MSC 58A35

РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ НА СТРАТИФИЦИРОВАННОМ МНОЖЕСТВЕ

Л.А. Ковалева

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, Белгород, 308015, Россия, e-mail: kovaleva_l@bsu.edu.ru

Аннотация. Исследуется фредгольмова разрешимость задачи Дирихле на двумерном стратифицированном множестве методом сведения исходной задачи к нелокальной задаче Римана.

Ключевые слова: задача Дирихле, фредгольмова разрешимость, индекс, стратифицированное множество.

1. Постановка задачи. Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ попарно непересекающиеся открытые отрезки Ω^1_j, $1 \le j \le l$ и открытые плоские выпуклые многоугольники Ω^2_j, $1 \le j \le n$. Граница каждого многоугольника составлена из попарно непересекающихся сторон (открытых отрезков) и вершин. Предполагается, что эти границы попарно могут пересекаться только по сторонам или вершинам, причем семейство (Ω^1_j) составлено из различных сторон. Множество всех вершин обозначим F. Полученный двумерный комплекс

$$\overline{\Omega} = F \cup \Omega^1 \cup \Omega^2\,, \quad \Omega^k = \bigcup_j \Omega^k_j\,,$$

называется стратифицированным компактом, а составляющие его элементы Ω^1_k и Ω^2_s — стратами соответствующих размерностей. Под стратифицированным множеством Ω здесь понимается $\Omega^2 \cup \Omega^1_H$, где Ω^1_H – объединение некоторого числа l_H одномерных страт. Объединение Ω^1_D оставшихся одномерных страт, число которых обозначим l_D, будет играть роль границы этого множества. Случай, когда одно из множеств Ω^1_D, Ω^1_H является пустым, не исключается. К каждому одномерному страту сходится один или несколько многоугольников Ω^2_s, в первом случае его называем стороной, во втором случае — ребром. Предполагается, что все ребра входят только в Ω^1_H. Ниже на Ω естественным образом вводится понятие гармонической функции, для которой Ω^1_D будет являться носителем данных Дирихле. Конечно, в случае $l_D = 0$ говорим просто о гармонической функции на всем множестве $\Omega = \overline{\Omega} \setminus F$.

Пусть m_s есть число сторон, составляющих границу $\partial\Omega^2_s$ и $m = m^2_1 + \ldots + m^2_n$. Все эти стороны занумеруем единым образом в виде $L_1, \ldots, L_m$ и рассмотрим разбиение $I^2 = \{I^2_s, 1 \le s \le n\}$ множества $\{1, \ldots, m\}$, для которого стороны $L_j, j \in I^2_s$, составляют границу $\partial\Omega^2_s$. С каждым одномерным стратом Ω^1_k можно также связать некоторое множество I^1_k номеров j, для которых L_j совпадает с Ω^1_k, число элементов этого множества

Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 - 2013 годы (госконтракт №14.A18.21.0357)

обозначим m^1_k. В результате получаем другое разбиение $I^1 = \{I^1_k, 1 \le k \le l\}$ множества $\{1, \ldots, m\}$.

Функция φ, определенная на Ω^2, называется кусочно-непрерывной, если ее сужения

$$\varphi_s = \varphi|_{\Omega^2_s} \in C(\overline{\Omega^2_s} \setminus F)\,, \ 1 \le s \le n\,.$$

Граничные значения этой функции можно описать в форме семейства функций $\varphi^+_j \in C(L_j), 1 \le j \le m$, которые определяются равенством

$$\varphi^+_j(y) = \lim_{x \in \Omega^2_s,\, x \to y} \varphi(x)\,, \quad y \in L_j, \quad j \in I^2_s\,.$$

Рассмотрим далее семейство единичных векторов $\nu_j \in \mathbb{R}^3$, $1 \le j \le m$, таких, что для $j \in I^2_s$ вектор ν_j лежит в плоскости многоугольника Ω^2_s и по отношению к нему является внутренней нормалью к стороне L_j. Тогда если функция $\varphi_s \in C^1(\overline{\Omega^2_s} \setminus F)$, то можно ввести односторонние нормальные производные

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\right)^+_j = \frac{\partial \varphi_s}{\partial \nu_j}\,, \quad j \in I^2_s\,.$$

