



MSC 26A33

ОПТИМАЛЬНЫЙ ВЫБОР ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА ПРИ НАЛИЧИИ КОНВЕКЦИИ

А.Г. Брусенцев, О.В. Осипов

Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова,
ул. Костюкова, 46, Белгород, 308012, Россия,
e-mail: brusentsev@mail.ru, ov.osipov@gmail.com

Аннотация. Предлагается и обосновывается новый метод численного решения задачи оптимального выбора источников тепла в движущейся среде, заключающийся в сведении исходной задачи к задаче линейного программирования. В ходе численного моделирования с использованием конечно-разностных схем получены результаты для 3-мерной области с параметрами, близкими к действительным и небольшими скоростями движения среды.

Ключевые слова: движущаяся среда, оптимальное управление, эллиптические краевые задачи, конечномерная аппроксимация, обратная задача теплопроводности, конвекция, плотность источников тепла, метод теплового баланса, симплекс-метод.

В работах [1-3] рассматривалась задача нахождения плотности источников тепла минимальной мощности, которая обеспечивает заданный температурный режим в некоторой области в условиях её стационарного теплового баланса с окружающей средой. В этих работах приведены уточненная формулировка задачи, обоснование численного алгоритма её решения и результаты численных экспериментов. При этом предполагалось, что среда, заполняющая область не движется. В настоящей работе мы отказываемся от этого предположения. Полный учет конвекции приводит к очень сложной задаче, которую даже трудно точно сформулировать. Здесь мы предполагаем поле скоростей среды в области фиксированным. Тем самым учитывается лишь искусственно создаваемая конвекция. Свободной конвекцией, возникающей в гравитационном поле, мы пренебрегаем.

Для постановки оптимизационной задачи мы формулируем краевую задачу, описывающую установившийся процесс теплообмена и преобразуем её к более удобному виду, предполагая поле скоростей среды потенциальным. При этом дифференциальный оператор преобразованной задачи является положительно определенным, что позволяет сформулировать оптимизационную задачу, подобно тому, как это сделано в работе [3]. Далее, строится конечномерная аппроксимация в виде задачи линейного программирования, и доказываются достаточные условия её регулярности по функционалу. Свойство регулярности по функционалу позволяет придать точный смысл приближенному решению задачи. В настоящей работе также обсуждаются вычислительные алгоритмы этого приближенного решения.



1. Формулировка и преобразование краевой задачи установившегося теплообмена

Введём функцию $u(\vec{x}) = T(\vec{x}) - T_0$, где $T(\vec{x})$ — установившаяся температура в точке \vec{x} ограниченной связной области D , а T_0 — температура окружающей среды. Эта функция должна удовлетворять уравнению

$$\chi \Delta u - \nabla(\vec{v} \cdot u) + f = 0, \quad \vec{x} \in D, \quad (1)$$

где χ — коэффициент температуропроводности среды, $\vec{v}(\vec{x})$ — поле скоростей среды, которое предполагается подчиненным условию $\text{div} \vec{v} = 0$, а $f(\vec{x})$ — плотность источников тепла в области D . Для формулировки краевых условий разобьём границу области D на три части $\partial D = \Gamma_+ \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_-$, где Γ_+ — часть границы, которая является входом среды в область D , Γ_- — часть границы, являющейся выходом (стоком) среды, а Γ_0 — часть непроницаемой границы. Справедливы следующие соотношения:

$$(\vec{n}, \vec{v})|_{\Gamma_0} = 0, \quad (\vec{n}, \vec{v})|_{\Gamma_-} > 0, \quad (\vec{n}, \vec{v})|_{\Gamma_+} < 0,$$

где \vec{n} — единичный вектор внешней нормали к границе ∂D . Последнее из этих трех условий означает, что в область D поступает вещество внешней среды с температурой T_0 . В дальнейшем мы предполагаем, что в нашем процессе присутствует поток тепла через непроницаемую для среды границу, равный $\alpha(\vec{x}) \cdot u(\vec{x})$ ($\vec{x} \in \Gamma_0$), где $\alpha(\vec{x}) > 0$ — коэффициент теплопередачи через Γ_0 . Следующие краевые условия выражают тепловой баланс области D с окружающей средой.

$$\begin{cases} (\chi(\vec{n}, \nabla u) + \alpha u)|_{\Gamma_0} = 0, \\ (\vec{n}, \nabla u)|_{\Gamma_-} = 0, \\ (\chi(\vec{n}, \nabla u) - (\vec{n}, \vec{v})u)|_{\Gamma_+} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Если полученная краевая задача имеет единственное решение, то её можно считать удовлетворительной моделью процесса установившегося теплообмена при наличии конвекции.

Однако вопрос о существовании и единственности решения краевой задачи (1), (2) сложен для анализа. В частном случае, когда поле скоростей среды является потенциальным, эту задачу можно преобразовать к более простому виду.

Обозначим через $\varphi(\vec{x})$ — потенциал поля скоростей среды, т.е. $\vec{v}(\vec{x}) = \nabla\varphi(\vec{x})$. При этом $\nabla\vec{v}(\vec{x}) = \Delta\varphi(\vec{x}) = 0$, $(\vec{n}, \nabla\varphi)|_{\Gamma_0} = 0$. Введём новую неизвестную функцию $w(\vec{x})$ с помощью равенства $u = we^{\varphi/(2\chi)}$. Подставляя это выражение в (1) получим следующее уравнение

$$-\chi\Delta w + (|\nabla\varphi|^2/(4\chi))w = fe^{-\varphi/(2\chi)}. \quad (3)$$

Действительно, учитывая, что $\Delta\varphi(\vec{x}) = 0$, получим



$$\begin{aligned}
 \chi \Delta(w e^{\varphi/(2\chi)}) - \nabla(w e^{\varphi/(2\chi)} \nabla \varphi) + f &= \chi((\Delta w) e^{\varphi/(2\chi)} + 2(\nabla w, \nabla e^{\varphi/(2\chi)}) + w \Delta e^{\varphi/(2\chi)}) - \\
 &- (\nabla w, \nabla \varphi) e^{\varphi/(2\chi)} - w(\nabla e^{\varphi/(2\chi)}, \nabla \varphi) - w e^{\varphi/(2\chi)} \Delta \varphi + f = \\
 &= \chi((\Delta w) e^{\varphi/(2\chi)} + (1/\chi)(\nabla w, \nabla \varphi) e^{\varphi/(2\chi)} + (1/(4\chi^2))w |\nabla \varphi|^2 e^{\varphi/(2\chi)} + w \Delta \varphi e^{\varphi/(2\chi)}) - \\
 &- (\nabla w, \nabla \varphi) e^{\varphi/(2\chi)} - (1/(2\chi))w |\nabla \varphi|^2 e^{\varphi/(2\chi)} - w e^{\varphi/(2\chi)} \Delta \varphi + f = \\
 &= e^{\varphi/(2\chi)} (\chi \Delta w - (|\nabla \varphi|^2/(4\chi))w) + f.
 \end{aligned}$$

Отсюда получаем уравнение (3). Краевые условия примут следующий вид

$$\begin{cases}
 (\chi(\vec{n}, \nabla w) + \alpha w) |_{\Gamma_0} = 0, \\
 (\chi(\vec{n}, \nabla w) + \frac{1}{2}(\vec{n}, \nabla \varphi)w) |_{\Gamma_-} = 0, \\
 (\chi(\vec{n}, \nabla w) - \frac{1}{2}(\vec{n}, \nabla \varphi)w) |_{\Gamma_+} = 0.
 \end{cases}$$

