MSC 34A34

МЕТОД АССОЦИИРОВАННЫХ СИСТЕМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ОДНОРОДНЫЕ ФУНКЦИИ

И.В. Рахмелевич

Нижегородский Государственный Университет им. Н.И. Лобачевского
пр. Гагарина, 23, Нижний Новгород, 603950, Россия, e-mail: igor-kitpd@yandex.ru

Аннотация. Предложен метод поиска частных решений обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), содержащих однородные функции от некоторых дифференциальных выражений. Введено понятие ассоциированной системы, решения которой при определенных условиях совпадают с решениями исходного уравнения, и исследованы ее свойства. Предлагаемый метод проиллюстрирован для некоторых частных случаев.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, однородная функция, ассоциированная система, условия совместности.

1. Введение. В настоящее время существует достаточно много методов решения нелинейных дифференциальных уравнений [1-3]. В этих методах используются, как правило, свойства симметрии или некоторые специальные свойства уравнения. Это относится, например, к однородным и обобщенно-однородным обыкновенным дифференциальным уравнениям (ОДУ) [1,2]. Также получены решения ряда уравнений в частных производных, содержащих однородные функции от производных [4]. В работе сделана попытка обобщения известных результатов для ОДУ, содержащих однородные функции от производных. Предложен метод поиска частных решений нелинейных ОДУ, содержащих однородные функции от некоторых дифференциальных выражений.

2. Понятие ассоциированной системы и ее свойства. Пусть $y(x)$ – комплекснозначная функция действительного аргумента. Рассмотрим ОДУ следующего вида относительно функции $y(x)$:

$$F\left(\psi_0(x,y,y',\ldots,y^{(M)}),\psi_1(x,y,y',\ldots,y^{(M)}),\ldots,\psi_N(x,y,y',\ldots,y^{(M)})\right)=0\,, \qquad (1)$$

где $F,\psi_0,\psi_1,\ldots,\psi_N$ – некоторые заданные функции. Пусть F является однородной функцией с показателем однородности r, т.е. для произвольных комплексных $\alpha,u_0,u_1,\ldots,u_N$ и некоторого действительного r выполняется соотношение [5]:

$$F\left(\alpha u_0,\alpha u_1,\ldots,\alpha u_N\right)=\alpha^r F\left(u_0,u_1,\ldots,u_N\right)\,. \qquad (2)$$

Определение 1. *Пусть* $\Phi(x)=\{\varphi_0(x),\varphi_1(x),\ldots,\varphi_N(x)\}$ *– вектор-функция, удовлетворяющая функциональному уравнению:*

$$F\left(\varphi_0(x),\varphi_1(x),\ldots,\varphi_N(x)\right)=0\,. \qquad (3)$$

Предполагаем также, что уравнению (3) удовлетворяют функции $\varphi_n(x) = b_n$. Тогда запишем АС для уравнения (13):

$$\frac{y}{b_0} = \frac{y^{(m_1)}}{b_1} = \ldots = \frac{y^{(m_N)}}{b_N} \,. \tag{14}$$

(14) представляет собой переопределенную систему ОДУ с постоянными коэффициентами. Первое уравнение этой системы $y^{(m_1)} - a_1 y = 0$ $(a_1 = b_1/b_0)$ имеет следующее решение:

$$y = \sum_{s=0}^{m_1-1} C_s \exp(\lambda_s x)\,, \tag{15}$$

где

$$\lambda_s = |a_1|^{1/m_1} \exp[i(2\pi s + \theta)/m_1] \tag{16}$$

– корни характеристического уравнения $\lambda^{m_1} - a_1 = 0$, $\theta = \arg a_1$, C_s – произвольные постоянные, $s = 0, 1, \ldots, m_1 - 1$. Для нахождения условий совместности АС запишем n-е уравнение этой системы $y^{(m_n)} - a_n y = 0$ $(a_n = b_n/b_0)$ и подставим в него решение (15). Тогда приходим к следующему соотношению:

$$a_n = \left(\sum_{s=0}^{m_1-1} C_s \lambda_s^{m_n} \exp(\lambda_s x)\right) \Bigg/ \left(\sum_{s=0}^{m_1-1} C_s \exp(\lambda_s x)\right) . \tag{17}$$

Учитывая (16), нетрудно видеть, что соотношение (17) может быть удовлетворено, если при каждом фиксированном n $(1 \le n \le N)$ для любого $s = 0, 1, \ldots, m_1 - 1$ выполняется хотя бы одно из условий:

а) sm_n/m_1 – целое число;
б) $C_s = 0$.

