На правах рукописи

Балахнёв Максим Юрьевич

Классификация интегрируемых эволюционных векторных дифференциальных уравнений третьего порядка

01.01.02 – дифференциальные уравнения.

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук.

Белгород – 2009

Работа выполнена в Орловском государственном техническом университете

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор Мешков Анатолий Георгиевич.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Зайцев Валентин Федорович.

доктор физико-математических наук,
доцент Боровских Алексей Владиславович.

Ведущая организация: Томский государственный университет.

Защита состоится "27"января 2009 г., в 15-30, на заседании диссертационного совета Д 212.015.08 при Белгородском государственном университете по адресу: 308007, г. Белгород, ул. Студенческая, 14, корп. 1 БелГУ, аудитория 407.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Белгородского государственного университета.

Автореферат разослан " 15 " декабря 2008г.

Учёный секретарь
диссертационного совета
Д 212.015.08 Прядиев В.Л.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Классификация точно интегрируемых нелинейных дифференциальных эволюционных уравнений и систем, а также изучение различных их свойств, входит в число приоритетных направлений научных исследований РАН[1] и является широко известной тематикой в исследованиях большого числа современных математиков и физиков как в нашей стране, так и за рубежом. Интерес к этому направлению объясняется тем, что интегрируемые нелинейные эволюционные уравнения и системы имеют важные приложения в математике и физике. Изучение нелинейных точно интегрируемых моделей позволило обнаружить новые физические явления в самых разных областях: волны в различных средах, волны на поверхности жидкости, различные явления в полупроводниках, в твердых телах, в световодах, в плазме, в квантовой физике. Этим объясняется то, что открытие каждого нового точно интегрируемого нелинейного уравнения признается многими математиками и физиками важным научным достижением.

В диссертации проводится классификация интегрируемых дифференциальных эволюционных векторных уравнений с двумя независимыми переменными

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = \frac{\partial^3 \boldsymbol{u}}{\partial x^3} + f_2 \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial x^2} + f_1 \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} + f_0 \boldsymbol{u}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{u}(x,t)$ – неизвестный вектор, принадлежащий некоторому N-мерному векторному пространству V, а функции f_i зависят только от скалярных произведений

$$u_{[i,j]} = (\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j), \quad \tilde{u}_{[i,j]} = \langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j \rangle, \quad 0 \leqslant i \leqslant j \leqslant 2, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{u}_k = \partial^k \boldsymbol{u}/\partial x^k$, а $(\cdot,\cdot)$ и $\langle \cdot,\cdot \rangle$ – различные скалярные произведения в V. При этом мы используем только самые общие свойства скалярного произведения – билинейность, симметричность и непрерывность, то есть для нас несущественна реализация метрик в V. Конечномерность или вещественность пространства V также не важны.

Актуальность диссертационной темы подтверждается тем, что исследование выполнено по тематике, которая признается актуальной и важной не только Российской академией наук, но и математиками всего мира. Многие российские и международные журналы (например Теоретическая и математическая физика, Функциональный анализ, Известия РАН, Математические заметки, Communications in Mathematical

[1]План фундаментальных исследований Российской академии наук на период до 2025 года. Стр. 14, раздел 1.2, пункт 1.2.1. М.: Наука, 2005.

Physics, Inverse Problems, Journal of Mathematical Physics и др.) регулярно публикуют статьи, посвященные проблеме точной интегрируемости. Существуют даже журналы, публикующие статьи преимущественно по указанной тематике (Journal of Nonlinear Mathematical Physics, Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications).

Цель и задачи работы. Диссертация продолжает серию исследований, посвященных симметрийной классификациии интегрируемых уравнений и систем. Общей целью является получение списка интегрируемых эволюционных векторных уравнений вида (1). Перечень решаемых в диссертации задач выглядит следующим образом:

1) классификация интегрируемых уравнений (1) при различных ограничениях на коэффициенты f_i;

2) доказательство интегрируемости каждого уравнения: построение авто-преобразования Беклунда для него или поиск дифференциальной подстановки связывающей его с известным интегрируемым уравнением;

3) исследование возможности построения решений.