Введём функцию, заданную на границе $\partial D = \Gamma_+ \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_-$ области следующим образом

$$\sigma(\vec{x}) = \begin{cases}
 \alpha(\vec{x})/\chi, & \vec{x} \in \Gamma_0; \\
 (\vec{n}, \nabla \varphi)/2\chi, & \vec{x} \in \Gamma_-; \\
 -(\vec{n}, \nabla \varphi)/2\chi, & \vec{x} \in \Gamma_+.
 \end{cases} \quad (4)$$

Тогда функция w должна удовлетворять краевому условию

$$\left(\frac{\partial w}{\partial n} + \sigma w \right) \Big|_{\partial D} = 0. \quad (5)$$

Оператор $Lw = -\chi \Delta w + (|\nabla \varphi|^2/(4\chi))w$, действующий в пространстве $L_2(D)$ на достаточно гладкие функции $w(\vec{x})$, подчиненные краевым условиям (5), является самосопряженным и положительно определенным, а поэтому имеет ограниченный обратный оператор, определенный на $L_2(D)$. Отсюда следует, что краевая задача (3), (5) имеет единственное решение, которое можно выразить через функцию Грина оператора L . Положительная определенность этого оператора вытекает из неравенства Фридрикса (см., например, [4], с. 129)

$$\int_D |\nabla w|^2 dV + \int_{\partial D} w^2 ds \geq \vartheta \int_D w^2 dV,$$

где $w(\vec{x})$ — произвольная функция из $C_1(D) \cap C(\bar{D})$, а $\vartheta > 0$ — независящая от $w(\vec{x})$ константа. Действительно, для функций $w(\vec{x}) \in C_2(D) \cap C(\bar{D})$ справедливо равенство

$$(Lw, w) = \int_D |\nabla w|^2 dV - \int_{\partial D} w \frac{\partial w}{\partial n} ds + \int_D (|\nabla \varphi|^2/(2\chi))w^2 dV.$$



Если $w(\vec{x})$ удовлетворяет краевым условиям (5), то можно считать, что при $\vec{x} \in \partial D$ $w \frac{\partial w}{\partial n} = -\sigma(\vec{x})w^2$, где $\sigma(\vec{x}) \geq \sigma_0 = \text{const} > 0$. Таким образом, справедливо неравенство

$$(Lw, w) \geq \int_D |\nabla w|^2 dV + \sigma_0 \int_{\partial D} w^2 ds,$$

из которого с учетом неравенства Фридрихса получим

$$(Lw, w) \geq \vartheta \min(\sigma_0, 1) \|w\|^2,$$

что и означает положительную определенность оператора L .

Наконец, отметим, что потенциал поля скоростей тоже является решением краевой задачи, которая состоит из уравнения

$$\Delta \varphi = 0$$

и краевых условий

$$\begin{cases} (\vec{n}, \nabla \varphi) |_{\Gamma_0} = 0, \\ (\vec{n}, \nabla \varphi) |_{\Gamma_-} = s_1(\vec{x}), \\ (\vec{n}, \nabla \varphi) |_{\Gamma_+} = s_2(\vec{x}). \end{cases} \quad (6)$$

где положительные функции $s_1(\vec{x}), s_2(\vec{x})$ считаются известными и удовлетворяющими условию

$$\int_{\partial \Gamma_-} s_1(\vec{x}) dS = \int_{\partial \Gamma_+} s_2(\vec{x}) dS, \quad (7)$$

которое означает, что приток среды в область D равняется величине стока.

Эта краевая задача имеет множество решений, отличающихся постоянным слагаемым. Для выделения единственного решения будем считать выполненным еще одно условие

$$\int_D \varphi(\vec{x}) dV_m = 0. \quad (8)$$

Наконец отметим, в основной краевой задаче (3), (5) функция $\sigma(\vec{x})$ в (5) может быть записана в виде

$$\sigma(\vec{x}) = \begin{cases} \alpha(\vec{x})/\chi, & \vec{x} \in \Gamma_0; \\ \frac{1}{2\chi} s_1(\vec{x}), & \vec{x} \in \Gamma_-; \\ \frac{1}{2\chi} s_2(\vec{x}), & \vec{x} \in \Gamma_+. \end{cases}$$



2. Формулировка оптимизационной задачи

Будем считать, что функция $\varphi(\vec{x})$ известна. Температурный режим мы задаем в некоторой подобласти $\tilde{D} \subseteq D$, которую в дальнейшем называем *областью контроля температуры*. Нас интересует оптимизационная задача

$$I = \int_D f(\vec{x}) dV \rightarrow \min, \quad (9)$$

при условиях выполнения равенств (1), (2), а также неравенств

$$M(\vec{x}) - T_0 \geq u(\vec{x}) \geq m(\vec{x}) - T_0, \text{ при } \vec{x} \in \tilde{D}; f(\vec{x}) \geq 0, \text{ при } \vec{x} \in D, \quad (10)$$

где $M(\vec{x}), m(\vec{x})$ — соответственно максимальный и минимальный профили температуры в области контроля.

Учтем описанное выше преобразование краевой задачи. Получим следующую формулировку оптимизационной задачи. *Определить минимум функционала (9) при условиях выполнения равенств (3), (5) и неравенств*

$$\begin{aligned} (M(\vec{x}) - T_0)e^{-\varphi/(2\chi)} \geq w(\vec{x}) \geq (m(\vec{x}) - T_0)e^{-\varphi/(2\chi)}, \text{ при } \vec{x} \in \tilde{D}; \\ f(\vec{x}) \geq 0, \text{ при } \vec{x} \in D. \end{aligned} \quad (11)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} g(\vec{x}) = f(\vec{x})e^{-\varphi/(2\chi)}; \theta_1(\vec{x}) = (m(\vec{x}) - T_0)e^{-\varphi(\vec{x})/(2\chi)}, \\ \theta_2(\vec{x}) = (M(\vec{x}) - T_0)e^{-\varphi(\vec{x})/(2\chi)}. \end{aligned}$$

Обозначим также через G оператор, обратный по отношению к оператору $Lw = -\chi\Delta w + (|\nabla\varphi|^2/(4\chi))w$. Тогда, принимая во внимание (10), (11), получаем следующую оптимизационную задачу

$$\begin{aligned} J\{g\} = \int_D e^{\varphi(\vec{x})/(2\chi)} g(\vec{x}) dV \rightarrow \min, \\ \theta_2(\vec{x}) \geq Gg(\vec{x}) \geq \theta_1(\vec{x}), \text{ при } \vec{x} \in \tilde{D}; \\ g(\vec{x}) \in S(D), g(\vec{x}) \geq 0, \text{ при } \vec{x} \in D. \end{aligned} \quad (12)$$

В оптимизационной задаче (12) $S(D)$ является классом функций, среди которых разыскивается решение $g(\vec{x})$. Этот класс желательно выбирать как можно шире, поскольку при этом можно рассчитывать на уменьшение экстремального значения $J\{g\}$. Самым широким из возможных классов $S(D)$ можно было бы считать пространство суммируемых функций $L_1(D)$, поскольку на нем естественно определяется функционал $J\{g\}$. Однако на этом пространстве не определен оператор G и задача (12) становится сформулированной не корректно. Корректной эта формулировка будет, если в качестве $S(D)$ взять пространство функций интегрируемых с квадратом $L_2(D)$. Ниже мы считаем, что $S(D) \subseteq L_2(D)$. В особо оговоренных случаях считается, что $S(D) = L_2(D)$.



