Прикладная математика & Физика, 2023, том 55, № 1. С. 5–11.
Applied Mathematics & Physics, 2023, Volume 55, No 1. P. 5–11.

МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

УДК 514.764.2
MSC 53C20
оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-1-5-11

ПСЕВДОПОЛНЫЕ РИМАНОВЫ АНАЛИТИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ

В. А. Попов

(*Статья представлена членом редакционной коллегии С. М. Ситником*)

Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации,
Москва, 115054, Россия

E-mail: vlapopov@gmail.com

Аннотация. Изучается аналитическое продолжение локально заданной римановой аналитической метрики до метрики непродолжаемых многообразий. Исследуются различные классы локально изометричных римановых аналитических многообразий. В каждом таком классе определятся понятие так называемого псевдополного многообразия, обобщающее понятие полноты многообразия. Риманово аналитическое односвязное ориентированное многообразие, называется псевдополным, если непродолжаемо, а также не существует локально изометрического сохраняющего ориентацию накрывающего отображения с односвязным римановым многобразием. Среди псевдополных многообразий выделим «наиболее симметричные» правильные псевдополные многообразия.

Ключевые слова: риманово аналитическое многобразие, аналитическое продолжение, алгебра Ли и группа Ли, векторное поле Киллинга

Для цитирования: Попов В. А. 2023. Псевдополные римановы аналитические многообразия. Прикладная математика & Физика, 55(1): 5–11. DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-1-5-11

Original Research

PSEUDOCOMPLEET RUMANIAN ANALYTIC MANIFOLD

Vladimir Popov

(*Article submitted by a member of the editorial board S. M. Sitnik*)

Financial University under the Government of the Russian Federation,
Moscow, 115054, Russia

E-mail: vlapopov@gmail.com

Abstract. We study the analytic extension of a locally given Riemannian analytic metric to the metric of non-extendable manifolds. Various classes of locally isometric Riemannian analytic manifolds are studied. In each such class, the notion of the so-called pseudocomplete manifold is defined, which generalizes the notion of the completeness of a manifold. Riemannian analytic simply connected oriented manifold M is called pseudocomplete if it has the following properties. M is unextendable. There is no locally isometric orientation-preserving covering map $f : M \to N$, where N is a simply connected oriented Riemannian analytic manifold and $f(M)$ is an open subset of N not equal to N. Among the pseudocomplete manifolds, we single out the "most symmetric" regular pseudocomplete manifolds.

Keywords: Riemannian Analytic Manifold, Analytic Extension, Lie Algebra and Lie Group, Killing Vector Field

For citation: Popov Vladimir. 2023. Pseudocompleet Romanian Analytic Manifolds. Applied Mathematics & Physics, 55(1): 5–11. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-1-5-11

---

1. Введение. Уже достаточно давно была научно обоснована «криволинейность» нашего пространства. Геометрия нашего пространства не подчиняется законам евклидовой геометрии, а определяется общим понятием римановой метрики. Однако, если мы можем определить локальные свойства окружающего пространства, глобальное устройство вселенной в целом представить очень сложно. Преобладает мнение, высказанное великим ученым А. Пуанкаре, что по аналогии с поверхностью земли, вселенная представляет из себя замкнутое (компактное) пространство, обладающее свойством односвязности (т. е. любая (криволинейная) окружность ограничивает «криволинейный» круг на этом пространстве. А. Пуанкаре выдвинул гипотезу, согласно которой замкнутое односвязное трехмерное пространство топологически эквивалентно трехмерной сфере, что приводит к некоторой аналогии строения вселенной со строением поверхности земли. В недавнее время чисто математическая гипотеза Пуанкаре была окончательно доказана российским математиком Г. Я. Перельманом.

Помимо топологического подхода возможен аналитический подход к изучению глобальных свойств риманова пространства. Этот подход связан с тем, что риманов тензор задается аналитическими функциями, которые имеют свойство однозначного аналитического продолжения. Рассмотрим риманово аналитическое многообразие M и шар $U \subset M$ малого радиуса с центром в некоторой точке $x_0 \in M$. Под аналитическим продолжением локально заданной метрики будем подразумевать любое риманово аналитическое многообразие N такое, что существует аналитическая изометрия $\varphi : U \to M$. Поставим задачу найти наиболее естественное аналитическое продолжение данной метрики. Естественным требованием является свойство непродолжаемости искомого многообразия, введённого ещё в классических монографиях Хелгасона [1] и С. Кобояси, Ш. Номидзу [2]. Однако непродолжаемые многообразия могут быть весьма неестественными. Например, односвязная накрывающая правой полуплоскости выколотыми точками $\left(\frac{1}{n}; \frac{k}{n}\right)$, $k, n \in N$.

