MSC 76M60

ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДМОДЕЛИ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ГАЗОВЗВЕСИ В СЛУЧАЕ ТРЕХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

А.В. Панов

Челябинский государственный университет,
ул. Братьев Кашириных, 129, Челябинск, 454001, Россия, e-mail: gjd@bk.ru

Аннотация. Методами группового анализа исследована система уравнений в частных производных, описывающая динамику смеси газа и мелких частиц, в случае трех пространственных переменных. Найдено ядро основных алгебр Ли системы, выписана оптимальная система одномерных подалгебр, для них выписаны инвариантные подмодели, найдены некоторые точные решения системы уравнений.

Ключевые слова: газовзвесь, алгебра Ли симметрий, оптимальная система подалгебр, допускаемая группа, инвариантное решение, подмодель.

1. Введение. В работе исследуются симметрийные свойства [1] системы уравнений в частных производных, описывающей динамику смеси газа и мелких частиц. Исследуемая модель описывает подавление неконтролируемой детонации горючего газа инертными частицами (метод гашения) [2].

Подавление дискретными частицами волны детонации может протекать по-разному, в зависимости от плотности, концентрации и размеров частиц, а также других параметров системы. Данный процесс описывается системой уравнений механики гетерогенных сред взаимопроникающих континуумов в двухскоростном приближении. Первым континуумом выступает смесь реагирующих газов и продуктов их воспламенения и горения, вторым континуумом — мелкие частицы инертного вещества. Функциональным параметром системы является давление смеси, зависящее от плотностей фаз.

Главная гипотеза, используемая при теоретическом описании течений газовзвесей, состоит в предположении о том, что среда в целом и её компоненты являются сплошными. Также, предполагается, что:

— размеры включений дисперсной фазы значительно превосходят молекулярно-кинетические размеры в несущей фазе и в то же время значительно меньше характерных макромасштабов среды;

— газовая взвесь является достаточно разреженной, чтобы не учитывать взаимодействие частиц между собой;

— эффекты вязкости проявляются только во взаимодействии между газом и частицами;

— температура частиц по всему ее объему постоянна вследствие высокой теплопроводности материала частиц;

— энергией и эффектами, связанными с хаотическим движением частиц, можно пренебречь;

— течение является нестационарным;

— тепловыми эффектами пренебрегаем;

— процессы дробления, слипания и образования новых дисперсных частиц отсутствуют; частицы состоят из несжимаемого материала;

— в качестве несущей газовой среды выступает горючий газ, который воспламеняется но достижении некоторой критической температуры;

— состав газа предполагается однокомпонентным.

Теоретические исследования данной системы были проведены, главным образом, в одномерном и двумерном случаях (см. [2] и ссылки там же). Симметрийные свойства системы в данных работах не изучались.

В работах [3, 4] система исследовалась в случае пространства независимых переменных $\mathbb{R}^2_{(t,\,x)}$: было найдено ядро основных алгебр Ли, доказано, что система не имеет дополнительных симметрий при любой функции давления, найдена оптимальная система подалгебр ядра основных алгебр Ли, осуществлен поиск инвариантных и частично инвариантных решений системы. В настоящей работе найдено ядро основных алгебр Ли данной системы в случае пространства независимых переменных $\mathbb{R}^4_{(t,\,x,\,y,\,z)}$, выписаны инвариантные подмодели ранга 3 и найдены некоторые точные решения системы.

2. Ядро основных алгебр Ли.

Рассматривается система уравнений:

$$\frac{d\rho_1}{dt_1} + \rho_1 \mathrm{div}\,\vec{u}_1 = 0\,, \tag{1}$$

$$\frac{d\rho_2}{dt_2} + \rho_2 \mathrm{div}\,\vec{u}_2 = 0\,, \tag{2}$$

$$\rho_1\frac{d\vec{u}_1}{dt_1} + m_1\nabla P(\rho_1,\rho_2) = -\frac{\rho_2}{\tau}(\vec{u}_1-\vec{u}_2)\,, \tag{3}$$

$$\rho_2\frac{d\vec{u}_2}{dt_2} + m_2\nabla P(\rho_1,\rho_2) = \frac{\rho_2}{\tau}(\vec{u}_1-\vec{u}_2)\,, \tag{4}$$

описывающая динамику смеси газа и мелких частиц в пространстве. Здесь $\vec{u}_1=(u_1,v_1,w_1)$ — вектор скорости газа, $\vec{u}_2=(u_2,v_2,w_2)$ — вектор скорости частиц, ρ_1 — плотность газа, ρ_2 — плотность частиц, P — давление смеси, $m_2=\dfrac{\rho_2}{b}$ — объемная коцентрация частиц, b — абсолютная плотность частиц, $m_1=1-m_2$ — объемная коцентрация газа,

$$\frac{d}{dt_1}=\frac{\partial}{\partial t}+\vec{u}_1\cdot\nabla,\qquad \frac{d}{dt_2}=\frac{\partial}{\partial t}+\vec{u}_2\cdot\nabla.$$

Определение 1. *Ядром основных алгебр Ли системы уравнений называется алгебра Ли преобразований зависимых и независимых переменных, допускаемых при любом значении параметра системы* [1].