Если найдено точное или приближенное решение $g_0(\vec{x})$ задачи (12)), то разыскиваемая оптимальная плотность источников тепла равна

$$f_{\min}(\vec{x}) = e^{\varphi(\vec{x})/(2\chi)} g_0(\vec{x}). \quad (13)$$

Замечание. Возможны и другие формулировки оптимизационной задачи. Иногда ограничения сверху в (12) отсутствуют или не существенны. Такую оптимизационную задачу назовем *односторонней*. В задаче (12) возможно появление дополнительных условий, которые могут привести к некоторым новым её модификациям. Одна из естественных модификаций состоит в требовании невозможности расположения источников тепла в некоторой части области D , т.е. возникает дополнительное требование: $g(\vec{x}) = 0$ при $\vec{x} \in D_0 \subset D$. Такую модификацию назовем *задачей с ограничениями на локализацию источников*. Еще одна модификация связана с присутствием некоторых фиксированных источников до оптимизации. При этом функция $g(\vec{x})$ в (12) состоит из двух слагаемых, одно из которых известная функция, а второе подлежит определению. Такую задачу назовем *задачей с фиксированными источниками*. По форме она мало отличается от задачи (12). К функционалу $J\{g\}$ добавляется постоянное слагаемое, а функции $\theta_1(\vec{x}), \theta_2(\vec{x})$ изменяются на однозначно определяемые слагаемые. Возможны различные комбинации рассмотренных выше модификаций задачи (12).

Мы не обсуждаем здесь вопрос о существовании точного решения задачи (12) и её модификаций. Вообще говоря, подобные задачи не обладают свойством единственности решения (см. [3], замечание 1) Ответы на эти вопросы сильно зависят от выбора класса функций $S(D)$. Для практических нужд во многих случаях достаточно научиться находить так называемое *квазирешение*. Введем обозначение

$$\gamma = \inf_{g \in S(D)} J\{g\}, \quad (14)$$

где инфимум берется по всем функциям, удовлетворяющим также всем ограничениям задачи.

Определение 1. *Квазирешением оптимизационной задачи (12) или её модификаций относительно класса $S(D)$ при данном допуске $\varepsilon > 0$ назовем такую функцию $g_0(\vec{x}) \in S(D)$, удовлетворяющую ограничениям задачи, для которой выполняется неравенство*

$$J\{g_0\} \leq \gamma + \varepsilon.$$

Приемлемость квазирешения определяется малостью ε и широтой класса функций $S(D)$.

3. Конечномерная аппроксимация оптимизационной задачи

Для приближенного нахождения квазирешения построим конечномерную аппроксимацию задачи (12) в виде задачи линейного программирования. Разобьём область D на



n частей $\left(D = \bigcup_{j=1}^n D_j\right)$. Определим подпространство $S_n(D) \subset S(D)$ кусочно-постоянных функций вида $g(\vec{x}) = g_j, \vec{x} \in D_j (j=1, \dots, n)$. Введем в $S_n(D)$ базис, состоящий из функций $e_j(\vec{x}) = 1, \vec{x} \in D_j$, и $e_j(\vec{x}) = 0, \vec{x} \notin D_j$. Тогда $g(\vec{x}) = \sum_{j=1}^n g_j e_j(\vec{x})$. Разбиение области D мы считаем и разбиением области $\tilde{D} \subseteq D$, т.е. при некотором натуральном p справедливо равенство $\tilde{D} = \bigcup_{i=1}^p D_i$. Рассмотрим на $S(D)$ оператор Gg и обозначим

$$a_{ij} = (\text{mes } D_i)^{-1} (Ge_j, e_i), \quad a_i = (\text{mes } D_i)^{-1} (\theta_1, e_i), \quad b_i = (\text{mes } D_i)^{-1} (\theta_2, e_i),$$

где (\cdot, \cdot) — скалярное произведение в $L_2(D)$. Заменяя класс функций $S(D)$ подпространством $S_n(D)$, умножая скалярно ограничения на базисные функции $e_i(\vec{x})$, получаем конечномерную аппроксимацию задачи (12)

$$J_n(f) = \sum_{j=1}^n c_j g_j \rightarrow \min, \tag{15}$$

$$a_i \leq \sum_{j=1}^n a_{ij} g_j \leq b_i, \quad g_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, p).$$

Здесь $c_j = \int_{D_j} e^{\varphi(\vec{x})/(2\chi)} dV$. Самым трудным при построении задачи (15) является на-

хождение матрицы $a_{ij} = (\text{mes } D_i)^{-1} (Ge_j, e_i)$, поскольку оператор G явно не задан. В дальнейшем эта матрица называется *обменной матрицей*. Её определение равносильно нахождению функций $w_j = Ge_j$, которые являются решениями уравнений $-\chi \Delta w + (|\nabla \varphi|^2 / (4\chi)) w = e_j$ при краевых условиях (5). Вопрос о нахождении обменной матрицы мы рассмотрим ниже.

Так же как и в работе [3], задачу (15) мы обозначим через $Z_0(n)$ и будем называть конечномерной аппроксимацией задачи (12). Если задача (12) является односторонней, то и в задаче (15) тоже будут отсутствовать ограничения сверху $b_i = \infty$. Такую задачу будем обозначать $Z_0^+(n)$. Аналогично можно получить конечномерные аппроксимации других модификаций задачи (12). Так для задачи с ограничениями на локализацию источников в конечномерной аппроксимации уменьшается количество переменных. Исчезают некоторые слагаемые в целевой функции и ограничениях. Количество ограничений остается равным p . Для задачи с фиксированными источниками после дискретизации получим задачу вида (15) с другими значениями чисел a_i, b_i . В целевой функции появится свободный член.

Решая конечномерную задачу при достаточно большом n можно надеяться получить приближенное квазирешение задачи (12) или её модификаций.

4. Регулярность конечномерной аппроксимации по функционалу

Минимальное значение целевой функции задачи (15) или конечномерной аппроксимации любой другой модификации задачи (12) будем обозначать через $(J_n)_{\min}$.



Определение 2. Конечномерную аппроксимацию назовем регулярной по функционалу в классе $S(D)$, если справедливо неравенство

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (J_n)_{\min} \leq \gamma,$$

где γ определено в (14).

При наличии регулярности решение конечномерной аппроксимации задачи при достаточно малом $\max_i(\text{diam } D_i)$ можно считать приближенным квазирешением исходной задачи. Действительно, после дискретизации система ограничений означает, что неравенства в исходной задаче практически выполнены, т. к. они удовлетворяются в среднем по D_i . При этом значение $(J_n)_{\min}$ при достаточно больших n не превосходит $\gamma + \varepsilon$.

Ниже мы докажем регулярность конечномерных аппроксимаций $Z_0^+(n)$ и $Z_0(n)$ по функционалу в классе $S(D) = L_2(D)$.

В дальнейшем для аппроксимации $Z_0(n)$ будем считать выполненным следующее

Условие А. Начиная с некоторого номера у задачи $Z_0(n)$ существует хотя бы одна точка минимума, для которой правые неравенства в (15) являются строгими.

Мы не станем обсуждать вопрос о том, когда это условие выполнено. Отметим лишь, что аппроксимацию $Z_0^+(n)$ можно всегда рассматривать как задачу $Z_0(n)$ ($b_i = \infty$), удовлетворяющую условию А.

Установим несколько вспомогательных утверждений. Вместе с последовательностью задач $Z_0(n)$ мы будем рассматривать задачи $Z_\delta(n)$, построенные заменой a_i и b_i на $a_i - \delta$ и $b_i + \delta$ при некотором $\delta > 0$.

Лемма 1. Если задача $Z_0(n)$ имеет решение, то при любом $\delta > 0$ справедливы неравенства

$$(J_n)_{\min} \geq I_n(\delta) \geq (J_n)_{\min} - \delta \sum_{i=1}^{2n} y_i^*,$$

где y_i^* ($i = \overline{1, 2n}$) — координаты какой-нибудь точки максимума задачи, двойственной по отношению к $Z_0(n)$, а $I_n(\delta)$ — минимальное значение целевой функции задачи $Z_\delta(n)$.