По определению функция $u \in C(\Omega)$ называется гармонической на Ω, если для каждого s ее сужения u_s гармоничны (по отношению к некоторой, а значит, и любой прямоугольной декартовой системы координат) на двумерном страте Ω^2_s, непрерывно дифференцируемы вплоть до $\partial\Omega^2_s \cap \Omega^1_H$ и ее нормальные производные на одномерных стратах этого множества подчинены условию

$$\sum\nolimits_{j \in I^1_k} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^+_j = 0\,, \quad \Omega^1_k \subseteq \Omega^1_H\,. \tag{1}$$

Напомним, что в Ω^1_H входят все ребра и условие непрерывности функции u на них равносильно соотношениям $u^+_j = u^+_i$, $i, j \in I^1_k$. Если элементы I^1_k занумеровать, то из этих соотношений достаточно выделить $m^1_k - 1$ независимых, например,

$$u^+_{i_r} = u^+_{i_{r+1}}, \ 1 \le r \le m^1_k - 1\,, \quad I^1_k = \{i_1, i_2, \ldots, i_{m^1_k}\}\,. \tag{2}$$

Как обычно, задача Дирихле состоит в отыскании гармонической на Ω функции $u \in C(\overline{\Omega} \setminus F)$, принимающей на Ω^1_D заданные значения:

$$u^+_j = f_j\,, \quad L_j = \Omega^1_k \subseteq \Omega^1_D\,. \tag{3}$$

Напомним, что в определение гармоничности функции входило требование непрерывной дифференцируемости сужений u_s вплоть до $\partial\Omega^2_s \cap \Omega^1_H$. Это требование можно ослабить путем введения сопряженных к u_s гармонических функций v_s, определение которых зависит от выбора прямоугольной декартовой системы координат в плоскости страта Ω^2_s.

Чтобы зафиксировать этот выбор, на каждом контуре $\partial\Omega^2_s$ зададим направление обхода и пусть система координат такова, что при этом обходе область Ω^2_s остается слева. Кроме того, каждую сторону L_j ориентируем единичным вектором e_j, считая $e_i = e_j$ для $i, j \in I^1_k$. Тогда можно ввести сигнатуру ориентации – семейство $(\sigma_j = \pm 1)^m_1$, где для $j \in I^2_s$ число $\sigma_j = 1$, если сторона L_j ориентирована положительно по отношению к области Ω^2_s (т.е. эта область остается слева), и $\sigma_j = -1$ в противном случае.

Исходя из выбранной прямоугольной системы координат на Ω^2_s, рассмотрим сопряженную к u_s гармоническую функцию v_s. Тогда на каждой стороне $L_j \subseteq \partial\Omega^2_s$ выполняется соотношение Коши-Римана

$$\frac{\partial v_s}{\partial e_j} = -\sigma_j \frac{\partial u_s}{\partial \nu_j} = -\sigma_j \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^+_j .$$

Следовательно, условие (1) можно переписать в виде

$$\sum\nolimits_{j\in I^1_k} \sigma_j v^+_j = c_k\,, \quad \Omega^1_k \subseteq \Omega^1_H\,, \tag{4}$$

с некоторыми постоянными $c_k \in \mathbb{R}$. В соответствии с этим вместо требования непрерывной дифференцируемости сужений u_s функции u вплоть до соответствующих сторон многоугольника Ω^2_s и выполнения (1) достаточно потребовать, чтобы функция v была кусочно-непрерывной и удовлетворяла условию (4). Поскольку функция v_s определена на Ω^2_s с точностью до аддитивной постоянной, ее выбор фиксируем условием

$$v(x_s) = 0, \quad 1 \le s \le n\,, \tag{5}$$

в наперед заданных точках $x_s \in \Omega^2_s$.

Таким образом, в этой постановке задача Дирихле определяется краевыми условиями (2)-(5).