Оператор группы допускаемых преобразований ищется в виде

$$X=\theta\frac{\partial}{\partial t}+\xi\frac{\partial}{\partial x}+\eta\frac{\partial}{\partial y}+\zeta\frac{\partial}{\partial z}+U_1\frac{\partial}{\partial u_1}+V_1\frac{\partial}{\partial v_1}\;+$$

$$+ W_1\frac{\partial}{\partial w_1} + U_2\frac{\partial}{\partial u_2} + V_2\frac{\partial}{\partial v_2} + W_2\frac{\partial}{\partial w_2} + R_1\frac{\partial}{\partial \rho_1} + R_2\frac{\partial}{\partial \rho_2}\,.$$

Все коэффициенты оператора зависят от переменных $(t,x,y,z,u_1,v_1,w_1,u_2,v_2,w_2,\rho_1,\rho_2)$. Продолжая данный оператор на пространство 1-струй, действуя продолженным оператором на систему и сужая полученные уравнения на многообразие, задаваемое системой в расширенном пространстве, получим систему определяющих уравнений на коэффициенты оператора. Из определяющих уравнений и произвольности параметра P следует, что $R_1=0$, $R_2=0$, $\theta=\theta(t)$, $\xi=\xi(t,x,y,z)$, $\eta=\eta(t,x,y,z)$, $\zeta=\zeta(t,x,y,z)$,

$$U_1=U_1(t,x,y,z,u_1,v_1,w_1)\,,\ V_1=V_1(t,x,y,z,u_1,v_1,w_1)\,,\ W_1=W_1(t,x,y,z,u_1,v_1,w_1)\,,$$

$$U_2=U_2(t,x,y,z,u_2,v_2,w_2)\,,\ V_2=V_2(t,x,y,z,u_2,v_2,w_2)\,,\ W_2=W_2(t,x,y,z,u_2,v_2,w_2)\,.$$

Кроме того, имеются следующие две идентичные друг другу группы уравнений (5)-(16) и (17)-(28) для наборов функций $\{U_1,V_1,W_1\}$ и $\{U_2,V_2,W_2\}$, соответственно:

$$U_{1u_1}+\theta_t-\xi_x=0,\ V_{1v_1}+\theta_t-\eta_y=0,\ W_{1w_1}+\theta_t-\zeta_z=0, \tag{5}$$

$$U_1=\xi_t-u_1\theta_t+u_1\xi_x+v_1\xi_y+w_1\xi_z, \tag{6}$$

$$V_1=\eta_t-v_1\theta_t+u_1\eta_x+v_1\eta_y+w_1\eta_z, \tag{7}$$

$$W_1=\zeta_t-w_1\theta_t+u_1\zeta_x+v_1\zeta_y+w_1\zeta_z, \tag{8}$$

$$U_{1x}+V_{1y}+W_{1z}=0, \tag{9}$$

$$U_{1v_1}+\eta_x=0,\ U_{1w_1}+\zeta_x=0, \tag{10}$$

$$V_{1u_1}+\xi_y=0,\ V_{1w_1}+\zeta_y=0, \tag{11}$$

$$W_{1u_1}+\xi_z=0,\ W_{1v_1}+\eta_z=0, \tag{12}$$

$$\theta_t-\xi_x-U_{1u_1}=0,\ \theta_t-\eta_y-V_{1v_1}=0,\ \theta_t-\zeta_z-W_{1w_1}=0, \tag{13}$$

$$\begin{gathered}\frac{\rho_2}{\tau}(U_1-U_2)+\rho_1\left(u_1U_{1x}+v_1U_{1y}+w_1U_{1z}+U_{1t}\right)+\\ +\frac{\rho_2}{\tau}\left(\theta_t-U_{1u_1}\right)(u_1-u_2)-\frac{\rho_2}{\tau}U_{1v_1}(v_1-v_2)-\frac{\rho_2}{\tau}U_{1w_1}(w_1-w_2)=0,\end{gathered} \tag{14}$$

$$\begin{gathered}\frac{\rho_2}{\tau}(V_1-V_2)+\rho_1\left(u_1V_{1x}+v_1V_{1y}+w_1V_{1z}+V_{1t}\right)+\\ +\frac{\rho_2}{\tau}\left(\theta_t-V_{1v_1}\right)(v_1-v_2)-\frac{\rho_2}{\tau}V_{1u_1}(u_1-u_2)-\frac{\rho_2}{\tau}V_{1w_1}(w_1-w_2)=0,\end{gathered} \tag{15}$$

$$\begin{gathered}\frac{\rho_2}{\tau}(W_1-W_2)+\rho_1\left(u_1W_{1x}+v_1W_{1y}+w_1W_{1z}+W_{1t}\right)+\\ +\frac{\rho_2}{\tau}\left(\theta_t-W_{1w_1}\right)(w_1-w_2)-\frac{\rho_2}{\tau}W_{1u_1}(u_1-u_2)-\frac{\rho_2}{\tau}W_{1v_1}(v_1-v_2)=0,\end{gathered} \tag{16}$$

$$U_{2u_2}+\theta_t-\xi_x=0,\ V_{2v_2}+\theta_t-\eta_y=0,\ W_{2w_2}+\theta_t-\zeta_z=0, \tag{17}$$

$$U_2=\xi_t-u_2\theta_t+u_2\xi_x+v_2\xi_y+w_2\xi_z, \tag{18}$$

$$V_2 = \eta_t - v_2\theta_t + u_2\eta_x + v_2\eta_y + w_2\eta_z, \tag{19}$$

$$W_2 = \zeta_t - w_2\theta_t + u_2\zeta_x + v_2\zeta_y + w_2\zeta_z, \tag{20}$$

$$U_{2x} + V_{2y} + W_{2z} = 0, \tag{21}$$

$$U_{2v_2} + \eta_x = 0,\ U_{2w_2} + \zeta_x = 0, \tag{22}$$

$$V_{2u_2} + \xi_y = 0,\ V_{2w_2} + \zeta_y = 0, \tag{23}$$

$$W_{2u_2} + \xi_z = 0,\ W_{2v_2} + \eta_z = 0, \tag{24}$$

$$\theta_t - \xi_x - U_{2u_2} = 0,\ \theta_t - \eta_y - V_{2v_2} = 0,\ \theta_t - \zeta_z - W_{2w_2} = 0, \tag{25}$$