□ Поскольку точка минимума задачи $Z_0(n)$ удовлетворяет системе ограничений задачи $Z_\delta(n)$, то справедливо неравенство $(J_n)_{\min} \geq I_n(\delta)$. Целевая функция задачи, двойственной по отношению к задаче $Z_\delta(n)$, имеет вид

$$I_n^T(\bar{y}) = \sum_{i=1}^n a_i y_i - \sum_{i=1}^n b_i y_{i+n} - \delta \sum_{i=1}^{2n} y_i.$$

Согласно первой теореме двойственности, если обозначить через $J_n^T(\bar{y})$ целевую функцию задачи, двойственной к $Z_0(n)$, а через \bar{y}^0 — точку максимума задачи двойственной к $Z_\delta(n)$, получим

$$I_n(\delta) = J_n^T(\bar{y}^0) - \delta \sum_{i=1}^{2n} y_i^0 \geq J_n^T(\bar{y}^*) - \delta \sum_{i=1}^{2n} y_i^* = (J_n)_{\min} - \delta \sum_{i=1}^{2n} y_i^*,$$



что завершает доказательство. ■

Лемма 2. Пусть $(J_n)_{\min}$ и $I_n(\delta)$ — минимальные значения целевых функций задач $Z_0(n)$ и $Z_\delta(n)$ соответственно. Если выполнено условие А, то справедливы неравенства

$$(J_n)_{\min} \geq I_n(\delta) \geq (J_n)_{\min}(1 - \delta \cdot (\min_i a_i)^{-1}).$$

□ В силу условия А для точки минимума задачи $Z_0(n)$ ограничения сверху в (14) являются строгими неравенствами, а это, в силу условий дополнительной нежёсткости, означает, что в точке максимума двойственной задачи $y_i^* = 0$ ($i = \overline{n, 2n}$). Поэтому

$$(J_n)_{\min} = J_n^T(\bar{y}^*) = \sum_{i=1}^n a_i y_i^* \geq (\min_i a_i) \sum_{i=1}^{2n} y_i^*.$$

Отсюда и из леммы 1 вытекает справедливость утверждения. ■

В следующей лемме фигурирует линейный функционал вида

$$J_\rho\{g\} = \int_D \rho(\bar{x})g(\bar{x})dV,$$

определенный на функциях $g(\bar{x}) \in L_2(D)$. Весовая функция ρ считается удовлетворяющей неравенствам $C_1 \leq \rho(\bar{x}) \leq C_2$ ($\bar{x} \in D$) с положительными константами C_1, C_2 .

Лемма 3. Для произвольного числа $\alpha > 0$ и любой функции $g(\bar{x}) \in L_2(D)$ найдется такое число $\varepsilon > 0$, что при выполнении для разбиения области D неравенства $\max_j(\text{diam}D_j) < \varepsilon$ можно выбрать кусочно-постоянную функцию $\hat{g}(\bar{x}) = \sum_{j=1}^n \hat{g}_j e_j(\bar{x})$, для которой выполнены условия $J_\rho\{\hat{g}\} = J_\rho\{g\}$, $\|\hat{g} - g\| < \alpha$, где $\|\cdot\|$ — норма в $L_2(D)$. При этом если почти всюду в D $g(\bar{x}) \geq 0$, то \hat{g}_j тоже можно выбрать неотрицательными.

□ Для любой функции $g(\bar{x}) \in L_2(D)$ можно найти такую функцию $\psi(\bar{x}) \in C_0(G)$, что $\|\psi - g\| < \alpha C_1^{1/2}/(2C_1^{1/2})$. Ввиду равномерной непрерывности $\psi(\bar{x})$ существует такое $\varepsilon > 0$, что для разбиения области D при условии $\max_j(\text{diam}D_j) < \varepsilon$ можно найти кусочно-постоянную функцию $g_1(\bar{x})$, для которой $\|g_1 - \psi\| < \alpha C_1^{1/2}/(2C_1^{1/2})$ или $\|g_1 - g\| < \alpha C_1^{1/2}/C_2^{1/2}$. Зафиксируем это разбиение области D и рассмотрим задачу на минимум для функции n переменных

$$\Phi(\hat{g}) = \|\rho^{1/2}(\hat{g} - g)\|^2 = \sum_{i=1}^n (\hat{g}_i^2 \cdot (\int_{D_i} \rho(\bar{x})dV) - 2\hat{g}_i \cdot (\rho g, e_i)) + \|\rho g\|^2.$$

В стационарной точке справедливы равенства $\hat{g}_i \cdot (\int_{D_i} \rho(\bar{x})dV) - (\rho g, e_i) = 0$, $i = \overline{1, n}$. Выбрав $\hat{g}_i = (\rho g, e_i) / \int_{D_i} \rho(\bar{x})dV$, получим кусочно-постоянную функцию $\hat{g}(\bar{x})$, для которой $J\{\hat{g}\} = J\{g\}$. С другой стороны

$$C_1\|(\hat{g} - g)\|^2 \leq \Phi(\hat{g}) \leq \Phi(g_1) = \|\rho^{1/2}(g_1 - g)\|^2 \leq C_2\|g_1 - g\|^2 < C_1\alpha^2.$$



Поэтому справедливо неравенство $\|\hat{g} - g\| < \alpha$. ■

Лемма 4. Если $m < 4$ и выбрано разбиение области D такое, что $\tilde{D} = \bigcup_{i=1}^p D_i \subset \bar{D}$, то для любого элемента разбиения $D_i \subseteq \tilde{D}$, $i = 1 \div p$ и любой функции $g(\vec{x}) \in L_2(D)$ вышолнено неравенство

$$|(\text{mes } D_i)^{-1}(Gg, e_i)| \leq C \|g\|_{L_2(D)},$$

где константа $C > 0$ не зависит от i , выбора разбиения области D и функции g .

□ Отметим, что функция Gg принадлежит Соболевскому пространству $W_2^{(2)}(D)$ и является непрерывной. Поэтому по теореме о среднем интегрального исчисления получаем

$$|(\text{mes } D_i)^{-1}(Gg, e_i)|^2 \leq \left(\max_{D_i} |Gg| \right)^2 \leq \left(\max_{\tilde{D}} |Gg| \right)^2.$$

По теореме вложения [5, с. 74, теорема 1] справедливо неравенство

$$\max_{\tilde{D}} |Gg| \leq \|Gg\|_{W_2^{(2)}(\tilde{D})}.$$

Если учесть еще одно неравенство Фридрихса [6, с. 196, предложение 3.6.11], а также положительную определенность оператора L получим

$$\|Gg\|_{W_2^{(2)}(\tilde{D})}^2 \leq C_1 (\|L(Gg)\|_{L_2(D)}^2 + \|Gg\|_{L_2(D)}^2) \leq C_2 \|L(Gg)\|_{L_2(D)}^2 = C_2 \|g\|_{L_2(D)}^2.$$

Собирая проделанные оценки, получаем утверждение леммы 4 с $C = C_2^{1/2}$. ■

Теорема. Пусть $m < 4$ и в задаче (12) $\tilde{D} \subset \bar{D}$, а также при всех $\vec{x} \in \tilde{D}$ и некотором $k_0 > 0$ вышолнено неравенство $\theta_1(\vec{x}) \geq k_0$. Пусть также последовательность разбиений области D удовлетворяет условию $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_j (\text{diam } D_j) = 0$. Тогда, если вышолнено условие A , то соответствующая последовательность конечномерных задач $Z_0(n)$ регулярна по функционалу в классе $L_2(D)$.