2. Основные обозначения. Выберем $\varepsilon > 0$ столь малым, что при каждом $1 \le s \le n$ шары $\{|x-\tau| \le \varepsilon\}$, $\tau \in F$, попарно не пересекаются. Их пересечение с многоугольником Ω^2_s дает m_s секторов, которые перенумеруем в виде $\Omega^2_{(j)}$, $j \in I^2_s$. В результате получим m секторов $\Omega^2_{(j)}$, $1 \le j \le m$. Боковые стороны сектора $\Omega^2_{(j)}$ составляют боковую границу этого сектора, которую обозначим $\partial'\Omega^2_{(j)}$. Всего имеем, таким образом, семейство $2m$ отрезков, их можно также разбить на пары L^0_j и L^1_j, которые служат пересечением указанных выше шаров с центрами, соответственно, в левом и правом концах стороны L_j.

Для фиксированной точки $\tau \in F$ все сектора $\Omega^2_{(j)}$ с вершиной τ занумеруем единым образом в виде $\Omega^2_{\tau,s}$, $1 \le s \le m_\tau$, и аналогично введем единую нумерации $L_{\tau,j}$, $1 \le j \le 2m_\tau$, их боковых сторон и $\Omega^1_{\tau,k}$, $1 \le k \le l_\tau$, одномерных страт с концом τ. Очевидно, объединение одномерных страт совпадает с $\Omega^1_\tau = \Omega^1 \cap \{|x-\tau| \le \varepsilon\}$. Пусть $l_{\tau,H}$, есть число отрезков $\Omega^1_{\tau,k}$, составляющих $\Omega^1_{\tau,H} = \Omega^1_H \cap \{|x-\tau| \le \varepsilon\}$ и аналогичный смысл имеет $l_{\tau,D}$.

С каждым одномерным стратом $\Omega^1_{\tau,k}$ можем связать множество $I_{\tau,k}$ номеров j, для которых $L_{\tau,j} \subseteq \Omega^1_{\tau,k}$. В результате имеем разбиение $I_\tau = (I_{\tau,k},\ 1 \le k \le l_\tau)$ множества $\{1,\ldots,2m_\tau\}$. Число элементов множества $I_{\tau,k}$ обозначим $m_{\tau,k}$. Таким образом,

$$\sum_1^{l_\tau} m_{\tau,k} = 2m_\tau\,, \quad \sum_{\tau\in F} 2m_\tau = 2m\,, \tag{6}$$

где учтено, что каждая сторона имеет два конца из F. Поскольку боковая сторона $L_{\tau,j}$ совпадает с односторонней окрестностью L_i^p для некоторых $p = 0,1$ и $1 \le i \le m$, можем ввести сигнатуры ориентации

$$\sigma_{\tau,j} = \sigma_i\,, \quad L_{\tau,j} = L_i^p\,. \tag{7}$$

Введем $2m_\tau \times 2m_\tau-$ матрицы $V_\tau(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{C}$ и U_τ с элементами

$$V_{\tau,ij}(\zeta) = \begin{cases} e^{i\theta_{\tau,s}\zeta}, & L_{\tau,i}\cup L_{\tau,j} = \partial'\Omega^2_{\tau,s},\\ 0 & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

$$U_{\tau,ij}(\zeta) = \begin{cases} 1 - 2/m_{\tau,k}, & i = j \in I_{\tau,k}, & m_{\tau,k} > 1,\\ -2/m_{\tau,k}, & i,j \in I_{\tau,k}, i \ne j, & m_{\tau,k} > 1,\\ 1, & i = j \in I_{\tau,k}, & m_{\tau,k} = 1, \Omega^1_{\tau,k} \subseteq \Omega^1_D,\\ -1, & i = j \in I_{\tau,k}, & m_{\tau,k} = 1, \Omega^1_{\tau,k} \subseteq \Omega^1_H,\\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{8}$$

где $\theta_{\tau,s}$ означает внутренний угол области $\Omega^2_{\tau,s}$ в точке τ. Очевидно, эти матрицы блочно-диагональны относительно разбиений множества $\{1,\ldots,2m\}$ на, соответственно, m_τ пар (i,j), определяемых условием $L_{\tau,i}\cup L_{\tau,j} = \partial'\Omega^2_{\tau,s}$, $1 \le s \le m_\tau$, и подмножества $I_{\tau,k}$, $1 \le k \le l_\tau$.