В исследованиях по геометрии римановых пространств в целом, как правило, существенным требованием является полнота рассматриваемого многообразия. Для полного односвязного риманова аналитического многообразия любая изометрия $\varphi : U \to V$ между двумя связными открытыми подмножествами $U \subset M$, $V \subset M$ аналитически продолжается до изометрии $\varphi : M \to M$ [1].

Однако, в общем случае шар U риманова аналитического многообразия нельзя изометрически вложить в полное риманово аналитическое многообразие, т. е., вообще говоря, локально заданная риманова метрика аналитически не продолжается до метрики полного риманова многообразия. Возникает вопрос об обобщении понятия полноты. Естественным обобщением такого рода является непродолжаемость риманова аналитического многообразия. Однако непродолжаемые многообразия могут быть весьма неестественными.

Зададимся вопросом, можно ли по заданным локальным свойствам римановой аналитической метрики, т. е. метрики, заданной на малом шаре U, построить риманово аналитическое многообразие M, содержащее U в качестве открытого подмножества, и допускающего аналитическое продолжение локальных изометрий до изометрий всего многообразия. Т. е. любая изометрия $\varphi : U \to V$ между двумя связными открытыми подмножествами $U \subset M$, $V \subset M$ аналитически продолжается до изометрии $\varphi : M \to M$. Непреодолимым препятствием для такого продолжения является следующий факт. Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли всех векторных полей Киллинга на римановом аналитическом многообразии M и $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ – её стационарная подалгебра, для фиксированной точки $p \in M$ $X \in \mathfrak{h}$ $X(p) = 0$. Пусть G – односвязная подгруппа, порождённая алгеброй $\mathfrak{g}$, и H – её подгруппа, порождённая подалгеброй $\mathfrak{h}$. Пусть G действует на односвязном многообразии M, тогда орбита фиксированной точки $p \in M$ является подмногообразием изометричным фактор группе G/H. Но фактор группа G/H является многообразием лишь в случае замкнутости подгруппы H в G, а это выполняется не всегда.

Целью данной работы является определение псевдополного многообразия, являющееся «наиболее полным» аналитическим продолжением произвольной локально заданной римановой аналитической метрики. Изучается аналитическое продолжение локально заданной римановой метрики. Рассмотрим случаи вполне неоднородной метрики и метрики, для которой алгебра Ли всех векторных полей Киллинга не имеет центра. В этих случаях дадим определение квазиполного многообразия M, обладающего свойством единственности и продолжаемости всех локальных изометрий $f : U \to V$, где U, V – связные открытые подмножества многообразия M, до изометрии $f : M \to M$. Ориентированное риманово аналитическое многообразие, алгебра векторных полей которого имеет нулевой центр, называется квазиполным, если оно непродолжаемо и не допускает нетривиальных сохраняющих ориентацию и все векторные поля Киллинга локальных изометрий в себя.

Приведем определение псевдополного многообразия, приводящее к «наиболее полному» продолжению локально заданной метрики и применимое к произвольной локально заданной метрике. Риманово аналитическое односвязное ориентированное многообразие M называется псевдополным, если оно обладает следующими свойствами. M непродолжаемо. Не существует локально изометрического сохраняющего ориентацию накрывающего отображения $f : M \to N$, где N – односвязное риманово аналитическое многообразие, а $f(M)$ открытое подмножество в N, не равное N. Среди псевдополных многообразий выделим «наиболее симметричные» правильные псевдополные многообразия.

Понятие аналитического продолжения римановой аналитической метрики присутствовало в классических монографиях Хелгасона [1] и С. Кобояси, Ш. Номидзу [2], но развития не получило.