□ Пусть α — произвольное положительное число. Выберем функцию $0 \leq g(\vec{x}) \in L_2(D)$, удовлетворяющую условиям (12), и такую, что $J\{g\} - \gamma < \alpha$, где γ — число, определенное в (14). Согласно лемме 3, вследствие условий теоремы, для всякого разбиения области D , связанного с задачей $Z_0(n)$ при достаточно большом n , найдется кусочно-постоянная функция $\hat{g}(\vec{x})$, для которой выполнены условия $J\{\hat{g}\} = J\{g\}$, $\|\hat{g} - g\| < \alpha$. Эта функция может не удовлетворять неравенствам в (12). Однако её координаты \hat{g}_i удовлетворяют системе ограничений задачи $Z_\delta(n)$ при некотором $\delta > 0$ и достаточно большом n . Действительно, при $\vec{x} \in \tilde{D}$ справедливы неравенства $\theta_2(\vec{x}) \geq Gg = G\hat{g} + G(g - \hat{g}) \geq \theta_1(\vec{x})$. Умножим скалярно в $L_2(D)$ эти неравенства на $e_i(\vec{x})$ и разделим на $\text{mes } D_i$ при $i = 1, 2, \dots, p$. Вследствие леммы 4 получим

$$\begin{aligned} (\text{mes } D_i)^{-1}(G\hat{g}, e_i) &= \sum_{j=1}^n a_{ij} \hat{g}_j \geq a_i - (\text{mes } D_i)^{-1}|(G(g - \hat{g}), e_i)| \geq \\ &\geq a_i - C \|g - \hat{g}\| \geq a_i - C\alpha; \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 (\text{mes } D_i)^{-1}(G\hat{g}, e_i) &= \sum_{j=1}^n a_{ij}\hat{g}_j \leq b_i + (\text{mes } D_i)^{-1}|(G(g - \hat{g}), e_i)| \leq \\
 &\leq b_i + C\|g - \hat{g}\| \leq b_i + C\alpha.
 \end{aligned}$$

Тем самым показано, что $\hat{g}(\vec{x})$ удовлетворяет системе ограничений задачи $Z_\delta(n)$ с $\delta = C\alpha$. Отсюда, если учесть лемму 2, получим

$$J\{\hat{g}\} \geq I_n(\delta) \geq (J_n)_{\min}(1 - Ck_0^{-1}\alpha).$$

Таким образом, для любого сколь угодно малого $\alpha > 0$ найдется такой номер N_α , что при $n \geq N_\alpha$ выполнено неравенство $(J_n)_{\min} \leq (\gamma + \alpha)(1 - Ck_0^{-1}\alpha)^{-1}$, которое и доказывает теорему. ■

Эта теорема точно также доказывается для других, упомянутых выше модификаций рассматриваемой задачи.

5. Разностная схема для вычисления поля скоростей

Построим интегро-штерноляционнм методом [7] разностную схему для расчёта поля скоростей в двумерной и трёхмерной областях. В двумерном случае в качестве области D возьмём прямоугольник, в 3-мерном — параллелепипед. Сетку, на которой будем искать решение, возьмём равномерную. В двумерном случае сетка имеет вид (рис. 1). Обязательно должны быть узлы в углах области и на границах.

В m -мерном случае для области $D = (a_\alpha \leq x_\alpha \leq b_\alpha, \alpha = 1, \dots, m)$ сетка имеет вид: $\bar{\omega} = \{x_{\vec{i}} = (a_1 + i_1 h_1, \dots, a_m + i_m h_m), \vec{i} = (i_1, \dots, i_m), i_\alpha = 0, \dots, N_\alpha, h_\alpha = (b_\alpha - a_\alpha)/N_\alpha\}$.

Окружим каждый внутренний узел $x_{\vec{i}} (i_\alpha = 1, \dots, N_\alpha - 1)$ элементарным объёмом

$$E_{\vec{i}} = \{a_\alpha + i_\alpha h_\alpha - h_\alpha/2 \leq x_\alpha \leq a_\alpha + i_\alpha h_\alpha + h_\alpha/2\}.$$

Для приграничных узлов $x_{\vec{i}} (i_\alpha = 0, i_\alpha = N_\alpha - 1)$ элементарные объёмы ограничиваются границей области D , как показано на рис. 1 (объёмы $E_{(0,0)}, E_{(0,3)}$).

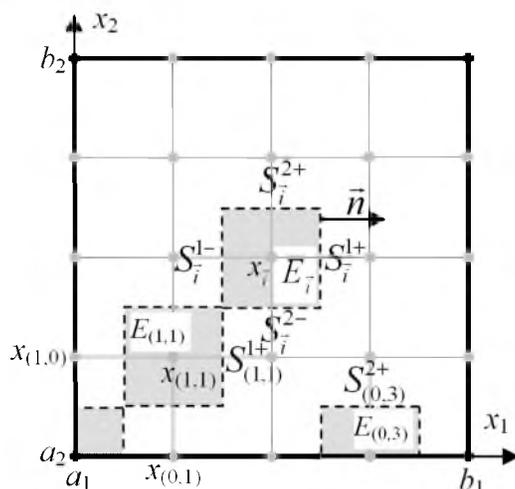


Рис. 1. Разбиение области D сеткой размером 4×4 .



Обозначим также $S_i^{\alpha-}, S_i^{\alpha+}$ – поверхности соприкосновения объема E_i с соседними по пространственному измерению x_α объемами $E_{i\alpha+}, \vec{i}^{\alpha+} = (i_1, \dots, i_\alpha + 1, \dots, i_m)$ и $E_{i\alpha-}, \vec{i}^{\alpha-} = (i_1, \dots, i_\alpha - 1, \dots, i_m)$ или с границей области D , если E_i – приграничный объем и он какими-то из граней касается границы. $P_i^{\alpha-}, P_i^{\alpha+}$ – потоки через соответствующие поверхности. Преобразуя объемный интеграл по формуле Гаусса-Остроградского в поверхностный, получаем:

$$\int_{E_i} \Delta\varphi dV_m = \sum_{\alpha=1}^m (P_i^{\alpha-} + P_i^{\alpha+}) = \sum_{\alpha=1}^m \left(\int_{S_i^{\alpha-}} \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS + \int_{S_i^{\alpha+}} \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS \right) = 0. \quad (16)$$

Аппроксимируем функцию φ внутри области E_i ($i_\alpha = 1, \dots, N_\alpha - 1$) сеточной функцией $\hat{\varphi}$ и запишем предыдущее уравнение в виде:

$$\int_{E_i} \Delta\varphi dV_m = \sum_{\alpha=1}^m \left(\frac{\hat{\varphi}_{i\alpha-} - \hat{\varphi}_i}{h_\alpha} \text{mes } S_i^{\alpha-} + \frac{\hat{\varphi}_{i\alpha+} - \hat{\varphi}_i}{h_\alpha} \text{mes } S_i^{\alpha+} \right) + O(h^2) = 0.$$

Учитывая, что $\text{mes } S_i^{\alpha+} = \text{mes } S_i^{\alpha-} = \text{mes } E_i / h_\alpha$, получим

$$\int_{E_i} \Delta\varphi dV_m = \sum_{\alpha=1}^m \left(\frac{\hat{\varphi}_{i\alpha-} - 2\hat{\varphi}_i + \hat{\varphi}_{i\alpha+}}{h_\alpha^2} \right) \text{mes } E_i + O(h^2) = 0. \quad (17)$$

Если какая-либо поверхность объема E_i касается границы ($i_\alpha = 0, i_\alpha = N_\alpha$), то в уравнении (17) соответствующее значение потока формируется исходя из условия (6). Например, если вещество входит в область D через границу $S_i^{\alpha-}$, то:

$$P_i^{\alpha-} = \int_{S_i^{\alpha-}} \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS = \int_{S_i^{\alpha-}} s_2(\vec{x}) dS.$$

Уравнение (8) аппроксимируется уравнением

$$\int_D \Delta\varphi dV_m = \sum_{i_1=0}^{N_1} \dots \sum_{i_m=0}^{N_m} (\hat{\varphi}_i \text{mes } E_i) + O(h^2) = 0. \quad (18)$$

Составленные для каждого объема E_i уравнения (17) образуют систему линейных уравнений с неизвестными φ_i общим количеством $(N_1 + 1) \cdot \dots \cdot (N_m + 1)$, имеющую решение с точностью до произвольной постоянной. Если к ней добавить уравнение (18), то система будет иметь единственное решение, при условии, если выполняется условие (7). Результатом её решения будет сеточная функция потенциала $\hat{\varphi}$.