Прямая проверка показывает, что

$$U_\tau^2 = 1, \quad V_\tau(\zeta)V_\tau(-\zeta) = 1\,. \tag{9}$$

Легко видеть, что при фиксированном вещественном λ матрица $V_\tau^{\pm1}(\lambda + it) \to 0$ при $t \to \pm\infty$. Следовательно, скалярная мероморфная функция

$$h_\tau(\zeta) = \frac{\det[U_\tau + V_\tau(\zeta)]}{\det[1 + V_\tau(\zeta)]}$$

имеет пределы при $t \to \pm\infty$. В частности, проекция нулей аналитической функции $\det(U_\tau + V_\tau(\zeta))$ на действительную ось является дискретным множеством. Если на прямой $\operatorname{Re}\zeta = \lambda$ отсутствуют нули функций $\det[U_\tau + V_\tau(\zeta)]$ и $\det[1 + V_\tau(\zeta)]$, то можно рассмотреть приращение непрерывной ветви $\ln h_\tau(\zeta)$ на этой прямой, деленное на $2\pi i$, и ввести число

$$\chi(\lambda) = \sum_{\tau\in F} \frac{1}{2\pi i}[(\ln h_\tau)(\lambda + i\infty) - (\ln h_\tau)(\lambda - i\infty)]\,, \tag{10}$$

которое в силу (9) вещественно. Очевидно, это число как функция от λ сохраняет постоянное значение па каждом интервале J, для которого в полосе $\mathrm{Re}\,\zeta \in J$ отсутствуют пули функций $\det[U_\tau + V_\tau(\zeta)]$ и $\det[1 + V_\tau(\zeta)]$. В частности, можно говорить о значении $\chi(-0) = \lim \chi(\lambda)$ при $\lambda \to 0,\ \lambda < 0$.

Лемма 1. (a) *При каждом τ величина*

$$\sum_{\tau \in F} \frac{1}{2\pi i} \ln[\det U_\tau] \tag{11}$$

есть целое число так, что функция $\chi(\lambda)$ целочисленна.

(b) *Число $s_\tau(0)$ нулей функции $\det(U_\tau + V_\tau)(\zeta)$ на прямой $\mathrm{Re}\,\zeta = 0$, взятое с учетом их кратности, имеет ту же четность, что и $m_\tau + l_{\tau,H}$.*

□ (a) Рассмотрим числовые $n \times n$-матрицы $P = P_n$ и $Q = Q_n$ с элементами

$$P_{ij} = \begin{cases} p, & i = j, \\ q, & i \neq j, \end{cases}, \quad Q_{ij} = \begin{cases} p, & i+1 = j, \\ q, & i+1 \neq j. \end{cases} \tag{12}$$

Нетрудно видеть, что для определителей этих матриц справедливы рекуррентные соотношения

$$\det P_n = (p-q)[\det P_{n-1} + (-1)^n \det Q_{n-1}]\,, \quad \det Q_n = (q-p)Q_{n-1}\,,$$

которые приводят к формуле

$$\det P = (p-q)^{n-1}[p + (n-1)q]\,. \tag{13}$$

Согласно (8) диагональный блок матрицы U_τ, отвечающий $I_{\tau,k}$ при $m_{\tau,k} > 1$, совпадает с матрицей P_n порядка $n = m_{\tau,k}$, для которой $p = 1 - 2/m_{\tau,k}$, $q = -2/m_{\tau,k}$, и формула (13) дает значение $\det P = -1$.

Таким образом, $\det U_\tau = (-1)^{s_\tau}$, где $s_\tau \le l_\tau$ означает число всех одномерных страт, имеющих своим концом τ и содержащихся в Ω^1_H, что согласуется с первым равенством (9). Следовательно, с точностью до целого числа величина (11) равна половине суммы s_τ по $\tau \in F$. Остается заметить, что эта сумма равна удвоенному числу l_H всех одномерных страт, составляющих Ω^1_H.

