MSC 34A99

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕПРЕРЫВНЫХ НЕЧЕТКИХ СИСТЕМ

И.И. Терновых

Воронежский Государственный Университет,
ул. Университетская площадь, 1, Воронеж, 394006, Россия, e-mail: Irina.Ternovikh@gmail.com

Аннотация. В статье рассматривается устойчивость одного дифференциального уравнения с логического тина. На основе нечеткой производной вводятся понятия α-устойчивости и асимнтотической α-устойчивости.

Ключевые слова: характеристическая функция, нечёткая динамическая система, нечёткая производная, α-устойчивость.

Введение. Классическая теория устойчивости рассматривает точки равновесия систем и их динамическое поведение в окрестности этих точек. В течение пятидесяти лет после Ляпунова и Пуанкаре, в проводимых исследованиях наблюдалось заметное продвижение. Благодаря работам Дж. Биркхофа [5], В.В. Немыцкого и В.В. Степанова [6] стало очевидным, что суть этой теории заключалась в самом понятии динамической системы. Под динамической системой мы будем понимать систему, описывающую математическую модель некоторого объекта, процесса или явления. Исследуя динамические системы, существующие в биологии, экономике и социологии, с использованием фундаментальных понятий из теории устойчивости Ляпунова или применяя топологические свойства, установленные Пуанкаре, достоверность полученных результатов теряется, так как основная проблема заключается в том, что подобные системы практически всегда находятся вне состояния равновесия и претерпевают множество изменений, ведущих к отклонению от точки равновесия, что не позволяет в полной мере использовать результаты классической теории. Теория нечетких множеств, появившаяся сравнительно недавно, представляет новый инструмент для моделирования поведения динамических систем, описывающих реальные процессы во времени. В настоящей работе исследуется устойчивость нечеткой динамической системы. В работе Де Гласса [1] сформулирован подход к исследованию нечетких динамических систем с заранее известными решениями и их областью определения, использующий в качестве эталона четкую модель динамического уравнения с заранее определенной областью решений. В работе дается обобщение этого метода и нахождение условия устойчивости (неустойчивости) при заведомо неизвестных решениях нечеткой динамической системы.

1. Предварительные сведения о нечетких системах. Пусть X — некоторое нечеткое множество, тогда его нечёткое подмножество $A \subseteq X$ представляется функцией принадлежности $\mu_A : X \to I = [0,1] \subset \mathbb{R}$. Семейство всех нечётких подмножеств на X обозначим как $P(X)$.

Слабым α-срезом нечёткого подмножества $A \in P(X)$ для $\alpha \in (0,1]$ называется обычное множество вида

$$A_\alpha = \Big\{x \in X : \mu_A(x) \geq \alpha\Big\}.$$

На основе теоремы декомпозиции любое нечеткое подмножество $A \in P(X)$ может быть представлено совокупностью своих α-срезов но формуле $A = \bigvee_{\alpha}\{\alpha A_{\alpha}\}$. Нечеткое подмножество R множества X^2 с функцией принадлежности $\mu_R(x, y)$ является нечетким отношением. Совокупность нечетких отношений на X будем обозначать $P(X^2)$.

Для нечетких отношений можно также определить понятие α-среза вида $R_{\alpha} = \{(x, y) \in X^2 : \mu_R(x, y) \geq \alpha\}$, при этом R_{α} является обычным бинарным отношением.

Теорема декомпозиции так же имеет место, т.е. $R = \bigvee_{\alpha}\{\alpha R_{\alpha}\}$.

Динамическое поведение непрерывной нечёткой системы определяется дифференциальным уравнением вида [4]

$$\dot{x}(t) = x(t) \circ R\,,$$

где $x(t) \in P(X)$ — состояние системы в момент времени t, R — нечеткое отношение на множестве с функцией принадлежности $\mu_R(u, y)$, определяющее переход в следующее состояние.

В терминах функции принадлежности (1) можно переписать в следующем виде:

$$\mu_{\dot{x}(t)}(y) = \bigvee_{u}[\mu_{x(t)}(u) \wedge \mu_R(u, y)]\,, \quad t \in \mathbb{R}_+\,, \tag{2}$$

Пусть $\alpha \in (0, 1]$, R_{α} — α-срез отношения R. Для каждого $u \in X$ множество образов обозначим

$$R_{\alpha}(u) = \{w \in X : (u, w) \in R_{\alpha}\}\,. \tag{3}$$

Тогда R_{α} является функцией на X.