6. Нахождение элементов обменной матрицы a_{ij}

Приближённое решение уравнения (3), (5) также будем производить конечно-разностным методом. Предположим, что область разбита таким же образом, хотя при экспериментировании размеры сеток могут отличаться. Аппроксимируем функцию w в виде сеточной функции \hat{w} и запишем также уравнение баланса для уравнения (3) для произвольной области E_i , не касающейся границы:

$$\begin{aligned} \int_{E_i} (-\chi \Delta w + (|\nabla \varphi|^2 / (4\chi))w - fe^{-\varphi/(2\chi)}) dV_m = -\chi \sum_{\alpha=1}^m \left(\int_{S_i^{\alpha-}} \frac{\partial w}{\partial n} dS + \int_{S_i^{\alpha+}} \frac{\partial w}{\partial n} dS \right) + \\ + \int_{E_i} ((|\nabla \varphi|^2 / (4\chi))w - fe^{-\varphi/(2\chi)}) dV_m = -\chi \sum_{\alpha=1}^m \left(\frac{\hat{w}_{i\alpha-} - 2\hat{w}_i + \hat{w}_{i\alpha+}}{h_\alpha^2} \right) \text{mes } E_i + \\ + \hat{w}_i \int_{E_i} ((|\nabla \varphi|^2 / (4\chi)) dV_m - \int_{E_i} fe^{-\varphi/(2\chi)} dV_m + O(h^2) = 0. \quad (19) \end{aligned}$$

Если область E_i какой-то поверхностью касается границы (например, по направлению против оси x_α), то, согласно условию (5), поток через неё равен:

$$\int_{S_i^{\alpha-}} \frac{\partial w}{\partial n} dS = \int_{S_i^{\alpha-}} \sigma w dS = \hat{w}_i \int_{S_i^{\alpha-}} \sigma dS + O(h^2).$$

Соответствующие слагаемые в этом случае также нужно заменить в уравнении (19). Составленные для каждого объёма E_i уравнения (19) образуют самосопряжённую систему линейных уравнений с неизвестными \hat{w}_i , имеющую единственное решение. Система имеет n правых частей. Её решение даёт набор сеточных функций $\hat{w}_j(\vec{x})$ ($j=1, \dots, n$), каждая из которых является приближённым решением (3), (5) с $f(\vec{x}) = e_j(\vec{x})$, и можно считать, что

$$Ge_j = \int_{\vec{\xi} \in D} G(\vec{x}, \vec{\xi}) e_j(\vec{\xi}) dV_m = \int_{\vec{\xi} \in D_j} G(\vec{x}, \vec{\xi}) dV_m \approx \hat{w}_j(\vec{x}) e^{\varphi(\vec{x})/(2\chi)}.$$

Далее, для вычисления элементов a_{ij} используется численное интегрирование методом трапеций. Подобласти D_j выберем следующим образом: разрежем область D по каждому измерению на равные части. Таким образом, получим одинаковые по объёму подобласти, которые образуют также равномерную сетку $\bar{\omega}_f$. Сетка $\bar{\omega}$ должна быть чаще $\bar{\omega}_f$ по каждому измерению в целое число раз η , чтобы узлы сетки $\bar{\omega}$ были в точках разрыва функций e_j . Если расчётная сетка $\bar{\omega}$ крупная, то можно просто считать $a_{ij} = \hat{w}_j(x_i) e^{\varphi(x_i)/(2\chi)} \text{mes } D_i$, иначе $a_{ij} = \int_{\vec{x} \in D_i} \hat{w}_j(\vec{x}) e^{\varphi(\vec{x})/(2\chi)} dV_m$.



Полученная конечно-разностная схема является консервативной, что удобно для проверки решения. Если алгоритм метода обрабатывает правильно, то следующее условие выполняется с точностью до ошибки округления:

$$-\chi \oint_S \sigma \hat{w}_j dS + \int_D ((|\nabla \hat{\varphi}|^2 / (4\chi)) \hat{w}_j - f e^{-\hat{\varphi}/(2\chi)}) dV_m = 0. \quad (20)$$

В данном условии функции \hat{w}_j и $\hat{\varphi}$ предполагаются кусочно-постоянными, т.е. они принимают одинаковое значение в каждой E_i .

7. Результаты численных экспериментов

Для численного решения задачи (15) при $m=2, 3$ разработан программный комплекс HeatCore, написанный на языке C# и не использующий дополнительных математических библиотек. Данный комплекс позволяет принимать все необходимые входные данные: константы, коэффициенты, параметры сеток, в том числе краевые условия, функции температур в виде скриптов на языке C#. Для представления результатов разработаны графические модули для вывода:

1. Графиков функций 2 переменных в виде поверхностей на 3-мерной сцене (рис. 5);
2. Кусочно-постоянной функции плотности источников на 3-мерной сцене в виде объёмов различной прозрачности и цвета (рис. 3);
3. Тепловых карт и линий тока вещества (рис. 6).

На рис. 2 приведена общая блок-схема алгоритма решения задачи (15).

Теоретически в работе установлено, что при стремлении $\max_j (\text{diam } D_j)$ к нулю точное значение $(J_n)_{\min}$ стабилизируется около нижней грани целевого функционала. Поэтому n мы выбираем эмпирически по признаку стабилизации $(J_n)_{\min}$.

Приведем результаты численных экспериментов для параметров среды близких к реально наблюдаемым.

Эксперимент 1. Области D , заполненной воздухом с коэффициентом температуропроводности $\chi = 2,216 \times 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ зададим размер $5 \times 5 \times 3 \text{ м}$. Границу будем считать выполненной из материала с $\chi_k = 5,2 \times 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$ толщиной 30 см (кирпичная стена), местами из материала $\chi_c = 3,4 \times 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$ толщиной 1 см (стекло). Краевые условия для расчёта поля скоростей зададим следующим образом: в местах притока вещества Γ_+ $s_2(\vec{x}) = 0,0002 \text{ м/с}$, в местах стока Γ_- $s_1(\vec{x}) = 0,0002 \text{ м/с}$; размер расчётной сетки для вычисления — $15 \times 15 \times 15$ делений. Положение стоков и притоков, площадь которых одинакова, изображено на рис. 3. Максимальный и минимальный температурные профили зададим следующими функциями:

$$m(x, y, z) = \begin{cases} 285 - (y - 4,5) \cdot 12,5 K, & y \geq 4,5 \text{ и } z \geq 1; \\ 285 K, & y \leq 4,5 \text{ или } z \leq 1 \end{cases}$$



и $M(x, y, z) = 310$. Функция $m(x, y, z)$ выбирается меньшей в месте входа вещества, потому что нагреть вещество в этом месте можно только слишком сильным источником, который также сильно разогреет всю область. Температуру внешней среды возьмём $T_0 = 260$ К. Далее будем считать область, где $y \leq 4,5$ или $z \leq 1$ областью контроля. На рис. 3 изображён результат решения задачи: полупрозрачными объёмами показаны источники, прозрачность которых тем меньше и цвет ярче, чем больше интенсивность источника. Для данного расчёта результирующее значение $(J_n)_{\min} = 0,018497$ К · м³/с. Учитывая плотность воздуха $\rho_v = 1,293$ кг/м³ и его удельную теплоёмкость $c_v = 1005$ Дж/(кг·К), получим мощность источников в более привычной физической системе единиц, равную $0,018497 \cdot 1,293 \cdot 1005$ Вт $\approx 24,036$ Вт.