Методика исследования. Необходимые условия интегрируемости для эволюционных систем общего вида были сформулировны Н.Х. Ибрагимовым и А.Б. Шабатом (1980). Позднее В.В. Соколовым и А.Г. Мешковым (2002) была предложена модификация симметрийного подхода для векторных уравнений. В частности, для уравнений вида (1) необходимые условия интегрируемости имеют вид законов сохранения

$$D_t\rho_n = D_x\theta_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{3}$$

Здесь ρ_n, θ_n функции переменных $u_{[i,j]}$, $\tilde{u}_{[i,j]}$, $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$, D_x оператор полной производной по x, D_t оператор эволюционного дифференцирования. Главной идеей для построении бесконечной серии законов сохранения является переход от $(-D_t + D_x^3 + f_2D_x^2 + f_1D_x + f_0)\boldsymbol{u} = 0$ к скалярному уравнению $(-D_t + D_x^3 + f_2D_x^2 + f_1D_x + f_0)\psi = 0$ и рассмотрению его как временно́го уравнения Лакса для (1). Положив в последнем

$$\psi = \exp\left(\int R\,dx\right),$$

мы получаем уравнение типа Риккати

$$(D_x + R)^2R + f_2(D_x + R)R + f_1R + f_0 = F, \tag{4}$$

где R и F связаны уравнением неразрывности $D_tR = D_xF$.

Если искать решение уравнения (4) в виде ВКБ-разложений

$$R = \lambda^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty}\rho_n\lambda^n, \quad F = \lambda^{-3} + \sum_{n=0}^{\infty}\theta_n\lambda^n, \tag{5}$$

то уравнения (4) и (5) приводят к следующей реккурентной формуле:

$$\rho_{n+2} = \frac{1}{3}\Big[\theta_n - f_0\,\delta_{n,0} - 2\,f_2\,\rho_{n+1} - f_2\,D_x\rho_n - f_1\,\rho_n\Big]$$

$$- \frac{1}{3}\Big[f_2\,\sum_{s=0}^{n}\rho_s\,\rho_{n-s} + \sum_{0\leqslant s+k\leqslant n}\rho_s\,\rho_k\,\rho_{n-s-k} + 3\sum_{s=0}^{n+1}\rho_s\,\rho_{n-s+1}\Big]$$

$$- D_x\Big[\rho_{n+1} + \frac{1}{2}\sum_{s=0}^{n}\rho_s\,\rho_{n-s} + \frac{1}{3}D_x\rho_n\Big], \quad n \geqslant 0.$$

Здесь $\delta_{i,j}$ символ Кронекера, ρ_0 и ρ_1 определены формулами:

$$\rho_0 = -\frac{1}{3}\,f_2, \quad \rho_1 = \frac{1}{9}\,f_2^2 - \frac{1}{3}\,f_1 + \frac{1}{3}\,D_x\,f_2. \tag{6}$$

Теперь, используя (5), мы получаем из уравнения $D_tR = D_xF$ бесконечную серию законов сохранения $D_t\rho_n = D_x\theta_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Реккурентная формула позволяет находить функции θ_n из $D_t\rho_n = D_x\theta_n$, поскольку в выражение для ρ_n входят θ_i, $i \leqslant n-2$, но не входит θ_n. Например, $\rho_2 = -\frac{1}{3}\,f_0 + \frac{1}{3}\,\theta_0 - \frac{2}{81}\,f_2^3 + \frac{1}{9}\,f_1\,f_2 - D_x\big(\frac{1}{9}\,f_2^2 + \frac{2}{9}\,D_x\,f_2 - \frac{1}{3}\,f_1\big)$, и так далее.

Условия $D_t\rho_n = D_x\theta_n$ позволяют найти явный вид функций f_i, так как ρ_n определяются через коэффициенты f_i уравнения (1). Другими словами, условия $D_t\rho_n = D_x\theta_n$ являются уравнениями для определения f_i. В частности, четные канонические плотности тривиальны, то есть $\rho_{2n} = D_x\chi_n$, $n = 0, 1, \ldots$, что влечет, согласно (6), $f_2 \in \mathrm{Im}D_x$ (Im=образ). Таким образом, не теряя общности можно считать $f_2 = 3/2\,D_x(\ln f)$, где $f = f(u_{[i,j]}, \tilde{u}_{[i,j]})$, $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant 1$.