Пусть d определяет метрику в X, тогда потребуем для всех α чтобы множество R_{α} удовлетворяло следующим условиям [1]:

1) $R_{\alpha}(u)$ — компактное и непустое множество;

2) существует такое действительное k, что для всех (u_1, u_2), имеет место

$$d\Big[R_{\alpha}(u_1), R_{\alpha}(u_2)\Big] < k \cdot d(u_1, u_2)\,.$$

Нечеткая система (1) для каждого $\alpha \in (0; 1]$ имеет вид [1]:

$$\dot{x}_{\alpha}(t) = R_{\alpha}\Big(x_{\alpha}(t)\Big)\,, \tag{4}$$

или, иначе:

$$\dot{x}_{\alpha}(t) == \bigcup_{u \in x_{\alpha}(t)} R_{\alpha}(u)\,, \tag{5}$$

Пусть x^0 — заданное начальное значение, тогда для всех $\alpha \in (0; 1]$ существует такое отображение $f_{\alpha} : P(X) \to P(X)$, что

$$f_{\alpha}(x^0_{\alpha}, t) = x_{\alpha}(t)\,, \tag{6}$$

Обобщая для всех α, положив $f(x^0,t) = \bigcup\limits_{\alpha} f_\alpha(x_\alpha,t)$ и $x(t) = \bigcup\limits_{\alpha} x_\alpha(t)$, получим следующее уравнение:

$$f(x^0,t) = x(t)\,, \tag{7}$$

которое называется *эволюционным уравнением нечёткой системы* (1) и представляет собой множество всех решений системы (1).

2. Типы устойчивости нечетких систем. Пусть M — замкнутое подмножество в X. Введем некоторые определения, основываясь на [7-10].

Определение 1. *Функция $V : X \to \mathbb{R}$ является положительно определённой на множестве M в X тогда и только тогда, когда:*

1) $V(x)$ определена в окрестности множества $N \supset M$;

2) $\forall u \in M\ (V(u) = 0)$;

3) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon)\ (d(u,M) < \delta \to V(u) < \varepsilon)$;

4) существует возрастающая и непрерывная функция $\xi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ такая, что для всех $u \in N \setminus M$ выполняются условия: $\xi(0) = 0$ и $\xi\Big(d(u,M)\Big) < V(u)$.

Заметим, что, так как M — замкнутое множество, то $N \setminus M$ никогда не является пустым. Следовательно, существует такая константа $\eta > 0$, что имеет место следующая цепочка включений $M \subset B[M,\eta] \subset N$, где

$$B[M,\eta] = \{x \in X : d(M,x) < \eta\}\,. \tag{8}$$

Пусть V — положительно определенная функция в M. Для любого $\gamma \in \mathbb{R}_+$ определим множество

$$K(\gamma) = \{u \in N : V(u) \leq \gamma\}\,. \tag{9}$$

Положим $\gamma = \inf\{V(u) : u \in S(M,\eta)\}$, где $S(M,\eta) = \{x \in X : d(x,M) = \eta\}$. Тогда $K(\gamma) \subset M$.

На основе классического определения устойчивости в смысле Ляпунова [7-8] и [11] получим следующие определения.

Определение 2. *Подмножество $M \subset X$ называется устойчивым для нечёткой системы f вида (7), если*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon)\ (u \in B(M,\delta) \to \forall t \in \mathbb{R}_+\ (f(u,t) \subset B(M,\varepsilon)))\,.$$

Определение 3. *Подмножество $M \subset X$ называется α-устойчивым для нечёткой системы f вида (7), если для*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon)\ (u \in B(M,\delta) \to \forall t \in \mathbb{R}_+\ (f_\alpha(u,t) \subset B(M,\varepsilon)))\,.$$

В терминах функции принадлежности определение 3 примет следующий вид.

Определение 3$'$. *Подмножество $M \subset X$называется α-устойчивым тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon)$, что $u \in B(M,\varepsilon)$ предполагает, что $\mu_{f(u,t)}(z) \leq \alpha$ для всех $z \in B(M,\delta)$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$.*

Определение 4. *Подмножество $M \subset X$ называется α-притягивающим, если существует такая окрестность $N \supset M$, что для каждого любой возрастающей последовательности $\{t_n\}$ последовательность $\{z_n \in f_\alpha(u, t_n)\}$ сходится к $z \in M$ при $n \to \infty$.*

Данные определения можно сформулировать в терминах функции принадлежности.