$$\begin{gathered}\frac{\rho_2}{\tau}(U_1 - U_2) + \rho_1\left(u_2U_{2x} + v_2U_{2y} + w_2U_{2z} + U_{2t}\right) + \\ +\frac{\rho_2}{\tau}\left(\theta_t - U_{2u_2}\right)(u_1 - u_2) - \frac{\rho_2}{\tau}U_{2v_2}(v_1 - v_2) - \frac{\rho_2}{\tau}U_{2w_2}(w_1 - w_2) = 0,\end{gathered} \tag{26}$$

$$\begin{gathered}\frac{\rho_2}{\tau}(V_1 - V_2) + \rho_1\left(u_2V_{2x} + v_2V_{2y} + w_2V_{2z} + V_{2t}\right) + \\ +\frac{\rho_2}{\tau}\left(\theta_t - V_{2v_2}\right)(v_1 - v_2) - \frac{\rho_2}{\tau}V_{2u_2}(u_1 - u_2) - \frac{\rho_2}{\tau}V_{2w_2}(w_1 - w_2) = 0,\end{gathered} \tag{27}$$

$$\begin{gathered}\frac{\rho_2}{\tau}(W_1 - W_2) + \rho_1\left(u_2W_{2x} + v_2W_{2y} + w_2W_{2z} + W_{2t}\right) + \\ +\frac{\rho_2}{\tau}\left(\theta_t - W_{2w_2}\right)(w_1 - w_2) - \frac{\rho_2}{\tau}W_{2u_2}(u_1 - u_2) - \frac{\rho_2}{\tau}W_{2v_2}(v_1 - v_2) = 0,\end{gathered} \tag{28}$$

Достаточно решить одну из этих систем уравнений. Решим, например, систему (5)-(16).

Складывая первые уравнения в (5) и (13), получим $\theta_t = \xi_x$. Так же из вторых уравнений в (5) и (13) получим $\theta_t = \eta_y$, из третьих — $\theta_t = \zeta_z$. Подставляя (6) и (18) в (14) и приводя подобные при ρ_2, v_1, w_1, получим, что $\xi_x = 0$, $\xi_{tt} = 0$, $\xi_{yy} = 0$, $\xi_{zz} = 0$, $\xi_{ty} = 0$, $\xi_{tz} = 0$, $\xi_{yz} = 0$. Таким образом, функция ξ есть многочлен первой степени от переменных t, y, z. Функция θ есть константа. Далее, подставив (7) и (19) в (15), учитывая равенства $\theta_t = \eta_y = 0$ и приводя подобные при u_1, w_1, получим $\eta_{tt} = 0$, $\eta_{zz} = 0$, $\eta_{xx} = 0$, $\eta_{tz} = 0$, $\eta_{tx} = 0$, $\eta_{xz} = 0$. Таким образом, функция η есть многочлен первой степени от переменных t, x, z. Так же, подставив (8) и (20) в (16), найдем, что ζ есть многочлен первой степени от переменных t, x, y. Итак, получены выражения $\theta = c$, $\xi = a_1t + a_3y + a_4z + a_5$, $\eta = b_1t + b_2x + b_4z + b_5$, $\zeta = c_1t + c_2x + c_3y + c_5$. Учитывая выражения для U_1, V_1, W_1 из (6)-(8), находим

$$U_1 = a_1 + a_3v_1 + a_4w_1,$$

$$V_1 = b_1 + b_2u_1 + b_4w_1,$$

$$W_1 = c_1 + c_2u_1 + c_3v_1.$$

Остались уравнения (9), (10), (11), (12). Уравнение (9) следует из других уравнений. Из уравнений (10), (11), (12) получим

$$\eta_x + \xi_y = 0,\ \zeta_x + \xi_z = 0,\ \zeta_y + \eta_z = 0.$$

После подстановки в эти уравнения выражений для ξ, η, ζ получим равенства $b_2 = -a_3$, $a_4 = -c_2$, $c_3 = -b_4$. Подставив в формулы (18), (19), (20) выражения для ξ, η, ζ, найдем U_2, V_2, W_2. Итак, после переобозначений $b_2 = d, a_4 = e, c_3 = f$, решение определяющей системы уравнений можно записать в виде

$$\theta = c,\ \xi = a_1 t - dy + ez + a_5,\ \eta = b_1 t + dx - fz + b_5,\ \zeta = c_1 t - ex + fy + c_5,$$

$$U_1 = a_1 - dv_1 + ew_1,\ V_1 = b_1 + du_1 - fw_1,\ W_1 = c_1 - eu_1 + fv_1,$$

$$U_2 = a_1 - dv_2 + ew_2,\ V_2 = b_1 + du_2 - fw_2,\ W_2 = c_1 - eu_2 + fv_2,$$

$$R_1 = 0,\ R_2 = 0.$$

Полученные формулы приводят к следующему утверждению.

