\right]\frac{ds}{\sqrt{s}} \end{aligned}$$

и для него справедлива оценка

$$\sup_{(x,y)\in\overline{R}^1_+\times\overline{R}^1_+}|v(x,y,t)| \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\|\omega\|_{-1/2} + \frac{\max_{\tau\in[0,t]}\lambda(\tau)}{2}\|\sigma\|_{-1/2} + \sqrt{\pi}\,\|\gamma\|_0\int_0^t \chi(\tau)\,d\tau\right].$$

Литература

1. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / М.: Наука, 1967. – 464 с.
2. Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 736 с.
3. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Общая теория / М.: ИЛ, 1962. – 895 с.
4. Иосида К. Функциональный анализ / М.: Мир, 1967. – 624 с.
5. Berens H., Butzer P.L., Westphal U. Representation of fractional powers of infinitesimal generators of semigroups // Bull.Amer.Math.Soc. – 1968. – 74. – P.191-196.
6. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
7. Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций / М.: Наука, 1966. – 500 с.
8. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / М.: Физматгиз, 1963. – 1100 с.

EXPLICIT SOLUTION OF THE INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM OF THE ANALOGUE OF HEAT EQUATION IN BANACH SPACE

Kh.G. Umarov

Chechen State University,
Sheripov Str., 32, 364907, Grozny, Russia, e-mail: umarov50@mail.ru

Abstract. The explicit solution of initial-boundary value problem in the Banach space for the abstract heat equation with operator coefficient is obtained by the classical scheme using an operator-valued analogue of fundamental solution. Abstract constructions are illustrated in the space of continuous functions on non-negative half-axe when there is the limit at infinity for each of them.

Key words: strongly continuous semi-groups of operators, partial differential equations, Banach's space.