Определение 4′. *Подмножество $M \subset X$ называется α-притягивающим (аттрактором), если существует такая окрестность $N \supset M$, что для всех $u \in N$, для любой последовательности $\{t_n\}$ такой, что $t_n \to \infty$ при $n \to \infty$ и любой последовательности $\{z_n\}$ такой, что $z_n \in \mu_{f(u,t_n)}(z_n) \geq \alpha$, имеет место $z_n \to z \in M$ при $n \to \infty$.*

Определение 5 [1]. *Подмножество $M \subset X$, которое одновременно является α-устойчивым и α-притягивающим называется α-асимптотически устойчивым.*

Критерий α-устойчивости для нечёткой системы (1) можно установить через понятие нечёткой производной вещественной функции, как это сделано в работе [1]. Также будем опираться на труды классической теории дифференциальных уравнений [7].

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть f — нечёткая система и M — подмножество X. Если существует полунепрерывная снизу функция $V : M \to \mathbb{R}$ такая, что*

1) $V(\cdot)$ определена в некоторой окрестности $N \supset M$;

2) $V(\cdot)$ — положительно определённая функция по отношению к M;

3) $\sup D_\alpha V(u) < 0$ для всех $u \in N$,

где $D_\alpha V$ – нечеткая производная от V на срезе α, то множество M является α-устойчивым.

Теорема 2 [1]. *Пусть f — нечёткая система и $M \subset X$. Если существует полунепрерывная снизу функция $V : X \to \mathbb{R}$ такая, что выполняются условия 1)–2) из Теоремы 1, а условие 3) принимает вид:*

3′) $\sup D_\alpha V(u) < 0$ для всех $u \in N \setminus M$,

то множество M является асимптотически α-устойчивым.

Теоремы 1 и 2 предполагают наличие предварительных знаний об эволюционном уравнении и об α-кривых. Однако эта информация чаще всего не является доступной, поэтому необходимо переформулировать критерий α-устойчивости таким образом, что более широкие знания об эволюционном уравнении не потребуются.

Воспользовавшись теоремой из [1], фундаментальными понятиями об устойчивости из [10], получим следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть нечёткая система определена в виде (1) и $M \subset X$. Если существует дифференцируемая функция $V : X \to \mathbb{R}$ такая, что выполняются условия 1)–2) из Теоремы 1, а условие 3) имеет вид*

3′) $\sup\left\{\langle \nabla V(\cdot), z\rangle : z \in R_\alpha(u)\right\} \leq 0$ (и соотв. < 0) для всех $u \in N \setminus M$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение, тогда множество M является α-устойчивым (соответственно асимптотически α-устойчивым).

□ Доказательство можно найти в [1]. ■

Критерий α-устойчивости, предложенный в Теореме 3, по существу, основывается на взаимосвязи между ∇V и производной от V на всех α-кривых. Однако требуется непрерывная дифференцируемость функции V. Это условие является ограничивающим при практическом использовании этой теоремы и поэтому предполагает более обобщённый вариант этой теоремы.

Теорема 4. *Пусть нечёткая система определена в виде (1) и пусть $M \subset X$. Если существует полунепрерывная снизу функция $V : X \to \mathbb{R}$, такая, что выполняются условия 1)–2) из Теоремы 1, а условие 3) имеет вид*

3′) существует такая непрерывная функция $W : X \to \mathbb{R}$, что для $\forall u \in N \setminus M$ выполняется

$$\sup\left\{\liminf_{\substack{t\to 0+\\ \zeta\to z}} \frac{V(u+t\zeta)-V(u)}{t} \;:\; z\in R_\alpha(u)\right\} \le -W(u)$$

(соотв. $< -W(u)$) для всех $u \in N \setminus M$, тогда множество M — α-устойчивое (и соотв. асимптотически α-устойчивое).