Принципиальным является исследование случая вполне неоднородной римановой метрики, т. е. метрики не допускающей никаких движений (полей Киллинга). В этом случае удаётся определить так называемое квазиполное многообразие, обладающее свойством непродолжаемости и единственности для каждой локально заданной вполне неоднородной метрики [3, 4, 5]. Аналитическое продолжение вполне неоднородной римановой метрики изучалось также в диссертации Д. Х. Смита [6]. Определение квазиполного многообразия удаётся обобщить на случай, когда алгебра Ли всех векторных полей Киллинга для заданной локально определённой римановой аналитической метрики не имеет центра, [3, 4, 5]. Такое многообразие M обладает свойством максимально возможной симметрии, т. е. любая изометрия $f : U \to V$ между связными открытыми подмножествами многообразия M аналитически продолжается до изометрии $f : M \to M$. Однако квазиполное многообразие обладает не только тем недостатком, что оно определено не для произвольной локально заданной метрики, но оно в определённом смысле не является «самым полным». Поэтому далее для произвольной локально заданной римановой метрики мы приведём понятие псевдополного многообразия, исследуем его свойства и связь с квазиполным многообразием.

2. Аналитическое продолжение римановых многообразий и обобщение понятия полноты. Класс всех локально изометричных римановых аналитических многообразий будем называть также классом многообразий, происходящих из данного ростка риманова аналитического многообразия, а конкретное многообразие из этого класса будем называть аналитическим продолжением данного ростка. Естественным требованием к аналитическому продолжению ростка является непродолжаемость полученного многообразия. Перейдем к точным определениям и формулировкам.

Определение 1. *Аналитическим продолжением риманова аналитического многообразия M назовём риманово аналитическое многообразие N такое, что существует аналитическое вложение M в N как собственного открытого подмножества. Многообразие, не допускающее аналитического продолжения, называется непродолжаемым.*

Определение 2. *Локальной изометрией между двумя римановыми аналитическими многообразиями M и N называется изометрия $\varphi : U \to V$ между открытыми подмножествами $U \subset M$, $V \subset N$. Многообразия, между которыми существует локальная изометрия, назовём локально изометричными.*

Любое векторное поле $X \in \mathfrak{g}$ аналитически продолжается вдоль любой кривой на многобразии M, и, тем самым, алгебра Ли $\mathfrak{g}$ определяет алгебру Ли $\mathfrak{g}$ векторных полей Киллинга на любом односвязном многобразии N локально изометричном M. Этот факт верен также для многообразий аффинной связности. Сформулируем этот факт в виде леммы, доказательство которой приведено в [5].

Лемма 1. *Пусть M – аналитическое многообразие аффинной связности, X – инфинитеземальное аффинное преобразование, заданное в области $U \subset M$, и пусть $\gamma(t)$, $0 \le t \le 1$, непрерывная кривая в M такая, что $\gamma(t) \in U$. Тогда векторное поле аналитически продолжаемо вдоль $\gamma(t)$. Если кривые $\gamma(t)$ и $\delta(t)$, $0 \le t \le 1$, $\gamma(0) = \delta(0)$, $\gamma(1) = \delta(1) = x_1$ гомотопны, то продолжения векторных полей в точку x_1 вдоль этих кривых совпадают.*

Принципиальным является исследование случая вполне неоднородной римановой метрики, т. е. метрики без векторных полей Киллинга. В этом случае удаётся определить квазиполное многообразие, обладающее свойством непродолжаемости и единственности для каждой локально заданной вполне неоднородной метрики, [6].

Определение 3. *Риманово аналитическое многообразие называется вполне неоднородным многообразием, если на нём не существует векторных полей Киллинга. Риманову метрику вполне неоднородного многообразия назовём вполне неоднородной метрикой.*

По лемме 1 все многообразия локально изометричные вполне неоднородному многообразию являются вполне неоднородными.

Определение 4. *Вполне неоднородное ориентированное риманово аналитическое многообразие называется квазиполным, если оно непродолжаемо и не допускает нетривиальных сохраняющих ориентацию локальных изометрий в себя.*

Приведём основные свойства вполне неоднородных квазиполных многообразий, доказательство которых содержится в [5]. Для произвольного вполне неоднородного многообразия M рассмотрим множество $S \subset M$ всех всевозможных неподвижных точек сохраняющих ориентацию локальных изометрий многобразия в себя.

Теорема 1. *Для произвольного вполне неоднородного риманова аналитического многообразия множество $S \subset M$ является аналитическим подмножеством коразмерности не меньше, чем 2. Следовательно, $M \setminus S$ является связным многообразием.*

Теорема 2. *Для любого вполне неоднородного риманова аналитического многообразия M' существует локально изометричное ему квазиполное многобразие M и локально изометричекое накрывающее отображение $f : M' \setminus S \to M$. Таким образом, квазиполное многообразие обладает свойством единственности для каждой вполне неоднородной локально заданной римановой аналитической метрики.*

Определение квазиполного многообразия удаётся обобщить на случай, когда алгебра Ли всех векторных полей Киллинга для заданной локально определённой римановой аналитической метрики не имеет центра, [5]. Таковыми являются и многие локально однородные многобразия, в частности все локально симметрические пространства.