В качестве доказательства интегрируемости полученных в результате классификации уравнений мы построили авто-преобразования Беклунда для них. Авто-преобразованием Беклунда для уравнения (1) называют выражение вида $\boldsymbol{u}_x = \mathbb{B}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_x; \lambda)$, где λ – параметр, а $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ различные решения этого уравнения. Используя авто-преобразования Беклунда мы нашли, например, периодические решения, одно-, двух-, и трехсолитонное решения векторного обобщения уравнения Ландау-Лифшица.

Научная новизна подтверждается тем, что основные результаты опубликованы в журналах РАН, а также известных зарубежных журналах.

Результатом классификации являются новые интегрируемые уравнения вида (1). Изучены преобразования типа Миуры для векторных уравнений, что позволило систематизировать полученные списки.

Предложена модификация известного метода построения решений основанного на предположении коммутативности диаграммы Бианки. Показано, для построения формулы нелинейной суперпозиции решений векторного уравнения необходимо использовать квазилокальные переменные. Найдены периодические и солитонные решения векторного обобщения уравнения Ландау-Лифшица.

Апробация работы. Основные результаты диссертации опубликованы в семи работах и докладывались на международной конференции "Симметрия в нелинейной математической физике"(Киев, 2005), на семинарах кафедры высшей математики Орловского государственного технического университета, кафедры информатики Орловского государственного университета, а также в центре MuPad (университет Падерборн, Германия, руководитель – профессор Б. Фуксштайнер).

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка используемых источников. Общий объем диссертации 127 страниц.

Публикации. Основные результаты диссертации содержатся в 7 публикациях. Из совместных работ в диссертацию вошли только результаты принадлежащие соискателю. В работах [5] и [7] соавтору принадлежит постановка задачи, а соискателю полученные результаты.

Краткое содержание работы. Во "Введении"дается общая характеристика истории возникновения эволюционных уравнений и методов анализа их различных свойств. Приведен обзор публикаций, посвященных классификации и изучению свойств различных интегрируемых уравнений. Даны основные определения, приведена постановка задачи и описан метод ее решения.

Глава 1 посвящена классификации анизотропных уравнений интегрируемых на n-мерной сфере ($\boldsymbol{u}^2 = 1$). Результаты сформулированы в виде теоремы, которая включает в себя 11 интегрируемых уравнений. В их числе, анизотроное обобщение уравнения Шварц-КдФ:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_t = \boldsymbol{u}_3 + \frac{3}{2}\left(\ln \frac{\langle \boldsymbol{u}\rangle^2}{\langle \boldsymbol{u}\rangle^2\langle \boldsymbol{u}_1\rangle^2 - \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_1\rangle^2}\right)_x (\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_1^2\boldsymbol{u}) + 3\,(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)\,\boldsymbol{u} + \\ + \frac{3}{2}\frac{\langle \boldsymbol{u}\rangle^2}{\langle \boldsymbol{u}\rangle^2\langle \boldsymbol{u}_1\rangle^2 - \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_1\rangle^2}\left(\langle \boldsymbol{u}_2\rangle^2 - \frac{\left(\langle \boldsymbol{u}\rangle^2\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_1\rangle_x - \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_1\rangle^2\right)^2}{\langle \boldsymbol{u}\rangle^6}\right)\boldsymbol{u}_1; \end{aligned} \tag{7}$$

и векторное обобщение высшей симметрии уравнения Ландау-Лифшица:

$$\boldsymbol{u}_t = \boldsymbol{u}_3 + \frac{3}{2}\left(\boldsymbol{u}_1^2 + \langle \boldsymbol{u}\rangle^2\right)\boldsymbol{u}_1 + 3\,(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)\,\boldsymbol{u}, \tag{8}$$

где $\boldsymbol{z}^2 = (\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z})$, $\langle \boldsymbol{z}\rangle^2 = \langle \boldsymbol{z},\, \boldsymbol{z}\rangle$.

В качестве доказательства теоремы сформулированы леммы, содержащие описание этапов классификации. Для всех полученных уравнений построены авто-преобразования Беклунда. В частности, для решений $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ уравнения (8) впервые найдено следующее авто-преобразование Беклунда

$$\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{v}_1 = 2\big((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_1)(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) + f\,(\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\,\boldsymbol{u})\big)(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})^{-2},$$

где $f^2 = \langle \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\rangle^2 + \lambda\,(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})^2$, λ – параметр.