□ Для всех $u \in N$ любая α-кривая q_α, проходящая через u, является решением дифференциального уравнения

$$q'_\alpha(u,t) = R_\alpha(q_\alpha(u,t))\,, \qquad t \in \mathbb{R}_+\,.$$

Пусть Φ^d_α — множество всюду дифференцируемых α-кривых. Тогда для всех $q_\alpha \in \Phi^d_\alpha$ и для всех $u \in N$ существует такая непрерывная функция h, что $h \in R_\alpha(u)$ и $q'_\alpha = h(q_\alpha)$. Так, условие 3′) предполагает, что

$$\liminf_{\substack{t\to 0+\\ \zeta h(u)}} \frac{V(u+\zeta t)-V(u)}{t} \le -W(u)\,,$$

для всех $u \in N$.

Таким образом, получим

$$V(q_\alpha(u,t)) - V(u) \le -\int\limits_0^t W\Big(q_\alpha(u,\tau)\Big)d\tau$$

и, соответственно,

$$\liminf_{t\to 0+} \frac{V(q_\alpha(u,t))-V(u)}{t} \le -W(u)\,.$$

Итак, для всех кривых $q_\alpha \in \Phi^d_\alpha$ верно неравенство $V'(q_\alpha(u)) \le -W(u)$. Продолжая рассуждать, как в Теореме 3, можно показать что, для всех $q_\alpha \in \Phi^d_\alpha$ выполняется $V(q_\alpha(u)) < -W(u)$. Следовательно, $\sup D_\alpha V(u) \le -W(u)$. Применение Теоремы 1 и Теоремы 2 завершает доказательство. ■

Определение 2 α-устойчивости предполагает, что α-устойчивость нечеткой системы вытекает из одинакового поведения всех α-кривых, по крайней мере, в окрестности множества $M \subset X$. На практике такого может и не быть. Это обусловливает необходимость такого понятия α-устойчивости, которое учитывает возможность иного поведения α-кривой.

Определение 6. *Подмножество $M \subset X$ является частично α-устойчивым для нечёткой системы f, если для*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) \ (u \in B(M, \delta) \to \forall t \in \mathbb{R}_+ (f_\alpha(u,t) \cap B(M, \varepsilon) \neq \varnothing) \,.$$

В терминах функции принадлежности подмножество $M \subset X$ частично α-устойчивое тогда и только тогда, когда для всех $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon)$, что если $u \in B(M, \delta)$, то существует $z \in B(M, \varepsilon)$, такое что $\mu_{f((u,t)}(z) > \alpha$ для всех $t \in \mathbb{R}_+$.

На основе Теоремы 1 можно сформулировать следующее утверждение об α-устойчивости множества M, справедливость которого легко показать.

Теорема 5. *Пусть f — нечёткая система, и пусть $M \subset X$. Если существует полунепрерывная снизу функция $V : X \to \mathbb{R}$, такая, что выполняются условия 1)–2) из Теоремы 1, а условие 3) имеет вид*

3$'$) $\forall u \in N \ \ \inf D_\alpha V(u) \leq 0$,

то множество является частично α-устойчивым.

□ Так как для всех $u \in N D_\alpha V(u) \leq 0$, то продолжая рассуждать, как при доказательстве Теоремы 1, можно показать, что существует такая α-кривая $q_\alpha \in \Phi^d_\alpha$, что $V(q_\alpha(u,t)) \leq V(u)$ для всех $t \in \mathbb{R}_+$. Положительная определённость V предполагает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, для которой $V(u) < \varepsilon$ везде, где $d(u, M) < \delta$. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из неравенства $d(u, M) < \delta$ следует $V(q_\alpha(u,t)) < \varepsilon$ для всех $t \in \mathbb{R}_+$. Более того, для всех λ существует такое $\varepsilon > 0$, что (см. Определение 1) неравенство $d(u, M) < \lambda$ влечет $V(u) > \varepsilon = \xi(\lambda)$, т.е. такое, что $d(u, M) < \lambda$ везде, где $V(u) < \varepsilon$. Таким образом, для всех $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $d(u, M) < \delta$, что предполагает, что $d(q_\alpha(u,t), M) < \varepsilon$ для всех $t \in \mathbb{R}_+$. Отсюда следует, что $u \in B(M, \delta)$ предполагает, что $q_\alpha(u,t) \in B(M, \varepsilon)$, т.е. $f_\alpha(u,t) \cap B(M, \varepsilon) \neq \varnothing$, для всех $t \in \mathbb{R}_+$. ■

Теорема 3 даёт критерий α-устойчивости, который не требует особых знаний об эволюционных уравнениях нечёткой системы. Мы можем установить подобный результат для частичной α-устойчивости.