Определение 5. *Риманово аналитическое многообразие M называется локально однородным, если в* *любой точке $p \in M$ векторные поля Киллинга образуют базис касательного пространства T_pM .*

Эквивалентное определение локально однородного многообразия M состоит в том, что любых точек $p, q \in M$ существует локальная изометрия φ многообразия M такая, что $\varphi(p) = q$

Определение 6. *Ориентированное риманово аналитическое многообразие, алгебра Ли всех векторных полей которого имеет нулевой центр, называется квазиполным, если оно непродолжаемо и не допускает нетривиальных сохраняющих ориентацию и все векторные поля Киллинга локальных изометрий в себя.*

Исследуем ориентированные римановы аналитические многообразия, алгебра Ли всех векторных полей Киллинга которых не имеет центра, с целью доказать, что каждое такое многобразие локально изометрично квазиполному многообразию, а локально однородное квазиполное многообразие является полным однородным многообразием.

Обозначим через $Z(M)$ псевдогруппу всех сохраняющих ориентацию и векторные поля Киллинга, локальных изометрий риманова аналитического многобразия M, $\varphi \in Z(M)$ если $\forall X \in \mathfrak{g}\ \varphi(X) = X$.

Лемма 2. *Пусть M – риманово аналитическое многобразие, удовлетворяющее свойству однозначного продолжения векторных полей Киллинга и алгебра Ли всех векторных полей Киллинга которого не имеет центра. Тогда множество $S \subset M$, состоящее из неподвижных точек всевозможных изометрий $\varphi \in Z(M)$, является аналитическим подмножеством коразмерности не меньше, чем 2.*

В силу леммы 2 многобразие $M \setminus S$ связно. Доказательство леммы 2 и последующих утверждений можно найти в [2].

Лемма 3. *Пусть M – риманово аналитическое многобразие, удовлетворяющее свойству однозначного продолжения векторных полей Киллинга и алгебра Ли всех векторных полей Киллинга которого не имеет центра. Тогда существует локально изометрическое накрывающее отображение из $M \setminus S$ в риманово аналитическое многобразие M_1, также удовлетворяющее свойству однозначного продолжения векторных полей Киллинга и псевдогруппа $Z(M_1)$ которого состоит только из тождественного преобразования.*

Теорема 3. *Произвольное риманово аналитическое многообразие M, алгебра Ли векторных полей Киллинга не имеет центра локально изометрично квазиполному многообразию.*

Теорема 4. *Пусть φ – локальная изометрия из квазиполного многообразия M в квазиполное многобразие N. Тогда φ продолжается до изометрии $\varphi : M \to N$.*

Следствие 1. *Произвольное риманово аналитическое многобразие, алгебра Ли всех векторных полей Киллинга которого не имеет центра, локально изометрично единственному квазиполному многообразию. То есть локально заданная риманова аналитическая метрика, алгебра Ли векторных полей Киллинга которой не имеет центра, единственным образом продолжается до квазиполного многообразия.*

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли всех векторных полей Киллинга в римановом аналитическом многообразии M', диффеоморфном шару, а $\mathfrak{h}$ – ее стационарная подалгебра. Пусть G – односвязная группа, порождённая алгеброй $\mathfrak{g}$ и H – её подгруппа, порождённая подалгеброй $\mathfrak{h}$. Если $\mathfrak{g}$ не имеет центра, то H замкнута в G.*

Отметим, что квазиполное многообразие является наиболее сжатым, то есть универсально притягивающим объектом в категории всех локально изометричных многобразий. Для любого риманова аналитического многобразия M', алгебра векторных полей Киллинга которого не имеет центра, существует локально изометрическое отображение из $M' \setminus S'$ в квазиполное многобразие M, определенное на всем $M' \setminus S'$, где S' – множество неподвижных точек всех сохраняющих ориентацию и векторные поля Киллинга локальных изометрий многобразия M'.