В этом случае из (16) и (17) следует, что $a_n = a_1^{m_n/m_1}$. В частности, если все m_n кратны m_1, то условие а) удовлетворяется при каждом фиксированном n $(1 \leqslant n \leqslant N)$ для всех $s = 0, 1, \ldots, m_1 - 1$.

Тогда из (3) с учетом однородности функции F легко получить алгебраическое уравнение для определения величины a_1:

$$F\left(1, a_1, a_1^{m_2/m_1}, \ldots, a_1^{m_N/m_1}\right) = 0\,. \tag{18}$$

Итак, уравнение (13) имеет частное решение вида (15), в котором постоянные C_s могут быть отличны от 0, если при каждом n $(1 \leqslant n \leqslant N)$ sm_n/m_1 – целое число, причем величина a_1 должна удовлетворять алгебраическому уравнению (18).

Пример. Рассмотрим следующее уравнение:

$$F\left(y, y^{(2)}, y^{(4)}, y^{(8)}\right) \equiv p_1 y^{(8)} (y^{(4)})^2 + p_2 y^{(4)} (y^{(2)})^2 + p_3 y^3 = 0\,.$$

Согласно изложенному выше, из (14) получаем АС для данного уравнения:

$$\frac{y}{b_0} = \frac{y^{(2)}}{b_1} = \frac{y^{(4)}}{b_2} = \frac{y^{(8)}}{b_3} \, .$$

Решение первого уравнения этой системы:

$$y = C_1 \exp(\lambda_1 x) + C_2 \exp(\lambda_2 x) \, ,$$

где $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{a_1}$. Для определения величины a_1 используем уравнение (18), которое в данном случае сводится к виду:

$$F\left(1, a_1, a_1^2, a_1^4\right) \equiv p_1 a_1^8 + p_2 a_1^4 + p_3 = 0 \, ,$$

откуда получаем формулу для возможных значений a_1:

$$a_1^4 = \frac{-p_2 \pm (p_2^2 - 4p_1 p_3)^{1/2}}{2p_1} \, .$$

Рассмотрим случай, когда в уравнение (1) входят некоторые степени от неизвестной функции и ее производных:

$$F\left(y^{\beta_0}, (y')^{\beta_1}, \dots, (y^{(N)})^{\beta_N}\right) = 0 \, , \tag{19}$$

где $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_N$ – некоторые действительные числа, причем предполагаем, что $\beta_n \neq 0$ для всех $n = 0, 1, \dots, N$. Пусть так же, как в предыдущей задаче, $\varphi_n(x) = b_n$ – некоторые постоянные. Тогда АС для уравнения (19) можно записать в виде:

$$\frac{y^{\beta_0}}{b_0} = \frac{(y')^{\beta_1}}{b_1} = \dots = \frac{(y^{(N)})^{\beta_N}}{b_N} \, . \tag{20}$$

1). Пусть $\beta_1 \neq \beta_0$. Решая первое уравнение системы (20) $y' = k_1 y^{\sigma_1}$ находим:

$$y = A_0 (x + C)^{\nu_1} \, , \tag{21}$$

где $A_0 = ((1 - \sigma_1) k_1)^{\nu_1}$, $\nu_1 = 1/(1 - \sigma_1)$, $\sigma_1 = \beta_0/\beta_1$, $k_1 = (b_1/b_0)^{1/\beta_1}$; C – произвольная постоянная. Для нахождения условий совместности системы (20) продифференцируем функцию (21) N раз и подставим полученные производные в остальные уравнения системы. Тогда получим искомые условия совместности:

$$\beta_0/\beta_n = 1 - n(1 - \beta_0/\beta_1) \, , \quad b_n/b_0 = A_n^{\beta_n}/A_0^{\beta_0} \, , \tag{22}$$

где $A_n = A_0 \nu_1 (\nu_1 - 1) \dots (\nu_1 - n + 1)$; $n = 1, \dots, N$.