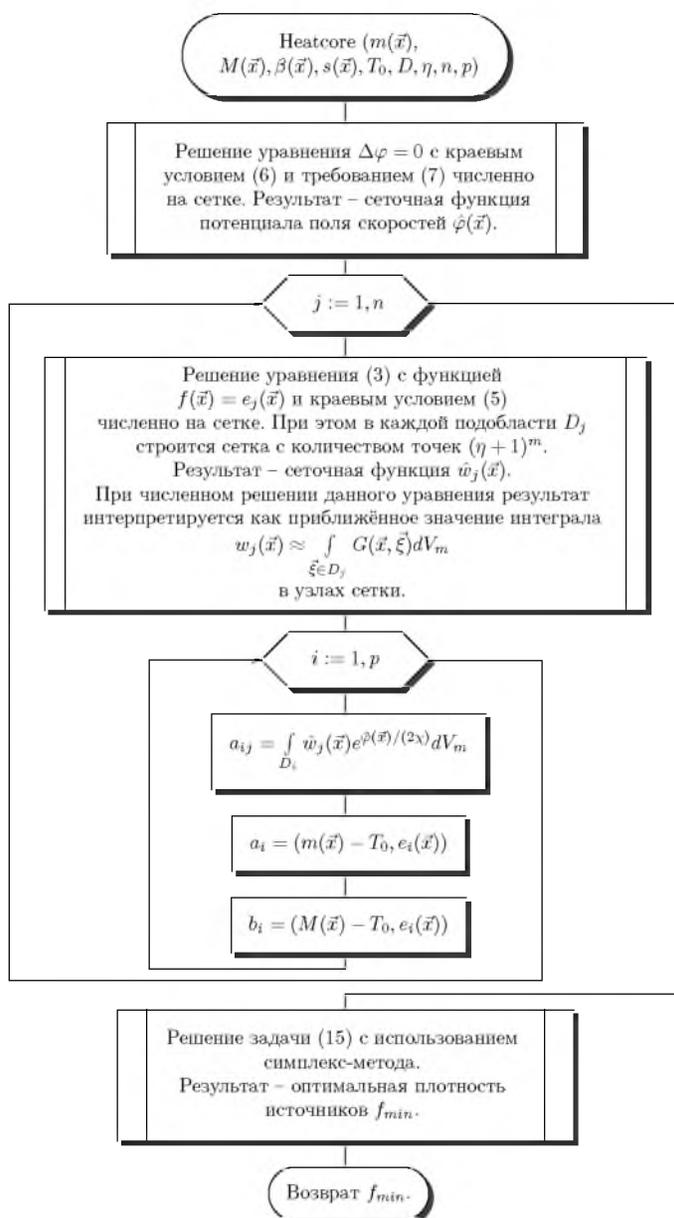


Рис. 2. Блок-схема алгоритма решения t -мерной задачи.

Замечание. Для данного эксперимента минимальное значение потенциала $\varphi_{\min} \approx -0,000199 \text{ м}^2/\text{с}$ наблюдается в точке входа вещества. При этом в правой части уравнения (3) f умножается на $\exp(1,99 \times 10^{-4}/(2 \cdot 2,216 \times 10^{-5})) \approx e^{4,49}$. Дальнейшее увеличение скорости приводит к появлению чисел больших порядков и ошибкам округления при использовании типа double. Например, если ускорить движение вещества в 10 раз, числа будут размера $e^{44,9} \approx 3,16 \times 10^{19}$. Стандартный вещественный тип данных double, как известно, держит только 15-16 значащих цифр, поэтому для подобных алгоритмов нужно использовать типы повышенной точности.

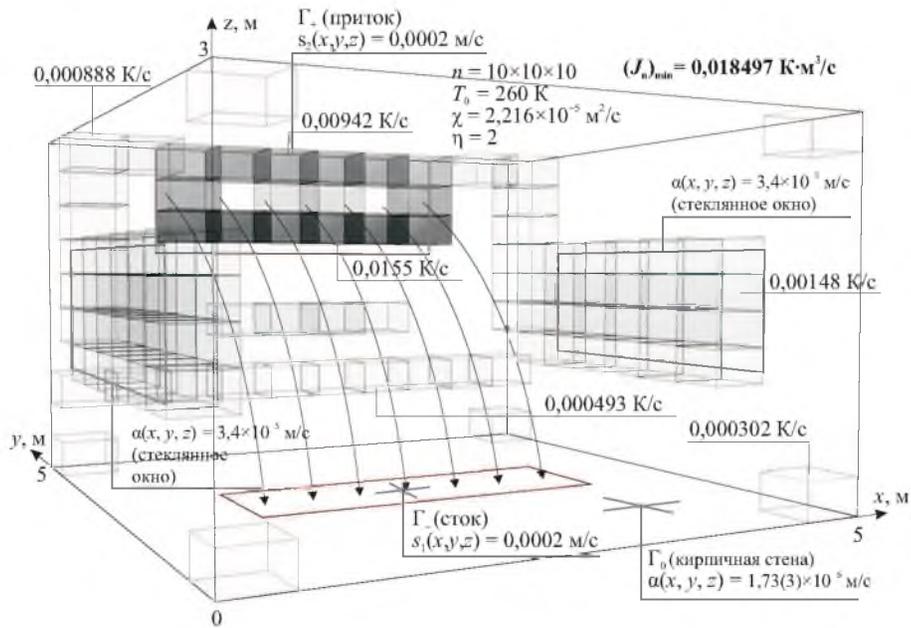


Рис. 3. Оптимальное расположение источников тепла f в параллелепипеде.

Эксперимент 2. При тех же входных данных и параметрах среды проведём вычисления с различным χ и числом разбиений n . Частоту сетки η достаточно брать равной 2, поскольку увеличение η не оказывает существенного влияния на конечный результат. Увеличение χ приводит к более быстрой по n стабилизации величины $(J_n)_{\min}$ (табл. 1).

Таблица 1

Зависимость $(J_n)_{\min}$ от χ и n

$n \setminus \chi$	$2 \times 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$	$4 \times 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$	$8 \times 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$	$1,6 \times 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$	$3,2 \times 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$
$4 \times 4 \times 4$	0,02175	0,01978	0,01723	0,01514	0,01379
$5 \times 5 \times 5$	—	0,01872	0,01641	0,01463	0,01349
$6 \times 6 \times 6$	0,01918	0,01781	0,01587	0,01430	0,01331
$7 \times 7 \times 7$	0,01888	0,01747	0,01571	0,01426	0,01330
$8 \times 8 \times 8$	0,01880	0,01758	0,01585	0,01428	0,01330
$9 \times 9 \times 9$	0,01893	0,01759	0,01575	0,01421	0,01328
$10 \times 10 \times 10$	0,01863	0,01734	0,01556	0,01413	0,01322
$11 \times 11 \times 11$	0,01817				

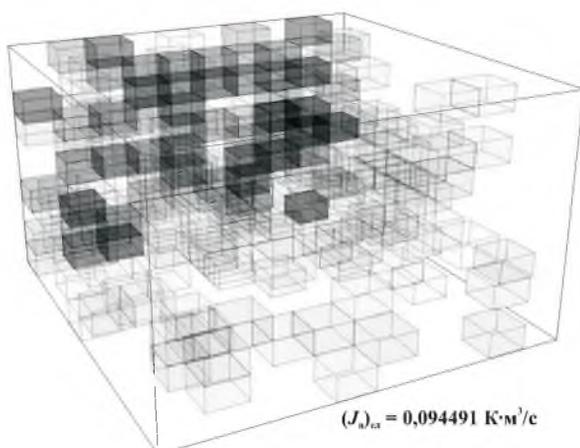
Эксперимент 3. В следующие таблицу сведены результаты вычислений при тех же входных параметрах, отличающихся только краевым условием (функция $s(\vec{x}) = s_0$) для расчёта нуля скоростей и числом n разбиения функции источника f . При малых скоростях $(J_n)_{\min}$ стабилизируется быстрее, а при больших решение может и не существовать.