Квазиполное многообразие единственно в классе всех аналитических продолжений данного ростка и обладает рядом замечательных свойств [5]. Прежде всего, свойством максимальной симметрии, т. е. любая локальная изометрия $f : U \to V$ из квазиполного многобразия M в себя аналитически продолжается до изометрии $f : M \to M$. Однако понятие квазиполного многобразия обладает не только тем недостатком, что оно определено не для всех локально заданных римановых аналитических метрик, но оно также не является в определённом смысле «самым полным». А именно, существует росток риманова аналитического многобразия, допускающий продолжение до полного многобразия, каноническое продолжение которого до квазиполного не является полным многобразием.

Пример 1. *Рассмотрим эллипсоид в трёхмерном пространстве, заданный уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Для того, чтобы получить квазиполное многобразие в классе всех римановых аналитических многобразий локально изометричных эллипсоиду, необходимо выбросить из эллипсоида 6 точек пересечения с осями координат и профакторизовать полученное многобразие по группе вращений на 180 градусов вокруг всех осей координат.*

3. Псевдополные многообразия. Дать обобщение понятия полноты, приводящее к «самому полному» многообразию для произвольного ростка риманова аналитического многообразия, оказывается возможным.

Определение 7. *Риманово аналитическое односвязное многобразие M называется псевдополным, если оно обладает следующими свойствами:*

M непродолжаемо.

Не существует локально изометрического накрывающего отображения $f; M \to N$, где N – односвязное риманово аналитическое многобразие, а $f(M)$ – открытое подмножество в N, не равное N.

Исследуем аналитическое продолжение до псевдополного многообразия для различных классов ростков римановых аналитических многообразий. Прежде всего следует установить тот факт, что аналитическое продолжение до псевдополного многообразия существует для любого ростка риманова аналитического многобразия. Вместе с тем в общем случае это продолжение не единственно, однако, различные аналитические продолжения одного и того же ростка различаются не очень значительно.

Теорема 5. *Любое локально заданное риманово аналитическое многобразие допускает аналитическое продолжение до псевдополного многообразия. Если в классе локально изометричных римановых аналитических многообразий имеется полное многобразие, то это многобразие является единственным псевдополным многообразием в этом классе.*

Доказательство. На множестве всех односвязных аналитических продолжений данного ростка риманова аналитического многобразия введём следующее отношение порядка. Многобразие M больше или равно многобразия N, $M \geq N$, если существует локально изометрическое отображение $f; N \to M$. Тем самым, множество односвязных локально изометричных друг другу римановых аналитических многобразий превращается в частично упорядоченное множество. По лемме Цорна это множество содержит максимальный элемент. Этот элемент по определению и будет псевдополным многобразием.

Рассмотрим полное риманово аналитическое многобразие M. Если предположить, что M не является псевдополным, то существует локально изометрическое отображение $f; M \to N$ такое, что что некоторая точка $x \in N$, $x \notin f(M)$. Пусть $\gamma(t)$, $0 \leq t \leq 1$, геодезическая, соединяющая точку $y \in f(M)$ с точкой x. Тогда прообраз этой геодезической при $0 \leq t \leq \delta$ не продолжается до геодезической при всех t на многобразии M, что противоречит полноте этого многообразия.

Псевдополное многобразие не единственно в классе всех локально изометричных римановых аналитических многобразий.

Пример 2. *Рассмотрим росток A двумерного риманова аналитического многообразия, носителем которого является сфера с метрикой $ds^2 = \frac{f(z,\overline{z})}{\sqrt{1+|z|^2}} dz d\overline{z}$, где $f(z,|z|)$ – аналитическая функция на сфере, удовлетворяющая условию $f(z,|z|) \neq |A'(z)|^2 f(A(z), A(\overline{z}))$ для любого дробно линейного преобразования $A(z)$. Такая метрика имеет особенность в точке $z = \infty$. Сфера с данной метрикой является псевдополным многообразием. Устраним особенность в точке $z = \infty$ при помощи преобразования $z = w^2 + a$, $a \in C$. В результате, получим сферу, двулистно накрывающую первоначальную и имеющую метрику $ds^2 = \frac{4|w|^2 f(w^2+a, \overline{w}^2+\overline{a})}{(1+|w^2+a|^2)} dw d\overline{w}$. Эта метрика имеет особенность в точке $w = 0$, что является естественным, так как сфера w ветвится над сферой z в точке $z = a$, соответствующей точке $w = 0$. При различных a получаем различные псевдополные многобразия с координатой w.*

Как показывает пример 2, имеется большое множество не очень естественных псевдополных многобразий. С целью избежать разветвления над регулярными точками сузим понятие псевдополного многобразия.