Теорема 1. *Базис ядра основных алгебр Ли L_{10} системы уравнений* (1)-(4) *состоит из операторов*

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}\ ,\quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}\ ,\quad X_3 = \frac{\partial}{\partial z}\ ,$$

$$X_4 = t\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\partial}{\partial u_2}\ ,\quad X_5 = t\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v_1} + \frac{\partial}{\partial v_2}\ ,\quad X_6 = t\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial w_1} + \frac{\partial}{\partial w_2}\ ,$$

$$X_7 = y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y} + v_1\frac{\partial}{\partial w_1} - w_1\frac{\partial}{\partial v_1} + v_2\frac{\partial}{\partial w_2} - w_2\frac{\partial}{\partial v_2}\ ,$$

$$X_8 = z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z} + w_1\frac{\partial}{\partial u_1} - u_1\frac{\partial}{\partial w_1} + w_2\frac{\partial}{\partial u_2} - u_2\frac{\partial}{\partial w_2}\ ,$$

$$X_9 = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} + u_1\frac{\partial}{\partial v_1} - v_1\frac{\partial}{\partial u_1} + u_2\frac{\partial}{\partial v_2} - v_2\frac{\partial}{\partial u_2},$$

$$X_{10} = \frac{\partial}{\partial t}\ .$$

□ Задавая в последних формулах для коэффициентов допускаемого векторного поля произвольные константы равными нулю, кроме одной, равной единице, получим требуемые векторные поля. ■

3. Подмодели. В работе Л.В. Овсянникова [5] была предложена программа «Подмодели», направленная на максимальное использование свойств симметрий систем уравнений, с целью их решения и качественного исследования: постановки краевых задач, исследование траекторий, характеристик и т. д. Для нахождения всех существенно различных подмоделей необходима классификация всех подалгебр основной алгебры Ли с точностью до преобразований внутренних автоморфизмов, так как решения одной подмодели переводятся в решения другой, если подалгебры, соответствующие этим подмоделям, переводятся друг в друга внутренним автоморфизмом. Такие подалгебры будем называть подобными.

Определение 2. *Совокупность представителей классов подобных подалгебр размерности s (по одному от каждого класса) называется оптимальной системой подалгебр размерности s* [1].

Алгебра Ли L_{10} является алгеброй Ли группы Галилея. Оптимальная система подалгебр всех размерностей данной алгебры была найдена Л.В. Овсянниковым в работе [6]. В таблице 1 приведена система всех одномерных неподобных подалгебр из работы [6] вместе с их инвариантами. При этом D означает декартову систему координат, а C – цилиндрическую.

Таблица 1

№	Система координат	Оператор	Инвариантные независимые переменные	Инвариантные компоненты U_1, U_2
1	D	X_1	t, y, z	$U_1 = u_1, U_2 = u_2$
2	D	X_4	t, y, z	$U_1 = u_1 - \frac{x}{t}, U_2 = u_2 - \frac{x}{t}$
3	D	$\beta X_3 + X_4, \beta \neq 0$	$t, y, \beta x - zt$	$U_1 = u_1 - \frac{z}{\beta}, U_2 = u_2 - \frac{z}{\beta}$
4	C	$\delta X_1 + X_7, \delta \in \mathbb{R}$	$t, x - \delta\theta, r$	$U_1 = u_{1c}, U_2 = u_{2c}$
5	C	$\beta X_4 + X_7, \beta \neq 0$	$t, x - \beta t\theta, r$	$U_1 = u_{1c} - \beta\theta, U_2 = u_{2c} - \beta\theta$
6	D	X_{10}	x, y, z	$U_1 = u_1, U_2 = u_2$
7	D	$\beta X_4 + X_{10}, \beta \neq 0$	$x - \beta\frac{t^2}{2}, y, z$	$U_1 = u_1 - \beta t, U_2 = u_2 - \beta t$
8	C	$\beta X_4 + \alpha X_7 + X_{10}, \alpha \neq 0, \beta \in \mathbb{R}$	$\alpha t - \theta, x - \beta\frac{t^2}{2}, r$	$U_1 = u_{1c} - \beta t, U_2 = u_{2c} - \beta t$

Компоненты вектора скорости v_1, w_1, v_2, w_2 являются инвариантами во всех подалгебрах. Подмодели для подалгебр с номерами 4, 5, 8 удобней записывать в цилиндрических координатах. Для этого вводятся новые независимые переменные t, x, r, θ, где

$$y = r\cos\theta,\ \ z = r\sin\theta,\ \ r = \sqrt{y^2 + z^2},\ \ \theta = \operatorname{arctg}\frac{z}{y}.$$

Компоненты векторов скорости фаз в цилиндрических координатах $\vec{u}_{1c} = (u_{1c}, v_{1c}, w_{1c})$, $\vec{u}_{2c} = (u_{2c}, v_{2c}, w_{2c})$ вводятся заменами

$$u_{1c} = u_1,\ \ v_{1c} = v_1\cos\theta + w_1\sin\theta,\ \ w_{1c} = -v_1\sin\theta + w_1\cos\theta,$$

$$u_{2c} = u_2,\ \ v_{2c} = v_2\cos\theta + w_2\sin\theta,\ \ w_{2c} = -v_2\sin\theta + w_2\cos\theta.$$

Обратная замена

$$u_1 = u_{1c},\ \ v_1 = v_{1c}\cos\theta - w_{1c}\sin\theta,\ \ w_1 = v_{1c}\sin\theta + w_{1c}\cos\theta,$$

$$u_2 = u_{2c},\ \ v_2 = v_{2c}\cos\theta - w_{2c}\sin\theta,\ \ w_2 = v_{2c}\sin\theta + w_{2c}\cos\theta.$$

Здесь v_{ic} — радиальная в плоскости (y, z), а w_{ic} — окружная компоненты векторов скоростей фаз. Обозначения для плотностей и давления не изменяются. Вектора X_1, X_4, X_{10} не изменятся в цилиндрических координатах, вектор X_7 примет вид $X_7 = \partial_\theta$.