Для уравнения (7) получено авто-преобразование Беклунда в виде

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\mu\,\langle \boldsymbol{v}\rangle^2(\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle + g\langle \boldsymbol{v}\rangle^2)(\boldsymbol{v}_1 - (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_1)\,\boldsymbol{u})}{\langle \boldsymbol{v}\rangle^2\,\langle \boldsymbol{v}_1\rangle^2 - \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_1\rangle^2} + \\ + \frac{\mu\,\langle \boldsymbol{v}\rangle^2(\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_1\rangle + g\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_1\rangle)(\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle\,\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v})}{\langle \boldsymbol{v}\rangle^2\,\langle \boldsymbol{v}_1\rangle^2 - \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_1\rangle^2},\ g^2 = \frac{\langle \boldsymbol{u}\rangle^2}{\langle \boldsymbol{v}\rangle^2}.$$

Глава 2 содержит представленную двумя теоремами классификацию уравнений интегрируемых в $\mathbb{R}^n$. Первый раздел содержит теорему о 13 уравнениях вида $\boldsymbol{u}_t = \boldsymbol{u}_3 + f_1\boldsymbol{u}_1 + f_0\,\boldsymbol{u}$, ее схематичное доказательство и авто-преобразования Беклунда для них. Второй раздел состоит из теоремы с перечнем 24 интегрируемых изотропных уравнений (1) при условии $f_0 = f_0(\boldsymbol{u},\,\boldsymbol{u}_1)$, найдены дифференциальные подстановки для некоторых уравнений, для остальных авто-преобразования Беклунда. Например, в оба указанных класса входят векторные обобщения мКдФ:

$$\boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{u}_3 - 6\,(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})\boldsymbol{u}_1 = 0,$$
$$\boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{u}_3 - 3\,(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})\boldsymbol{u}_1 - 3\,(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u} = 0,$$

которые имеют, соответственно, следующие авто-преобразования Беклунда

$$\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{v}_1 = (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v})\sqrt{\mu^2 + (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})^2},$$
$$\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{v}_1 + \mu(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) = \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 + (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})^2}}{(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})^2}\Big(\boldsymbol{u}\,(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) - \boldsymbol{v}\,(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})\Big),$$

где μ – параметр.

В третьем разделе второй главы приведены примеры уравнений интегрируемых в $\mathbb{R}^n$ не удовлетворяющих условию теорем первого и второго раздела. Там же даны разъяснения о проблемах возникающих при проведении полной классификации в $\mathbb{R}^n$.

Глава 3 посвящена дифференциальным подстановкам типа Миуры для векторных уравнений (1). Доказано, что только два изотропных уравнения интегрируемых в $\mathbb{S}^n$ допускают такие подстановки:

$$\boldsymbol{u}_t = \boldsymbol{u}_3 + \tfrac{3}{2}\, u_{[1,1]}\, \boldsymbol{u}_1 + 3\, u_{[1,2]}\, \boldsymbol{u}, \tag{9}$$
$$\boldsymbol{u}_t = \boldsymbol{u}_3 + 3\, u_{[1,1]}\, \boldsymbol{u}_1 + 3\, u_{[1,2]}\, \boldsymbol{u}. \tag{10}$$

В частности показано, что решения интегрируемых в $\mathbb{S}^n$ уравнений

$$\boldsymbol{v}_t = \boldsymbol{v}_3 + 3\, v_{[1,2]}\, \boldsymbol{v} + \frac{3}{2}\left(\frac{a^2\, v_{[1,2]}^2}{1 - a\, v_{[1,1]}} + a\,(v_{[2,2]} - v_{[1,1]}^2) + v_{[1,1]}\right)\boldsymbol{v}_1, \tag{11}$$

$$\boldsymbol{v}_t = \boldsymbol{v}_3 + \frac{3}{2}\left(\ln\frac{1+p}{v_{[1,1]}}\right)_x \boldsymbol{v}_2 - \frac{3}{2}\,\frac{(1-p)\, v_{[1,2]}}{p}\,\boldsymbol{v} +$$
$$+ \frac{3}{2}\left(\frac{(1+p)\, v_{[2,2]}}{v_{[1,1]}} - \frac{a\,(1+p)\, v_{[1,2]}^2}{p^2\, v_{[1,1]}} + v_{[1,1]}\,(1-p)\right)\boldsymbol{v}_1, \tag{12}$$