Определение 8. *Риманово аналитическое односвязное многобразие M называется правильным псевдополным многобразием, если не существует накрывающего локально изометрического отображения $f : M \setminus S \to N$ в другое псевдополное многобразие N локально изометричное многобразию M.*

Теорема 6. *Локальная изометрия из правильного псевдополного многобразия M в правильное псевдополное многобразие N аналитически продолжается вдоль непрерывных кривых в любую точку M за исключением аналитического подмножества S коразмерности не меньше, чем 2.*

Доказательство. Доказательство приведём для случая, когда алгебра Ли всех векторных полей Киллинга не имеет центра. Рассмотрим подмножества $S \subset M$ и $S' \subset N$, состоящие из всех неподвижных точек локальных изометрий, сохраняющих ориентацию векторных полей Киллинга. Множества S и S' являются аналитическими подмножествами многобразий M и N коразмерности не меньшей, чем 2. Пусть M_0 – квазиполное многобразие, локально изометричное многобразиям M и N. Тогда существуют накрывающие локально изометрические отображения $f : M \setminus S \to M_0$ и $g : N \setminus S' \to M_0$. При этом из определения правильного псевдополного многобразия следует, что $f(M \setminus S) = M_0$ и $g(N \setminus S') = M_0$. Рассмотрим произвольную кривую $\gamma(t) \subset M \setminus S$ такую, что область определения первоначально заданной локальной изометрии φ между многобразиями M и N содержит точку $\gamma(0)$, её образ $\delta(t) = f(\gamma(t)) \subset M_0$ и связную компоненту $\beta(t)$ прообраза $g^{-1}(\delta(t)) \subset N \setminus S'$, содержащую точку $\varphi(\gamma(0))$. Тогда первоначально заданная локальная изометрия φ аналитически продолжается до изометрии некоторой окрестности кривой $\gamma(t)$, $0 \leq t \leq 1$, на некоторую окрестность кривой $\beta(t)$, $0 \leq t \leq 1$, принадлежащую $N \setminus S'$.

Пусть M – правильное псевдополное риманово аналитическое многобразие, алгебра Ли всех векторных полей которого не имеет центра, S – множество неподвижных точек всех сохраняющих ориентацию и векторные поля Киллинга локальных изометрий многобразия M, M_0 – квазиполное многобразие локально изометричное M, $\tilde{M}_0 S$ – односвязная накрывающая многобразия M_0. Тогда имеют место аналитические локально изометрические накрытия $\tilde{M}_0 \to M \setminus S \to M_0$.

Для произвольного ориентированного риманова аналитического многобразия M обозначим через

$Z(M)$ псевдогруппу, состоящую из всех локальных изометрий многообразия M, сохраняющих ориентацию и все векторные поля Киллинга. Рассмотрим фактор многообразие K_M многообразия $M \setminus S$ по псевдогруппе $Z(M)$. Определим объединение многообразий K_M и K_N, склеивая их по множеству $K_{M \cap N}$. Под пересечением $M \cap N$ подразумевается отождествление максимальных подмножеств, на которые продолжается первоначально заданная локальная изометрия между односвязными накрывающими $\tilde{M}$ и $\tilde{N}$ многообразий M и N. На многообразии $M \setminus S$ рассмотрим распределение $\mathfrak{z}^{\perp}$, состоящее из векторов, перпендикулярных центру $\mathfrak{z}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ всех векторных полей Киллинга.

Теорема 7. *Пусть M – псевдополное риманово аналитическое многообразие, $\mathfrak{z}^{\perp}$ – распределение касательных векторов, перпендикулярных центру $\mathfrak{z}$ алгебры всех векторных полей Киллинга, S – множество неподвижных точек, сохраняющих ориентацию и все векторные поля Киллинга локальных изометрий. Если $\mathfrak{z}^{\perp}$ инволютивно, то односвязная накрывающая $\widetilde{M \setminus S}$ многообразия $M \setminus S$ изометрична прямому произведению евклидова пространства и односвязной накрывающей $\tilde{K}$ вполне геодезического подмногообразия $K \subset M$ касательного к $\mathfrak{z}^{\perp}$. $\widetilde{M \setminus S} \approx \mathbf{R}^k \times \tilde{K}$.*