Выпишем инвариантные для подалгебр из оптимальной системы подмодели системы (1)-(4). При этом номер подмодели будет соответствовать номеру подалгебры в таблице.

3.1. Двумерные движения. Рассмотрим представление решения $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \rho_1, \rho_2) = (\vec{U}_1, \vec{U}_2, \rho_1, \rho_2)(t, y, z)$. Факторсистема уравнений подмодели:

$$D_1\rho_1 + \rho_1\left(\frac{\partial V_1}{\partial y} + \frac{\partial W_1}{\partial z}\right) = 0\,, \quad D_2\rho_2 + \rho_2\left(\frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial W_2}{\partial z}\right) = 0\,,$$

$$D_1\vec{U}_1 + \frac{m_1}{\rho_1}\mathrm{grad}_{(y,z)}P = -\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{\vec{U}_1 - \vec{U}_2}{\tau}\,,$$

$$D_2\vec{U}_2 + \frac{m_2}{\rho_2}\mathrm{grad}_{(y,z)}P = \frac{\vec{U}_1 - \vec{U}_2}{\tau}\,,$$

где

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial t} + V_1\frac{\partial}{\partial y} + W_1\frac{\partial}{\partial z},\ D_2 = \frac{\partial}{\partial t} + V_2\frac{\partial}{\partial y} + W_2\frac{\partial}{\partial z},$$

$$\vec{U}_1 = (U_1, V_1, W_1), \quad \vec{U}_2 = (U_2, V_2, W_2), \quad \mathrm{grad}_{(y,z)} = (0, \partial_y, \partial_z).$$

3.2. Галилеево-инвариантные движения. Решения имеют вид

$$u_1 = \frac{x}{t} + U_1(t, y, z),\ u_2 = \frac{x}{t} + U_2(t, y, z),$$

$$(v_1, w_1, v_2, w_2, \rho_1, \rho_2) = (V_1, W_1, V_2, W_2, \rho_1, \rho_2)(t, y, z),$$

а соответствующая факторсистема уравнений подмодели —

$$D_1\rho_1 + \rho_1\left(\frac{1}{t} + \frac{\partial V_1}{\partial y} + \frac{\partial W_1}{\partial z}\right) = 0\,, \quad D_2\rho_2 + \rho_2\left(\frac{1}{t} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial W_2}{\partial z}\right) = 0\,,$$

$$D_1U_1 + \frac{1}{t}U_1 = -\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{U_1 - U_2}{\tau}\,,$$

$$D_1V_1 + \frac{m_1}{\rho_1}\frac{\partial P(\rho_1, \rho_2)}{\partial y} = -\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{V_1 - V_2}{\tau}\,,$$

$$D_1W_1 + \frac{m_1}{\rho_1}\frac{\partial P(\rho_1, \rho_2)}{\partial z} = -\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{W_1 - W_2}{\tau}\,,$$

$$D_2U_2 + \frac{1}{t}U_2 = \frac{U_1 - U_2}{\tau}\,,$$

$$D_2V_2 + \frac{m_2}{\rho_2}\frac{\partial P(\rho_1, \rho_2)}{\partial y} = \frac{V_1 - V_2}{\tau}\,,$$

$$D_2W_2 + \frac{m_2}{\rho_2}\frac{\partial P(\rho_1, \rho_2)}{\partial z} = \frac{W_1 - W_2}{\tau}\,,$$

где

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial t} + V_1\frac{\partial}{\partial y} + W_1\frac{\partial}{\partial z}\,, \quad D_2 = \frac{\partial}{\partial t} + V_2\frac{\partial}{\partial y} + W_2\frac{\partial}{\partial z}\,.$$

3.3. Сдвиговые движения. Решения вида $u_1 = \dfrac{z}{\beta} + U_1(t,\xi,y)$, $u_2 = \dfrac{z}{\beta} + U_2(t,\xi,y)$, $(v_1, w_1, v_2, w_2, \rho_1, \rho_2) = (V_1, W_1, V_2, W_2, \rho_1, \rho_2)(t,\xi,y)$, $\xi = x - \dfrac{tz}{\beta}$ соответствуют факторсистеме:

$$D_1\rho_1 + \rho_1\left(\frac{\partial U_1}{\partial \xi} + \frac{\partial V_1}{\partial y} - \frac{t}{\beta}\frac{\partial W_1}{\partial \xi}\right) = 0\,,\ D_2\rho_2 + \rho_2\left(\frac{\partial U_2}{\partial \xi} + \frac{\partial V_2}{\partial y} - \frac{t}{\beta}\frac{\partial W_2}{\partial \xi}\right) = 0\,,$$

$$D_1U_1 + \frac{1}{\beta}W_1 + \frac{m_1}{\rho_1}\frac{\partial P(\rho_1,\rho_2)}{\partial \xi} = -\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{U_1 - U_2}{\tau}\,,$$

$$D_1V_1 + \frac{m_1}{\rho_1}\frac{\partial P(\rho_1,\rho_2)}{\partial y} = -\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{V_1 - V_2}{\tau}\,,$$

$$D_1W_1 - \frac{m_1}{\rho_1}\frac{t}{\beta}\frac{\partial P(\rho_1,\rho_2)}{\partial \xi} = -\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{W_1 - W_2}{\tau}\,,$$

$$D_2U_2 + \frac{1}{\beta}W_2 + \frac{m_2}{\rho_2}\frac{\partial P(\rho_1,\rho_2)}{\partial \xi} = \frac{U_1 - U_2}{\tau}\,,$$

$$D_2V_2 + \frac{m_2}{\rho_2}\frac{\partial P(\rho_1,\rho_2)}{\partial y} = \frac{V_1 - V_2}{\tau}\,,$$

$$D_2W_2 - \frac{m_2}{\rho_2}\frac{t}{\beta}\frac{\partial P(\rho_1,\rho_2)}{\partial \xi} = \frac{W_1 - W_2}{\tau}\,,$$