Теорема 6 [1]. *Пусть нечёткая система определена через нечёткое отношение R, $M \subset X$. Если существует дифференцируемая функция $V : X \to \mathbb{R}$ такая, что выполняется условия 1)– 2) из Теоремы 1, а условие 3) имеет вид*

3$'$) $\forall u \in N \ \ \inf\{\langle \nabla V, z \rangle \,:\, z \in R_\alpha(u)\} < 0$.

Тогда является частично -устойчивым.

Теорема 7. *Пусть нечёткая система определена в виде (1) и $M \subset X$. Если существует такая полунепрерывная снизу функция $V : X \to \mathbb{R}$, что выполняются условия 1)–2) из Теоремы 1, а условие 3) имеет вид:*

3′) существует такая непрерывная функция $W : X \to \mathbb{R}_+$, что $\forall u \in N$

$$\inf\left\{\liminf_{\substack{t\to 0+\\ \zeta\ to z}} \frac{V(u+t\zeta)-V(u)}{t} \ :\ z\in R_\alpha(u)\right\} < -W(u)\,.$$

Тогда множество M является частично α-устойчивым.

3. Иллюстративный пример. Рассмотрим нечеткую систему вида (1), определенную нечетким отношением

$$R_\alpha = \{(u,v)\in X^2\ :\ (2+\alpha)\cdot u \le v \le (5-2\alpha)\cdot u\}\,.$$

Эволюционное уравнение имеет вид:

$$f_\alpha(u_0,t) = [u_0\exp(5+2\alpha)t, u_0\exp(-2-\alpha)t]\,.$$

Функции $q_\alpha(u_0,t) = u_0\exp(\alpha t)$ являются устойчивыми непрерывно-дифференцируемыми α-траекториями при всех $\alpha\in[2+\alpha, 5-2\alpha]$.

Но также верно, что любые функции вида:

$$q_\alpha(u_0,t) = \begin{cases} u_0\exp(-a_1 t)\,, & t<T\,;\\ u_0\exp(-a_1T-a_2(t-T))\,, & t\ge T\end{cases}$$

для любых $a_1, a_2 \in [2+\alpha, 5-2\alpha]$ также являются устойчивыми непрерывно-дифференцируемыми траекториями.

Применим Теоремы 1 и 2 к данному примеру и докажем α-устойчивость и асимптотическую α-устойчивость.

Пусть $V(u) = d(u, M)$, тогда производная имеет вид:

$$D_\alpha V(u) = \lim_{t\to 0+}\frac{1}{t}\Big(V\Big(ue^{(-5+2\alpha)t}, ue^{(-2-\alpha)t}\Big) - V(u)\Big)\,.$$

Путем вычислений нетрудно показать, что $\sup D_\alpha V(u) \le 0$. Все условия теорем соблюдены, что и требовалось доказать.

Заключение. В статье сформулированы критерии α-устойчивости и асимптотической α-устойчивости, а также получен критерий частичной α-устойчивости. На основе приведенного примера доказана справедливость Теоремы 1 и Теоремы 2. В дальнейшем будут предложены процедуры проверки устойчивости нечетких динамических систем.

Литература

1. Zadeh A. Lotfi outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision process // IEEE Transactions on systems, MAN, and Cybernetics. – 1973. – 3; №1.
2. Ивохин Е.В., Волчков С.О. Исследование динамики нечетких дискретных систем // System research & Information Technologies. – 2005. – 4. – P.94–105.
3. Леденева Т.М. Обработка нечеткой информации / Воронеж: ВГУ, 2006. – 233 с.
4. Glas M. Theory of fuzzy systems // Fuzzy sets and systems. – 1983. – 10. – P.65-77.

ABOUT STABILITY OF CONTINUOUS FUZZY SYSTEMS

I.I. Ternovikh

Voronezh State University,
University Sq., 1, Voronezh 394006, Russia, e-mail: Irina.Ternovikh@gmail.com

Abstract. Stability of differential equation with fuzzy logic is under consideration. The fuzzy derivative is derived and it is applied to the solving of fuzzy equation system. The concepts of the α-stability and the asymptotic α-stability is introduced.

Key words: characteristic function, fuzzy dynamical system, fuzzy derivative, α-stability, asymptotic α-stability.