Доказательство. Ввиду инволютивности распределений $\mathfrak{z}$ и $\mathfrak{z}^{\perp}$ некоторая окрестность U отмеченной точки $p \in M$ имеет вид $U = V \times W$, где V – открытое подмножество интегрального подмногообразия распределения $\mathfrak{z}$, а W – открытое подмножество интегрального подмногообразия распределения $\mathfrak{z}^{\perp}$. Пусть $x^1; x^2; \dots; x^k$ – координаты на V, а $y^1; y^2; \dots; y^m$ – координаты на W. Тогда в координатах $x^1; x^2; \dots; x^k; y^1; y^2; \dots; y^m$ компоненты g_{ij} не зависят от $x^1; x^2; \dots; x^k$, и так как подмногообразия V и W перпендикулярны, то компоненты при $dx^i dy^j$ равны 0. Поэтому метрика на U имеет вид $ds^2 = ds_1^2(y) + f_{ij}(y) dx^i dx^j$. Вследствие непродолжаемости псевдополного многообразия $M \setminus S$ содержит полные интегральные подмногообразия распределения $\mathfrak{z}$, т. е. прямые произведения евклидова пространства и тора $\mathrm{R}^k \times T^l$. Поэтому $M \setminus S$ является расслоением над $K' \subset K$ со слоями $\mathrm{R}^k \times T^l$. Так как распределение $\mathfrak{z}^{\perp}$ инволютивно, это расслоение содержит сечение K', и поэтому тривиально, $M \setminus S = \mathrm{R}^k \times T^l \times K'$. Так как M непродолжаемо, то $K' = K$. Следовательно, односвязная накрывающая многобразия $M \setminus S$ изометрична прямому произведению односвязных пространств, $\widetilde{M \setminus S} \approx \mathbf{R}^k \times \tilde{K}$.

Следствие. *Рассмотрим риманово аналитическое многообразие M' размерности n, алгебра Ли $\mathfrak{g}$ которого коммутативна, то есть совпадает со своим центром $\mathfrak{z}$, и $dim\mathfrak{g} = dim\mathfrak{z} = n - 1$. Тогда существует не более двух псевдополных многообразий локально изометричных M'.*

Доказательство. Так как $codim\mathfrak{z} = 1$, то $dim\mathfrak{z}^{\perp} = 1$, и $\mathfrak{z}^{\perp}$ инволютивно. По теореме 5 для псевдополного многообразия M локально изометричного многообразию M' имеет место разложение $M \setminus S = \mathrm{R}^s \times T^l \times K$. Вполне геодезическое подмногообразие K изометрично прямой $\mathbf{R}$ или окружности S^1 или лучу $(a; \infty)$ или интервалу $(a; b)$. Рассмотрим фактор множество $\overline{K} = M/Z(M)$. Если $K = \mathrm{R}$ или $K = S^1$, то $\overline{K} = K$. Если $K = (a; \infty)$, то $\overline{K} = [a; \infty)$ или $\overline{K} = K = (a; \infty)$. Если $K = (a; b)$, то $\overline{K} = [a; b)$ или $\overline{K} = (a; b]$ или $\overline{K} = [a; b]$ или $\overline{K} = K = (a; b)$. В случае, если $K = \mathrm{R}$ или $K = S^1$, то соответствующий росток риманова аналитического многобразия имеет единственное продолжение до псевдополного многобразия, и это многобразие изометрично евклидову пространству. Продолжение ростка до псевдополного многобразия будет единственным в случае $S = \varnothing$, т. е. $\overline{K} = K$.

Пусть $K = (a; \infty)$, а $\overline{K} = [a; \infty)$. Тогда точки подмножества $S \subset M$ отображаются при факторизации $\overline{K} = M/Z(M)$ в точку $a \in \overline{K}$. Точка $x \in S$ является особой точкой некоторого поля $X \in \mathfrak{z}$, $X(x) = 0$, а любая изометрия φ из M в себя такая, что $\varphi(x) = x$, имеет вид $\varphi = ExpY$, $Y \in \mathfrak{z}$. Рассмотрим подалгебру $\mathfrak{z}_0 \subset \mathfrak{z}$, состоящую из векторных полей Киллинга $X \in \mathfrak{z}$, обращающихся в ноль в точке x, $X(x) = 0$. Тогда $\mathfrak{z}_0$ порождает группу изометрий некоторого шара B, аналитически продолжающуюся до группы изометрий многобразия M и изоморфную фактор группе группы $\mathfrak{z}_0 = \mathbf{R}^s$ по некоторой решётке Γ, действующей на многобразии M. Тогда M является полным многобразием изометричным пространству $\mathbf{R}^s \times T^l$. Аналогичная конструкция применима к случаю, когда $K = (a; b)$, а $\overline{K} = [a; b)$ или $\overline{K} = (a; b]$, т. е. когда $\overline{K}$ получается из K присоединением одной точки a или b. В этом случае псевдополное многобразие также единственно и изометрично многобразию $\mathbf{R}^s \times T^l \times \overline{K}$; однако это многобразие уже не является полным.