где

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial t} + (U_1 - \frac{t}{\beta}W_1)\frac{\partial}{\partial \xi} + V_1\frac{\partial}{\partial y}\,,\ D_2 = \frac{\partial}{\partial t} + (U_2 - \frac{t}{\beta}W_2)\frac{\partial}{\partial \xi} + V_2\frac{\partial}{\partial y}\,.$$

3.4. Винтовые движения. Решения, имеющие вид

$$(u_{1c}, v_{1c}, w_{1c}, u_{2c}, v_{2c}, w_{2c}, \rho_1, \rho_2) = (U_1, V_1, W_1, U_2, V_2, W_2, \rho_1, \rho_2)(t,\xi,r)\,, \quad \xi = x - \delta\theta,$$

соответствуют факторсистеме уравнений подмодели

$$D_1\rho_1 + \rho_1\left(\frac{\partial U_1}{\partial \xi} + \frac{\partial V_1}{\partial r} + \frac{V_1}{r} - \frac{\delta}{r}\frac{\partial W_1}{\partial \xi}\right) = 0\,,$$

$$D_2\rho_2 + \rho_2\left(\frac{\partial U_2}{\partial \xi} + \frac{\partial V_2}{\partial r} + \frac{V_2}{r} - \frac{\delta}{r}\frac{\partial W_2}{\partial \xi}\right) = 0\,,$$

$$D_1U_1 + \frac{m_1}{\rho_1}P_\xi = -\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{U_1 - U_2}{\tau}\,,$$

$$D_1V_1 - \frac{W_1^2}{r} + \frac{m_1}{\rho_1}P_r = -\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{V_1 - V_2}{\tau}\,,$$

$$D_1W_1 + \frac{W_1V_1}{r} - \frac{\delta}{r}\frac{m_1}{\rho_1}P_\xi = -\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{W_1 - W_2}{\tau}\,,$$

$$D_2U_2 + \frac{m_2}{\rho_2}P_\xi = \frac{U_1 - U_2}{\tau}\ ,$$

$$D_2V_2 - \frac{W_2^2}{r} + \frac{m_2}{\rho_2}P_r = \frac{V_1 - V_2}{\tau}\ ,$$

$$D_2W_2 + \frac{W_2V_2}{r} - \frac{\delta}{r}\frac{m_2}{\rho_2}P_\xi = \frac{W_1 - W_2}{\tau}\ ,$$

где

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial t} + (U_1 - \frac{\delta}{r}W_1)\frac{\partial}{\partial \xi} + V_1\frac{\partial}{\partial r},\ D_2 = \frac{\partial}{\partial t} + (U_2 - \frac{\delta}{r}W_2)\frac{\partial}{\partial \xi} + V_2\frac{\partial}{\partial r}\ .$$

3.5. Обобщенные вращательно-симметричные движения. Представление решения $u_{1c} = \beta\theta + U_1(t,\xi,r)$, $u_{2c} = \beta\theta + U_2(t,\xi,r)$, $\xi = x - \beta t\theta$, $(v_{1c}, w_{1c}, v_{2c}, w_{2c}, \rho_1, \rho_2) = (V_1, W_1, V_2, W_2, \rho_1, \rho_2)(t,\xi,r)$.

Факторсистема имеет вид

$$D_1\rho_1 + \rho_1\left(\frac{\partial U_1}{\partial \xi} + \frac{\partial V_1}{\partial r} + \frac{V_1}{r} - \beta\frac{t}{r}\frac{\partial W_1}{\partial \xi}\right) = 0\,,$$

$$D_2\rho_2 + \rho_2\left(\frac{\partial U_2}{\partial \xi} + \frac{\partial V_2}{\partial r} + \frac{V_2}{r} - \beta\frac{t}{r}\frac{\partial W_2}{\partial \xi}\right) = 0\,,$$

$$D_1U_1 + \beta\frac{W_1}{r} + \frac{m_1}{\rho_1}P_\xi = -\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{U_1 - U_2}{\tau}\ ,$$

$$D_1V_1 - \frac{W_1^2}{r} + \frac{m_1}{\rho_1}P_r = -\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{V_1 - V_2}{\tau}\ ,$$

$$D_1W_1 + \frac{W_1V_1}{r} - \beta\frac{m_1}{\rho_1}\frac{t}{r}P_\xi = -\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{W_1 - W_2}{\tau}\ ,$$

$$D_2U_2 + \beta\frac{W_2}{r} + \frac{m_2}{\rho_2}P_\xi = \frac{U_1 - U_2}{\tau}\ ,$$

$$D_2V_2 - \frac{W_2^2}{r} + \frac{m_2}{\rho_2}P_r = \frac{V_1 - V_2}{\tau}\ ,$$

$$D_2W_2 + \frac{W_2V_2}{r} - \beta\frac{m_2}{\rho_2}\frac{t}{r}P_\xi = \frac{W_1 - W_2}{\tau}\ ,$$