Подставив функцию из (21) и её производные в уравнение (19) , учитывая условия (22) и свойство однородности функции F, получим уравнение, которому должны удовлетворять параметры β_0, β_1, k_1:

$$F\left(1, A_1^{\beta_1}/A_0^{\beta_0}, \dots, A_N^{\beta_N}/A_0^{\beta_0}\right) = 0 \, . \tag{23}$$

2). Пусть $\beta_1 = \beta_0$. Тогда из первого уравнения системы (20) $y' = k_1 y$ находим решение $y = C\exp(k_1 x)$, где, так же как и выше, $k_1 = (b_1/b_0)^{1/\beta_1}$. Далее, используя остальные уравнения АС, нетрудно получить условия ее совместности: $\beta_n = \beta_0$, $b_n/b_0 = (b_1/b_0)^n$ для всех $n = 1, \ldots, N$. Тогда из уравнения (19) следует, что величина k_1 должна удовлетворять уравнению:

$$F\left(1, k_1, \ldots, k_1^N\right) = 0\,. \tag{24}$$

Таким образом, при $\beta_1 \neq \beta_0$ уравнение (19) имеет решение (21) при условии, что входящие в него параметры удовлетворяют уравнению (23). В случае $\beta_1 = \beta_0$ решением уравнения (19) является экспоненциальная функция $y = C\exp(k_1 x)$, причем величина k_1 должна удовлетворять уравнению (24).

3. Решение некоторых уравнений 2-го порядка методом АС. Рассмотрим уравнение 2-го порядка:

$$F\left(y, y', y''\right) = 0\,. \tag{25}$$

Будем предполагать, что уравнение (3) разрешимо относительно одной из функций $\varphi_n(x)$ (в отличие от задач, рассмотренных в п. 2, эти функции, вообще говоря, не предполагаются постоянными).

1). Пусть $F\left(u_0, u_1, u_2\right) = F_0\left(u_0, u_1\right) + u_2 F_1\left(u_0, u_1,\right)$, где $F_0\left(u_0, u_1\right)$, $F_1\left(u_0, u_1\right)$ – однородные функции с показателями однородности r, $(r-1)$ соответственно. Тогда из уравнения (3) можно получить:

$$\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_0(x)} = -\frac{F_0\left(1, \varphi_1(x)/\varphi_0(x)\right)}{F_1\left(1, \varphi_1(x)/\varphi_0(x)\right)}\,. \tag{26}$$

Запишем АС для уравнения (25):

$$\frac{y}{\varphi_0(x)} = \frac{y'}{\varphi_1(x)} = \frac{y''}{\varphi_2(x)}\,. \tag{27}$$

Решение первого уравнения системы (27) выражается формулой (9), где $\omega(x) = \varphi_1(x)/\varphi_0(x)$. Для получения условия совместности АС используем второе уравнение этой системы, которое запишем в виде:

$$\frac{y''}{y} = \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_0(x)}\,.$$

Подставив в это уравнение функцию $y(x)$, определяемую формулой (9), и учитывая соотношение (26), получим уравнение относительно функции $\omega(x)$:

$$\omega'(x) = -\omega^2(x) + g\left(\omega(x)\right)\,, \tag{28}$$

где $g\left(\omega(x)\right) = F_0\left(1, \omega(x)\right)/F_1\left(1, \omega(x)\right)$. Поскольку (28) представляет собой уравнение 1-го порядка с разделяющимися переменными, то его решение запишем в виде:

$$\int \frac{d\omega}{\omega^2 + g\left(\omega\right)} = -x + A\,, \tag{29}$$

где A – произвольная постоянная. Соотношение (29) определяет в неявном виде функцию $\omega(x) = \varphi_1(x)/\varphi_0(x)$, при которой система (27) является совместной. Таким образом, для рассмотренного случая решение уравнения (25) определяется формулами (9) и (29).

