MSC 34H05

ЗАДАЧА СИНТЕЗА ОГРАНИЧЕННЫХ УПРАВЛЕНИЙ

В.И. Коробов, О.А. Тарасова

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: vkorobov@univer.kharkov.ua,
Tarasova_O@bsu.edu.ru

Аннотация. В работе исследованы вопросы решения задачи синтеза, построены примеры стабилизируемых систем.

Ключевые слова: задача синтеза, управляемая система, стабилизируемая система.

1. Введение. Математическая теория управления начала интенсивно развиваться в середине XX столетия. Ее возникновение связано с необходимостью решать новые на то время задачи, задачи управления механическими объектами, движение которых описывается дифференциальными уравнениями. Дальнейшее развитие теории управления связано как с прикладными задачами, так и с исследованием задач управления как чисто математических. Развитие математической теории управляемых процессов привело к возникновению новых направлений в теории дифференциальных уравнений, что в значительной мере определяет ее настоящее состояние. Одним из таких направлений стал допустимый позиционный синтез управления дифференциальных уравнений.В этой области проводились многочисленные исследования российскими и зарубежными авторами. Я отмечу работы: Скляра Г.М. , Благодатского В.И., Понтрягина Л.С., Коробова В.И.

Задача допустимого позиционного синтеза управления для системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x,u)\,, \quad x \in \mathbb{R}^n\,, \quad u \in \Omega \subset \mathbb{R}^r$$

состоит в построении управления $u = u(x)$, которое удовлетворяет заданным ограничениям $u(x) \in \Omega$, так что, траектория замкнутой системы

$$\dot{x} = f(x, u(x))\,,$$

начинающая в произвольной точке x_0 из некоторой окрестности Q начала координат, попадает в начало координат за конечное время $T(x_0)$. Мы рассматриваем случай, когда начало координат является точкой покоя системы, $f(0,u_0) = 0$ при $u_0 \in \Omega$. Если $Q = \mathbb{R}^n$, то синтез называется глобальным, а если $Q \neq \mathbb{R}^n$, то локальным [1]. Поскольку через конечную точку проходит бесконечное число траекторий и время движения по каждой траектории в эту точку конечно, то в силу теоремы о единственности решения правая часть уравнения $\dot{x} = f(x,u)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \Omega \subset \mathbb{R}^r$, с выбранным управление не может удовлетворять условию Липшица в рассматриваемой окрестности. Поэтому управление, решающее задачу синтеза, не может быть гладким, линейным, как в задаче стабилизации. Наличие ограничений на управление накладывает дополнительные сложности на построение такого управление.

2. Методы решения задачи синтеза. Задача синтеза ограниченных управлений, оптимальных но быстродействию состоит в следующем. Для управляемой системы

$$\dot{x} = f(t,x,u)\,, \quad x \in \mathbb{R}^n\,, \quad u \in \Omega \subset \mathbb{R}^r\,, \quad 0 \in \Omega \tag{1}$$

требуется найти управление $u = (t, x)$, принимающее значения в множестве Ω, такое, что траектория системы

$$\dot{x} = f(t, x, u(t, x)), \tag{2}$$

начинающаяся в произвольной точке x_0, оканчивается в заданной точке x_1 за минимальное время. В этом случае управление $u(t, x)$ является оптимальным по быстродействию и удовлетворяет уравнению Беллмана

$$\min_{u\in\Omega}\Big(\frac{\partial T(t,x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T(t,x)}{\partial x_i}f_i(t,x,u)\Big) = -1, \tag{3}$$

где $T(t_0, x_0)$- из произвольной точки x_0 в момент времени t_0 в фиксированную точку x_1 по траектории системы (2), отвечающей управлению $u(t, x)$. Обозначим через $\dot{T}(t, x)$ для (1)и $\dot{T}(t, x)$ для (2) производные времени движения в силу системы (1) и (2), соответственно. Тогда равенство (3) будит

$$\min_{u\in\Omega}\dot{T}(t,x) = \dot{T}(t,x) = -1$$

и означает, что производная в силу системы (2), времени быстродействия $T(t, x)$ из произвольной точки x в заданную точку x_1 равна -1. Это равенство выполняется в точках существования производных. Для решения задачи синтеза также сформулирован допустимы принцип максимума [1], который по форме подобен принципу максимума в оптимальном управлении, но при этом указывается сопряженная функция, которая является функцией фазовых координат, а не времени, что позволяет определять позиционное управление.