где $p^2 = 1 + a\, v_{[1,1]}$, связаны с решениями (9) и (10):

$$\left\{\boldsymbol{u} = \sqrt{a}\left(\boldsymbol{v}_1 - \sqrt{a - v_{[1,1]}}\,\boldsymbol{v}\right),\ \boldsymbol{u}^2 = 1,\ \boldsymbol{v}^2 = 1\right\}: \qquad (9) \to (11),$$

$$\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{u} = h^{-1}\left(\boldsymbol{v}_1 - \sqrt{h^2 - v_{[1,1]}}\,\boldsymbol{v}\right), \\ h^2 = 2\,a^{-1}\,(1 - \sqrt{1 - a\, v_{[1,1]}}\,), \quad \boldsymbol{u}^2 = 1,\ \boldsymbol{v}^2 = 1 \end{array}\right\}: \qquad (10) \to (12).$$

Здесь выражение $\{\boldsymbol{u} = h_1\, \boldsymbol{v}_1 + h_0\, \boldsymbol{v}\} : (A) \to (B)$, означает, что $\boldsymbol{u}(x,t)$ является решением уравнения (A), а $\boldsymbol{v}(x,t)$ есть решение (B).

Кроме этого, в третьей главе найдены дифференциальные подстановки связывающие громоздкие уравнения теоремы 1 с более простыми.

Глава 4 содержит формулы суперпозиции для решений векторных уравнений мКдФ, Ландау-Лифшица, Шварц-КдФ, а так же некоторых изотропных уравнений интерируемых на n-мерной сфере и уравнений типа мКдФ. Построены периодические и солитонные решения уравнения Ландау-Лифшица.

В "Заключении"отмечаются главные результаты работы соответствующие поставленным в ней целям и задачам.

Благодарность.
Соискатель благодарит доктора физико-математических наук, профессора Соколова Владимира Вячеславовича за постановку задачи.

Список публикаций:

1. **Балахнёв, М.Ю.** Об одном классе интегрируемых эволюционных векторных уравнений / М.Ю. Балахнёв // ТМФ. – 2005. – Т.142. – №2. – С. 13–20.

2. **Балахнёв, М.Ю.** Формулы суперпозиции для векторных обобщений уравнения мКдФ / М.Ю. Балахнёв // Матем. заметки. – 2007. – Т.82. – №4. – С. 501–503.

3. **Балахнёв, М.Ю.** Формулы суперпозиции для интегрируемых векторных эволюционных уравнений / М.Ю. Балахнёв // ТМФ. – 2008. – Т.154. – №2. – С. 261–267.

4. **Balakhnev, M.Ju.** The vector generalization of the Landau-Lifshitz equation: Bäcklund transformation and solutions / M.Ju. Balakhnev // Appl. Math. Lett. – 2005. – V.18. – №12. – P. 1363–1372.

5. **Meshkov, A.G.** Integrable Anisotropic Evolution Equations on a Sphere / A.G. Meshkov, M.Ju. Balakhnev // SIGMA. – 2005. – V.1. Paper 027.

6. **Balakhnev, M.Ju.** Superposition formulas for integrable vector evolutionary equations on a Sphere / M.Ju. Balakhnev // JNMP. – 2008. – V.15. – №1. – P. 104–116.

7. **Meshkov, A.G.** On a classification of integrable vectorial evolutionary equations / A.G. Meshkov, M.Ju. Balakhnev // JNMP. – 2008. – V.15. – №2. – P. 212–226.

Балахнёв Максим Юрьевич

Классификация интегрируемых эволюционных векторных дифференциальных уравнений третьего порядка

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Подписано в печать 12.12.08. Бумага офсетная. Формат 60x90/16.
Тираж 100 экз. Усл. печ. л. 1,0. Уч.-изд. л. 1,0. Тираж 100 экз.

Отпечатано в отделе маркетинга
Федеральной службы государственной статистики по Орловской области
302001, г. Орел, пер. Воскресенский, 24.