(b) В силу (9) и равенства $U_\tau + V_\tau(\zeta) = U_\tau[U_\tau^{-1} + V_\tau^{-1}(\zeta)]V_\tau(\zeta)$ имеем соотношение

$$\det[U_\tau + V_\tau(-\zeta)] = (-1)^{m_\tau} e^{i\theta\zeta} \det[U_\tau + V_\tau(\zeta)]$$

с некоторым $\theta \in \mathbb{R}$. Вспоминая, что $\det U_\tau = (-1)^{s_\tau}$, $s_\tau = l_{\tau H}$, для функции $f(\zeta) = \det(U_\tau + V_\tau)(\zeta)$ имеем равенство

$$f(-\zeta) = (-1)^{m_\tau + s_\tau} e^{i\theta\zeta} f(\zeta)\,.$$

Поэтому число нулей функции f на прямой $\mathrm{Re}\,\zeta = 0$, отличных от $\zeta = 0$, четно, а порядок пуля этой функции в точке $\zeta = 0$ имеет ту же четность, что и $m_\tau + s_\tau$. ■

Опишем пространства, в которых будет рассматриваться задача. Пусть $C^\mu(K)$ означает пространство функций, удовлетворяющих па множестве $K \subseteq \mathbb{R}^3$ условию Гельдера с показателем $0 < \mu < 1$, относительно соответствующей нормы оно банахово. Заметим, что элементы $\varphi \in C^\mu(K)$ продолжаются по непрерывности па замыкание $\overline{K}$ и продолженные функции $\tilde{\varphi}$ удовлетворяют условию Гельдера с тем же показателем. В этом смысле классы $C^\mu(K)$ и $C^\mu(\overline{K})$ совпадают (с равенством норм). Исходя из конечного подмножества $F \subset \overline{K}$ и весовой функции

$$\rho(x) = \prod_{\tau \in F} |x - \tau| \,,$$

введем класс $C_0^\mu(K, F)$ всех ограниченных функций φ, для которых $\psi = \rho^\mu \varphi \in C^\mu(K)$. Можно показать, что относительно нормы

$$|\varphi| = \sup_{x \in K \setminus F} |\varphi(x)| + |\rho^\mu \varphi|_{C^\mu}$$

это пространство является банаховой алгеброй но умножению. Весовое пространство C_λ^μ порядка $\lambda \in \mathbb{R}$ определим равенством $\{\varphi,\ \rho^{-\lambda}\varphi \in C_0^\mu\}$, относительно соответствующей нормы это пространство банахово и но каждому из параметров μ, λ монотонно убывает но вложению. При $\lambda = \mu$ оно совпадает с подпространством $C^\mu(K)$ функций, обращающихся в нуль на K.

В дальнейшем, основную роль будут играть классы Гельдера $H(K) = \bigcup_\mu C^\mu(K)$ и весовые классы

$$\overset{\circ}{H}(K, F) = \bigcup_{0<\mu<1} \bigcup_{\lambda>0} C_\lambda^\mu(K, F)\,, \quad \dot{H}(K, F) = \bigcup_{0<\mu<1} \bigcap_{\lambda<0} C_\lambda^\mu(K, F)\,.$$

Очевидно, первый из этих весовых классов состоит из всех функций $\varphi \in H(K)$, которые обращаются в нуль на F, а $\varphi \in \dot{H}(K, F)$ равносильно тому, что произведение $\varphi\varphi_0 \in \overset{\circ}{H}(K, F)$ для любой $\varphi_0 \in \overset{\circ}{H}(K, F)$. Таким образом, элементы $\varphi \in \dot{H}$ допускают в точках $\tau \in F$ особенности логарифмического типа. Для единообразия удобно обозначение этих пространств использовать и в случае, когда конечное множество F не целиком содержится в $\overline{K}$, как это имеет место, например, в случае $K = \Omega_D^1$. Заметим, что в этом случае функция $\rho^{-1} f$ интегрируема на K для любой $f \in \overset{\circ}{H}(K, F)$.

3. Разрешимость задачи в классе $\dot{H}(\Omega, F)$. Задачу Дирихле сначала рассмотрим в классе функций $\dot{H}(\Omega, F)$, удовлетворяющих условию Гельдера на стратифицированном множестве Ω вне любой окрестности вершин, а в вершинах $\tau \in F$ допускающих особенности логарифмического порядка. Соответственно ее правая часть $f \in \dot{H}(\Omega_D^1, F)$. По определению, задача Дирихле (1)-(3) фредгольмова в классе $\dot{H}(\Omega, F)$, если

1) однородная задача в этом классе имеет конечное число p линейно независимых решений;

2) существует конечное число линейно независимых функций $g_j \in \overset{\circ}{H}(\Omega_D^1, F)$, $1 \le j \le q$, таких, что условия ортогональности

$$\int_{\Omega_D^1} \rho^{-1}(t) f(t) g_j(t) dt = 0$$

необходимы и достаточны для разрешимости неоднородной задачи.