где

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial t} + (U_1 - \beta\frac{t}{r}W_1)\frac{\partial}{\partial \xi} + V_1\frac{\partial}{\partial r},\ D_2 = \frac{\partial}{\partial t} + (U_2 - \beta\frac{t}{r}W_2)\frac{\partial}{\partial \xi} + V_2\frac{\partial}{\partial r}\ .$$

3.6. Стационарные течения. Решения вида

$$(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \rho_1, \rho_2) = (\vec{U}_1, \vec{U}_2, \rho_1, \rho_2)(x,y,z)$$

соответствуют факторсистеме

$$D_1\rho_1 + \rho_1 \mathrm{div}\vec{U}_1 = 0\,, \quad D_2\rho_2 + \rho_2 \mathrm{div}\vec{U}_2 = 0\,,$$

$$D_1\vec{U}_1 + \frac{m_1}{\rho_1}\mathrm{grad}P = -\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{\vec{U}_1 - \vec{U}_2}{\tau}\,,$$

$$D_2\vec{U}_2 + \frac{m_2}{\rho_2}\mathrm{grad}P = \frac{\vec{U}_1 - \vec{U}_2}{\tau}\,,$$

где

$$D_1 = U_1\frac{\partial}{\partial x} + V_1\frac{\partial}{\partial y} + W_1\frac{\partial}{\partial z}\,, \quad D_2 = U_2\frac{\partial}{\partial x} + V_2\frac{\partial}{\partial y} + W_2\frac{\partial}{\partial z}\,.$$

3.7. Стационарные течения в однородном поле сил, направленных параллельно оси x. Представление решения $u_1 = \beta t + U_1(\xi, y, z)$, $u_2 = \beta t + U_2(\xi, y, z)$, $(v_1, w_1, v_2, w_2, \rho_1, \rho_2) = (V_1, W_1, V_2, W_2, \rho_1, \rho_2)(\xi, y, z)$, $\xi = x - \beta\frac{t^2}{2}$. Факторсистема уравнений подмодели:

$$D_1\rho_1 + \rho_1\left(\frac{\partial U_1}{\partial \xi} + \frac{\partial V_1}{\partial y} + \frac{\partial W_1}{\partial z}\right) = 0\,,$$

$$D_2\rho_2 + \rho_2\left(\frac{\partial U_2}{\partial \xi} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial W_2}{\partial z}\right) = 0\,,$$

$$D_1U_1 + \beta + \frac{m_1}{\rho_1}\frac{\partial P(\rho_1,\rho_2)}{\partial \xi} = -\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{U_1 - U_2}{\tau}\,,$$

$$D_1V_1 + \frac{m_1}{\rho_1}\frac{\partial P(\rho_1,\rho_2)}{\partial y} = -\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{V_1 - V_2}{\tau}\,,$$

$$D_1W_1 + \frac{m_1}{\rho_1}\frac{\partial P(\rho_1,\rho_2)}{\partial z} = -\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{W_1 - W_2}{\tau}\,,$$

$$D_2U_2 + \beta + \frac{m_2}{\rho_2}\frac{\partial P(\rho_1,\rho_2)}{\partial \xi} = \frac{U_1 - U_2}{\tau}\,,$$

$$D_2V_2 + \frac{m_2}{\rho_2}\frac{\partial P(\rho_1,\rho_2)}{\partial y} = \frac{V_1 - V_2}{\tau}\,,$$

$$D_2W_2 + \frac{m_2}{\rho_2}\frac{\partial P(\rho_1,\rho_2)}{\partial z} = \frac{W_1 - W_2}{\tau}\,,$$

где

$$D_1 = U_1\frac{\partial}{\partial \xi} + V_1\frac{\partial}{\partial y} + W_1\frac{\partial}{\partial z}\,, \quad D_2 = U_2\frac{\partial}{\partial \xi} + V_2\frac{\partial}{\partial y} + W_2\frac{\partial}{\partial z}\,.$$

3.8. Обобщенные вращательные движения в однородном поле сил, направленных параллельно оси x. Решения вида $u_{1c} = \beta t + U_1(\tau, \xi, r)$,

$u_{2c} = \beta t + U_2(\tau,\xi,r)$, $(v_{1c}, w_{1c}, v_{2c}, w_{2c}, \rho_1, \rho_2) = (V_1, W_1, V_2, W_2, \rho_1, \rho_2)(\tau,\xi,r)$, $s = \alpha t - \theta$, $\xi = x - \beta\frac{t^2}{2}$, соответствуют факторсистеме уравнений подмодели

$$D_1\rho_1 + \rho_1\left(\frac{\partial U_1}{\partial\xi} + \frac{\partial V_1}{\partial r} + \frac{V_1}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial W_1}{\partial s}\right) = 0\,,$$

$$D_2\rho_2 + \rho_2\left(\frac{\partial U_2}{\partial\xi} + \frac{\partial V_2}{\partial r} + \frac{V_2}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial W_2}{\partial s}\right) = 0\,,$$

$$D_1U_1 + \beta + \frac{m_1}{\rho_1}P_\xi = -\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{U_1 - U_2}{\tau}\,,$$

$$D_1V_1 - \frac{W_1^2}{r} + \frac{m_1}{\rho_1}P_r = -\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{V_1 - V_2}{\tau}\,,$$

$$D_1W_1 + \frac{W_1V_1}{r} - \frac{m_1}{\rho_1}\frac{1}{r}P_s = -\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{W_1 - W_2}{\tau}\,,$$

$$D_2U_2 + \beta + \frac{m_2}{\rho_2}P_\xi = \frac{U_1 - U_2}{\tau}\,,$$

$$D_2V_2 - \frac{W_2^2}{r} + \frac{m_2}{\rho_2}P_r = \frac{V_1 - V_2}{\tau}\,,$$

$$D_2W_2 + \frac{W_2V_2}{r} - \frac{m_2}{\rho_2}\frac{1}{r}P_s = \frac{W_1 - W_2}{\tau}\,,$$