Таблица 2

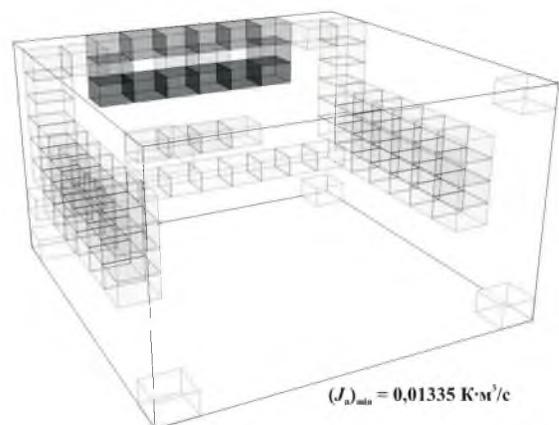
Зависимость $(J_n)_{\min}$ от $s(\vec{x})$ и n

n	s_0	10^{-5} м/с	2×10^{-5} м/с	4×10^{-5} м/с	8×10^{-5} м/с	$1,6 \times 10^{-4}$ м/с	$3,2 \times 10^{-4}$ м/с
$4 \times 4 \times 4$		0,00521	0,00581	0,00723	0,01058	0,01790	0,03141
$5 \times 5 \times 5$		0,00516	0,00570	0,00696	0,01003	0,01694	—
$6 \times 6 \times 6$		0,00515	0,00568	0,00689	0,00975	0,01590	0,02791
$7 \times 7 \times 7$		0,00511	0,00562	0,00680	0,00956	0,01564	0,02778
$8 \times 8 \times 8$		0,00509	0,00559	0,00676	0,00956	0,01562	0,02728
$9 \times 9 \times 9$	0,00511	0,00561	0,00678	0,00957	0,01567	—	—
$10 \times 10 \times 10$	0,00509	0,00558	0,00672	0,00944	0,01547	0,02734	

Эксперимент 4. Для проверки эффективности использования разработанного алгоритма проведём следующий эксперимент. При тех же входных данных и параметрах среды расположим источники случайным образом (Рис. 4а). Данные источники суммарной мощностью $0,094491 \text{ К} \cdot \text{м}^3/\text{с}$ обеспечивают температурный коридор в области контроля в диапазоне $278\text{-}578,4 \text{ К}$. Эти значения возьмём в качестве входных данных для решения задачи оптимизации (15). Пусть в области контроля $m(x, y, z) = 278 \text{ К}$, $M(x, y, z) = 578,4 \text{ К}$. Оптимальное распределение источников (Рис. 4б) при этом даёт суммарную мощность $0,01335 \text{ К} \cdot \text{м}^3/\text{с}$, что экономит больше 80% тепловой энергии.



а) неоптимальное



б) оптимальное

Рис. 4. Расположение источников в параллелепипеде.

Эксперимент 5. Для $m = 2$ результат решения задачи (плотность источников) представлен в виде столбиков, и результирующая температура в виде поверхности (рис. 5). На сторонах расположены места стоков – белые параллелограммы. Приток находится на дальней стороне около самого сильного источника. Параметры данного эксперимента приведены на рис. 5.

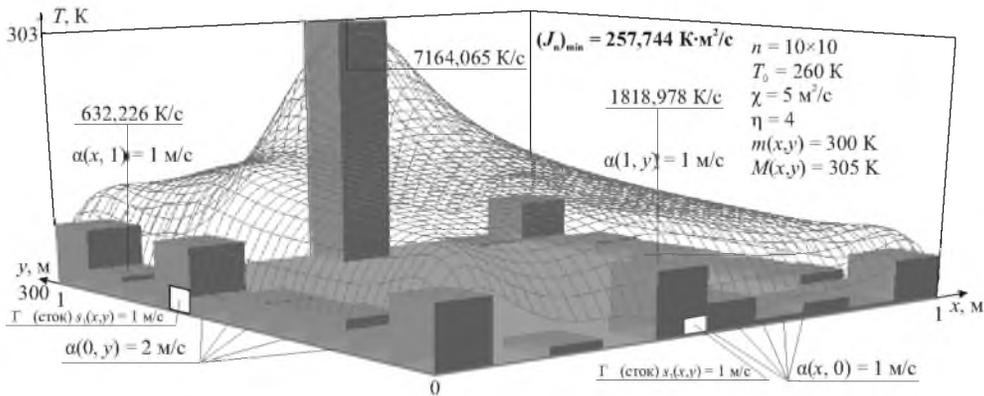


Рис. 5. Оптимальное расположение источников тепла f в квадрате.

На рис. 6. наглядно представлены линии тока вещества внутри области D . Места, где плотность линий низкая являются застойными зонами. Здесь вещество втекает сверху и вытекает через левую и нижнюю стороны.

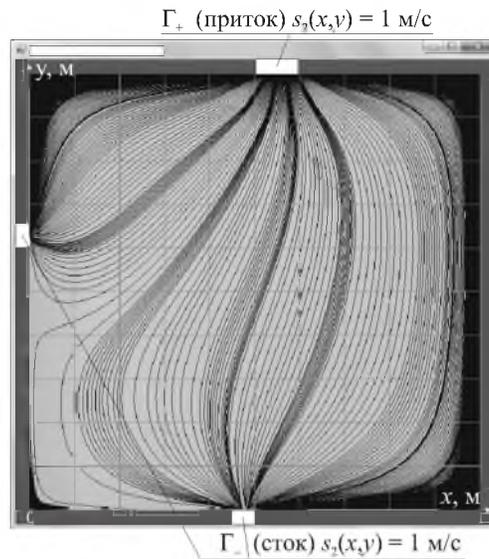


Рис. 6. Линии тока вещества ν .

Литература

1. Брусенцев А.Г., Брусенцева В.С. Задача об оптимальном выборе источников тепла // Сб. трудов XXIII международной конференции «Математические методы в технике и технологиях». – 2010. – 2. – С.43-46.



2. Брусенцев А.Г., Осипов О.В. Численное исследование задачи об оптимальном выборе источников тепла // Сборник трудов XXIV международной конференции «Математические методы в технике и технологиях» (ММТТ-24), Саратов. – 2011. – 2. – С.33-34.
3. Брусенцев А.Г., Осипов О.В. Приближенное решение задачи об оптимальном выборе источников тепла // Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика. – 2012. – №5 (124); Вып.26. – С.60-69.
4. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике / М.: Наука, 1970.
5. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике / М.: Наука, 1968.
6. Нарасимхан Р. Анализ на действительных и комплексных многообразиях / Издательство «Платон», 1997.
7. Самарский А.А. Теория разностных схем / М.: Главная ред. физ.-мат. лит. изд-ва «Наука», 1977. – 656 с.

OPTIMAL CHOICE OF HEAT SOURCES AT THE PRESENCE OF CONVECTION

A.G. Brusentsev, O.V. Osipov

Belgorod State Technological University named V.G. Shuchov,
Kostyukova St., 46, Belgorod 308012, Russia, e-mail: brusentsev@mail.ru, ov.osipov@gmail.com

Abstract. It is proposed and justified the new method of numerical solution of the optimal choice of heat source in moving medium. It consists in reducing the original problem to linear programming. In the course of numerical simulations using finite-difference schemes obtained numerical results in three-dimensional region with parameters closed to real ones at small velocity of fluid flow.

Key words: moving medium, optimal control, elliptic boundary value problems, finite-dimensional approximation, inverse problem of heat conduction, convection, density of heat, heat balance method, simplex method.