При этом разность $æ = p - q$ называется индексом этой задачи.

Теорема 1. *Задача Дирихле (1)-(3) фредгольмова в классе $\dot{H}(\Omega, F)$ и ее индекс $\dot{æ}$ дается формулой*

$$\dot{æ} = l_H - \chi(-0)\,. \tag{14}$$

Если правая часть $f \in \dot{H}(\Omega, F)$ задачи непрерывно дифференцируема на Ω^1_D (по параметру длины дуги) и $\rho f' \in \dot{H}(\Omega^1_D, F)$, то любое решение $u \in \dot{H}(\Omega, F)$ обладает аналогичным свойством иа каждом двумерном страте, т.е. $\rho u' \in \dot{H}(\Omega^2_s, F)$, где штрих означает любую из частных производных первого порядка.

□ Каждый одномерный страт Ω^1_k снабжен ориентацией, так что можно рассмотреть его левый и правый концы. Эти же точки служат аналогичными концами для L_j, $j \in I^1_k$, которые обозначим x^0_j и x^1_j. Таким образом, $x^p_j = x^i_k$, $j \in I^1_k$, $p = 0, 1$.

Напомним, что в каждом двумерном страте Ω^2_s выбрана прямоугольная декартова система координат, но отношению к которой этот страт можно рассматривать как область D_s комплексной плоскости. Аналогично стороны L_j, $j \in I^2_s$, преобразуются в стороны многоугольника D_s, которые обозначим Γ_j, $j \in I^2_s$. Заметим, что полученные области D_s, $1 \le s \le n$, между собой никак не связаны. Аналогичный смысл имеют обозначения секторов $D_{(j)}$, в которые переходят $\Omega^2_{(j)}$, и семейство их боковых сторон Γ^p_j, $j \in I^2_s$, $p = 0, 1$. Очевидно, отрезоки Γ^p_j, $j \in I^2_s$, представляют собой пересечение Γ_j с кругом радиуса ε с центром в точке z^p_j, которая преобразована из соответствующей точки $x^p_j \in \mathbb{R}^3$ в выбранной системе координат. При этом сигнатура ориентации σ_j имеет тот же смысл, что и ранее, т.е. $\sigma_j = 1$, если отрезок Γ_j, $j \in I^2_s$, ориентирован положительно по отношению к D_s, и $\sigma_j = -1$ в противном случае.

В этом же смысле сужение $u_s = u|_{\Omega^2_s}$ можно рассматривать как гармоническую функцию в области D_s, соответственно, функция $\phi_s = u_s + iv_s$ аналитична в этой области. Рассмотрим афинные параметризации

$$\gamma_j(t) = z^0_j + t(z^1_j - z^0_j), \quad 0 \le t \le 1,$$

отрезков Γ_j. Заметим, что для $j \in I^1_k$ точкам $\gamma_j(t)$, $j \in I^1_k$, отвечает одна и та же точка $x^0_j + t(x^1_j - x^0_j)$ на одномерном страте Ω^1_k. Положим для краткости

$$\phi^+_{\gamma,j}(t) = \phi^+_s[\gamma_j(t)], \quad j \in I^2_s\,,\ 0 < t < 1\,.$$

Тогда краевые условия (2)-(4) задачи Дирихле но отношению к семейству аналитических функций (ϕ_s) перепишутся следующим образом. Для $\Omega^1_k \subseteq \Omega^1_H$ имеем m^1_k линейных соотношений

$$\mathrm{Re}[\phi^+_{\gamma,j_r}(t) - \phi^+_{\gamma,j_{r+1}}(t)] = 0,\ 1 \le r \le m^1_k - 1, \quad I^1_k = \{j_1, \ldots, j_{m^1_k}\}\,, \tag{15}$$

$$\mathrm{Im}\left[\sum\nolimits_{j \in I^1_k} \sigma_j \phi^+_{\gamma,j}(t)\right] - c_k = 0\,, \tag{16}$$

а для $L_j \subseteq \Omega^1_D$ имеем неоднородное соотношение

$$\mathrm{Re}[\phi^+_{\gamma,j}(t)] = f_j[\gamma_j(t)]\,,\ 0 < t < 1\,. \tag{17}$$

Конечно, при $m_k^1 = 1$ краевое условие (15) опускается. Постоянные c_k в этой задаче подлежат определению вместе с семейством (ϕ_s).