2). Пусть теперь $F(u_0, u_1, u_2) = F_0(u_1, u_2) + u_0 F_1(u_1, u_2,)$ где $F_0(u_1, u_2)$, $F_1(u_1, u_2)$ – однородные функции с показателями однородности r, $(r-1)$ соответственно. Тогда уравнение (3) разрешимо относительно функции $\omega(x)$:

$$\omega(x) \equiv \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_0(x)} = -\frac{F_1(1, \varphi_2(x)/\varphi_1(x))}{F_0(1, \varphi_2(x)/\varphi_1(x))} \tag{30}$$

или

$$\omega(x) = -g(\chi(x)), \quad \chi(x) = \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}, \quad g(\chi) = \frac{F_1(1, \chi)}{F_0(1, \chi)}. \tag{31}$$

Так же, как и в предыдущем случае, АС имеет вид (27), а решение уравнения (25) определяется формулой (9). Для получения условия совместности АС второе уравнение этой системы запишем в виде:

$$\frac{y''}{y'} = \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)} \equiv \chi(x). \tag{32}$$

Подставляя в уравнение (32) функцию $y(x)$, определяемую формулой (9), и учитывая, что $\omega'(x) = -g'(\chi(x))\,\chi'(x)$, после несложных преобразований получаем уравнение относительно функции $\chi(x)$:

$$\chi'(x) = \frac{g(\chi(x)) + \chi(x)}{h(\chi(x))}, \tag{33}$$

где $h(\chi) = -g'(\chi)/g(\chi)$. Решение уравнения (33) в неявной форме:

$$\int \frac{h(\chi)d\chi}{g(\chi) + \chi} = x + A, \tag{34}$$

Соотношение (34) определяет в неявном виде функцию $\chi(x)$, при которой система (27) для рассматриваемого случая является совместной. Используя (31), можно выразить через эту функцию решение уравнения (25):

$$y(x) = C \exp\left(-\int g(\chi(x))\,dx\right). \tag{35}$$

Таким образом, для рассмотренного случая решение уравнения (25) определяется формулами (34), (35).

4. Заключение. Метод ассоциированных систем, предложенный в данной работе, является эффективным средством решения обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих однородные функции от дифференциальных выражений произвольного вида. В процессе применения метода задача решения исходного уравнения (1) разбивается на две более простые задачи:

1) решение функционального уравнения (3);

2) решение ассоциированной системы вида (4) и нахождение условий ее совместности.

В примерах, рассмотренных в настоящей работе, с помощью представленного метода получены решения уравнений второго порядка в неявной форме для случая, когда уравнение разрешимо относительно искомой функции или одной из ее производных. Также найдены некоторые частные решения уравнений произвольного порядка, для которых АС представляет собой переопределенную систему ОДУ с постоянными коэффициентами, и исследованы условия её совместности. Предложенный метод является перспективным для решения дифференциальных уравнений сложного вида.

Литература

1. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник но обыкновенным дифференциальным уравнениям // М.: Физматлит, 2001. – 576 с.
2. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / М.: Наука, 1969. – 424 с.
3. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики // М.: Физматлит, 2005. – 256 с.
4. Рахмелевич И.В. О применении метода разделения переменных к уравнениям математической физики, содержащим однородные функции от производных // Вестник Томского университета. Математика и механика. – 2013. – 3(23). – С.37-44.
5. Корн Г., Корн Т. Справочник но математике для научных работников и инженеров / М.: Наука, 1984. – 832 с.

METHOD OF ASSOCIATED SYSTEMS FOR SOLVING OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS CONTAINING HOMOGENEOUS FUNCTIONS

I.V. Rakhmelevich

Nizhny Novgorod State University,
Gagarin Av., 23, Nizhny Novgorod, 603950, Russia, e-mail: igor-kitpd@yandex.ru

Abstract. The method for search of particular solutions of ordinary differential equations containing homogeneous functions of some differential expressions is proposed. The concept of associated system is introduced and its properties are investigated. The solutions of this system coincide with the solutions of initial equation under certain conditions. The proposed method is illustrated for some particular cases.

Key words: differential equation, homogeneous function, associated system, conditions of compatibility.