3. Стабилизация системы относительно подпространства. В качестве примера рассмотрим линейную управляемую систему [5]

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 - x_2 + u, \\ \dot{x}_2 = 3x_1 - 2x_2 + u. \end{cases} \tag{4}$$

Для этой системы $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Рассмотрим прямоугольную матрицу $H = (2, 1)$, для которой $\operatorname{rank} H = l = 1$. Тогда сопряженная матрица H^* представляет собой столбец $h_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Собственные значения матрицы A^* равны ± 1. Соответствующие им собственные вектора (-3,1) и (-1,1) и поэтому $K^- = (-1, 1)$.

2. $r = \operatorname{rank}(Hb, HAb) = \operatorname{rank}(3, 3) = 1$. Обозначим вектор $\xi = \omega_1 h_1$, где ω_1 определяется из уравнения $(\xi, b) = (\xi, Ab) = 0$. Это дает $3\omega_1 = 0$ и поэтому $\omega_1 = 0$.

3. Введем вектор $c = \alpha_1 h_1$ такой, что α_1 определяется уравнением $\alpha_1 : (c, b) = 3\alpha_1 \neq 0$ так, что $(c, b) = 3$, откуда $\alpha_1 = 1, c = h_1, j = 0$.

4. Так как $H^* \subset L(c, A^*c) + K^- = \mathbb{R}^2$, то стабилизация возможна.

Для построения стабилизирующего управления выберем такие постоянные γ_1, чтобы уравнение относительно $\mu : \mu + \gamma_1 = 0$ имело корни μ с $\operatorname{Re}\mu < 0$. Пусть $\gamma_1 = 1$. Тогда управление имеет вид:

$$u(x) = \frac{1}{(c,b)}[-(c, Ax) - \gamma_1(c, x)] = \frac{1}{3}(-9x_1 + 3x_2).$$

Следовательно, матрица Q имеет вид $Q = (-3, 1)$.

Подставим полученное управление в систему (4). Тогда система $\dot{x} = (A + bQ)x$ имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1, \\ \dot{x}_2 = -x_2. \end{cases}$$

Ее общее решение:

$$\begin{cases} x_1 = x_1^0 e^{-t}, \\ x_2 = x_2^0 e^{-t}, \end{cases}$$

где $x_1^0 = x_1(0), x_2^0 = x_2(0)$. Тогда $Hx = e^{-t}(2x_1^0 + x_2^0) \to 0$ при $t \to \infty$.

References

1. Коробов В.И. Метод функции управляемости // М.-Ижевск: НИЦ, 2007. – С.7,13.
2. Коробов В.И. Критерии управляемости линейной системы на подпространство // Вестник Харьковского университета. – 1981. – №221, Вып.46. – С.3.
3. Благодатских В.И. Введение в оптимальное управление / М: Высшая школа, 2001.
4. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления / М: Наука, 1972.
5. Коробов В.И., Луценко А.В., Подольский Е.Н. Стабилизация линейной автономной системы относительно подпространства // 1975. С.117-122.

PROBLEM OF SYNTHESIS OF BOUNDED CONTROLS

V.I. Korobov, O.A. Tarasova

Belgorod State National Research University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: vkorobov@univer.kharkov.ua,
Tarasova_O@bsu.edu.ru

Abstract. Some problems of control synthesis are studied and some examples of stabilized systems are built.

Key words: synthesis problem, stabilized system, control system.