Наконец, рассмотрим случай $K = (a; b)$, $\overline{K} = [a; b]$, т. е. когда $\overline{K}$ получается из K присоединением двух точек a и b. Рассмотрим псевдополное многобразие M_1 и точки множества $S_1 \subset M_1$, проектирующиеся в точку $a \in \overline{K}$. Тогда так же, как и при рассмотрении предыдущих случаев, рассмотрим многобразие M_1', получающееся присоединением множества S_1 к фактор-многобразию многобразия $M \subset S$ по некоторой решетке $\Gamma_1 \subset \mathfrak{z} = \mathbf{R}^{n-1}$ так, что $M_1' = \mathbf{R}^s \times T^l \times \overline{K_1})$, где $\overline{K_1} = [a; b)$. Аналогично, рассмотрим псевдополное многобразие M_2 и точки множества $S_2 \subset M_2$, проектирующиеся в точку $b \in \mathbf{K}$. Многобразие M_2' получается присоединением множества S_2 к фактор-многобразию многобразия $M \setminus S$ по некоторой решетке $\Gamma_2 \subset z = \mathbf{R}^{n-1}$ так, что $M_2' = \mathbf{R}^s \times T^l \times \overline{K}_2$, где $K_2 = (a; b]$. Если решётки Γ_1 и Γ_2 не совпадают, то многобразия $M_1 = M_1'$ и $M_2 = M_2'$ являются двумя различными псевдополными многобразиями. Если же решетки Γ_1 и Γ_2 совпадают, то многобразия M_1 и M_2 изометричны и определяют полное многобразие $M = M_1 = M_2$.

4. Заключение. Укажем на возможное развитие теории аналитического продолжения ростков римановых аналитических многообразий.

Понятие квазиполного многообразия не обобщается на многообразия аффинной связности, но может быть обобщено на псевдоримановы многообразия.

Условие замкнутости подгуппы Ли, соответствующей стационарной подалгебре Ли, в односвязной группе Ли, соотвествующей алгебры Ли все векторных полей Килилинга, может быть уточнено и распространено на алгебру Ли всех инфинитезимальных преобрзований проства аналитческой аффинноой связности.

Псевдополные многообразия в классе всех локально изометричных многообразий заслуживают более полного описания. Для малых размерностей возможна полная классификация псевдополных многообразий.

References

1. Helgason S. 1978. Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces; Academic Press, Inc., Harcourt Brace Jovanovich, Publishers: Boston, San Diego, New York, USA, 596.
2. Kobayashi S., Nomidzu K. 1969. Foundations of Differential Geometry; Interscience Publisher, a division of John Wiley and Sons; New York, USA. 487.
3. Popov V. A. 2016. On the Extendability of Locally Defined isometries of a Pseudo-Riemannian Manifolds. – Journal of Mathematical sciences. Vol. 217, №5, September, 2016, p. 624 – 627.
4. Popov V. A. 2017. V.A. On Closeness of Stationary Subgroup of Affine Transformation Groups. Lobachevskii Journal of Mathematics. V. 38, №4, 2017, pp. 724 – 729.
5. Popov V. A. 2020. V. A. Popov, Analytic Extension of Riemannian Manifolds and Local Isometries. Mathematics, 2020. V. 8, № 11, pp. 1-17.
6. Smith G. H. 1978/ Analytic extension of Riemannian manifolds. BULL. AUSTRAL. MATH. SOC. Vol. 18 (1978), pp. 147-148.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 17.11.2022
Поступила после рецензирования 28.11.2022
Принята к публикации 01.12.2022

Received 17.11.2022
Revised 28.11.2022
Accepted 01.12.2022

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Попов Владимир Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент департамента математики финансового университета при Правительстве Российской Федерации

Ленинградский пр., 49, Москва, 115054, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Vladimir Popov – PhD, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Mathematics of Finacial University under the Govenmtent of the Russian Federation, Moscow, Russia