где

$$D_1 = \left(\alpha - \frac{W_1}{r}\right)\frac{\partial}{\partial s} + U_1\frac{\partial}{\partial\xi} + V_1\frac{\partial}{\partial r}\,,\quad D_2 = \left(\alpha - \frac{W_2}{r}\right)\frac{\partial}{\partial s} + U_2\frac{\partial}{\partial\xi} + V_2\frac{\partial}{\partial r}\,.$$

4. Некоторые решения системы уравнений динамики газовзвеси. Прямой проверкой можно убедиться, что функции

$$\rho_1 = \frac{c_1}{t},\ \rho_2 = \frac{c_2}{t},$$

$$u_1 = \frac{x}{t} + \frac{1}{t}\left(\frac{c_2}{c_1 + c_2}\varphi(y,z)\exp\left\{-\left(\frac{c_1 + c_2}{c_1}\right)\frac{t}{\tau}\right\} + \psi(y,z)\right),$$

$$u_2 = \frac{x}{t} + \frac{1}{t}\left(-\frac{c_1}{c_1 + c_2}\varphi(y,z)\exp\left\{-\left(\frac{c_1 + c_2}{c_1}\right)\frac{t}{\tau}\right\} + \psi(y,z)\right),$$

$$v_1 = w_1 = 0,\ v_2 = w_2 = 0$$

задают решение системы (1)-(4), инвариантное относительно галилеевских преобразований. Также найдены следующие решения системы.

I.

$$\vec{u}_2 = \vec{u}_1,\ \rho_1 = \frac{c_1}{(t + c_3)(t + c_5)(t + c_7)},\ \rho_2 = c_2\,\rho_1,$$

$$u_1 = \frac{x}{t + c_3} + \frac{c_4}{t + c_3},\ v_1 = \frac{y}{t + c_5} + \frac{c_6}{t + c_5},\ w_1 = \frac{z}{t + c_7} + \frac{c_8}{t + c_7}.$$

II.

$$\rho_1 = \rho_2 = \frac{c_1}{(t+c_3)(t+c_6)(t+c_9)},$$

$$u_1 = \frac{x}{t+c_3} + \frac{c_4}{t+c_3} - \frac{c_5}{t+c_3}\exp\left\{-\frac{2}{\tau}t\right\},\ u_2 = \frac{x}{t+c_3} + \frac{c_4}{t+c_3} + \frac{c_5}{t+c_3}\exp\left\{-\frac{2}{\tau}t\right\},$$

$$v_1 = \frac{y}{t+c_6} + \frac{c_7}{t+c_6} - \frac{c_8}{t+c_6}\exp\left\{-\frac{2}{\tau}t\right\},\ v_2 = \frac{y}{t+c_6} + \frac{c_7}{t+c_6} + \frac{c_8}{t+c_6}\exp\left\{-\frac{2}{\tau}t\right\},$$

$$w_1 = \frac{z}{t+c_9} + \frac{c_{10}}{t+c_9} - \frac{c_{11}}{t+c_9}\exp\left\{-\frac{2}{\tau}t\right\},\ w_2 = \frac{z}{t+c_9} + \frac{c_{10}}{t+c_9} + \frac{c_{11}}{t+c_9}\exp\left\{-\frac{2}{\tau}t\right\}.$$

5. Заключение. Полученные подмодели будут использоваться при поиске инвариантных решений системы, для качественного исследования конкретных движений газовой взвеси: поиск характеристик, областей гиперболичности, траекторий движения. Найденные решения могут быть использованы как для апробации численных методов, так и для постановки задачи Коши.

Литература

1. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений / М.: Наука, 1978. – 400 с.
2. Федоров А.В, Фомин П.А., Фомин В.М., Тропин Д.А., Чен Дж.-Р. Физико - математическое моделирование подавления детонации облаками мелких частиц / Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2011. – 156 с.
3. Панов А.В. Групповая классификация системы уравнений механики двухфазной среды // Вестник Челяб. гос. ун-та. Математика. Механика. Информатика. – 2011. – Вып.13. – С.38-48.
4. Федоров В.Е., Панов А.В. Инвариантные и частично инвариантные решения системы уравнений механики двухфазной среды // Вестник Челяб. гос. университета. Физика. – 2011. – Вып.11. – С.65-69.
5. Овсянников Л.В. Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // Прикладная математика и механика. – 1994. – 58,Вып.4. – С.29-55.
6. Ovsyannikov L.V. On the optimal system of subalgebras // Lie Groups and Their Appl. – 1994. – 1,№.2. – P.18-26.

INVARIANT SUBMODELS OF EQUATIONS SYSTEM OF MIXTURE DYNAMICS OF GAS AND SMALL PARTICLES IN THE CASE OF THREE SPATIAL VARIABLES

A.V. Panov

Chelyabinsk State University,
Bratyev Kashirinyh St., 129, Chelyabinsk, 454001, Russia , e-mail:gjd@bk.ru

Abstract. The equations system of mixture dynamics of gas and small particles is investigated by means of group analisys methods in the case of three spatial variables. The kernel of principal Lie algebras is found. Optimal system of one-dimensional subalgebras is written and their invariant submodels are extracted. Some exact solutions of the system are calculated.

Key words: gas and particles mixture, symmetry Lie algebra, optimal system of subalgebras, admitted group, invariant solution, submodel.