Полученные $m = l_H + l_D$ линейных нелокальных соотношений можно записать в векторной форме. С этой целью введем $m \times m$-матрицу A, блочно диагональную относительно разбиения I^1. Элементы $A_{ij}(I_k^1) = A_{ij}$, $i, j \in I_k^1$, диагонального блока $A(I_k^1)$ этой матрицы определяется следующим образом:

$$A_{ij}(I_k^1) = \begin{cases} 1, & i = i_r, \quad j = i_r, \qquad 1 \le r \le m_k^1 - 1; \\ -1, & i = i_r, \quad j = i_{r+1}, \qquad 1 \le r \le m_k^1 - 1; \\ \sigma_j \mathbf{i}, & i = i_{m_k^1}, \quad 1 \le j \le m_k^1; \\ 0, & \text{в остальных случаях;} \end{cases} \qquad \text{где } m_k^1 > 1; \tag{18}$$

$$A_{ii}(I_k^1) = \begin{cases} 1, & \Gamma_i = \Omega_k^1 \subseteq \Omega_D^1; \\ \sigma_i \mathbf{i}, & \Gamma_i = \Omega_k^1 \subseteq \Omega_H^1; \end{cases} \qquad \text{где } m_k^1 = 1,$$

$\mathbf{i}$ означает мнимую единицу. Тогда краевые условия (15)-(17) можно записать в краткой векторной форме

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re} A\phi_\gamma^+ + \tilde{c} = \tilde{f}\,, \\ &\operatorname{Im} \phi(z_s) = 0\,, \qquad 1 \le s \le n\,, \end{aligned} \tag{19}$$

где точка $z_s \in D_s$ отвечает $x_s \in \Omega_s^2$ в системе координат плоскости страта Ω_s^2 и $m-$векторы $\tilde{f}$, $\tilde{c}$ определяются равенствами

$$\tilde{f}_j(t) = \begin{cases} f_j[\gamma_j(t)], & L_j \subseteq \Omega_D^1; \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$\tilde{c}_j = \begin{cases} c_k, & j = i_n,\ \{i_1, \dots, i_n\} = I_k^1,\ \Omega_k^1 \subseteq \Omega_H^1; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В результате имеем так называемую нелокальную краевую задачу Римана, изученную в [8], [9] (относительно обозначений см. также [7]).

С $m \times m$-матрицей A свяжем матрицу A^σ с элементами

$$(A^\sigma)_{ij} = \begin{cases} A_{ij}, & \sigma_j = 1; \\ \overline{A}_{ij}, & \sigma_j = -1. \end{cases}$$

Другими словами, элементы j-го столбца матриц A и A^σ совпадают, если $\sigma_j = 1$, и комплексно сопряжены, если $\sigma_j = -1$. Очевидно, матрица A^σ определяется той же формулой (18), где все $\sigma_j = 1$. Нетрудно видеть, что

$$\det A^\sigma(I_k^1) = \begin{cases} m_k^1 \mathbf{i}, & m_k^1 > 1; \\ 1, & m_k^1 = 1, \quad \Gamma_i = \Omega_k^1 \subseteq \Omega_D^1; \\ \mathbf{i}, & m_k^1 = 1, \quad \Gamma_i = \Omega_k^1 \subseteq \Omega_H^1, \end{cases}$$

а следовательно $\det A^\sigma \ne 0$, так что по терминологии [8] задача

$$\operatorname{Re} A\phi_\gamma^+ = f \tag{20}$$

относится к нормальному типу. В дальнейшем основную роль будет играть матрица

$$B = (A^\sigma)^{-1}\overline{A}^\sigma,$$

которую в соответствии с (18) легко вычислить явно. Именно, диагональные блоки этой матрицы определяются элементами

$$\begin{gathered} B_{ij}(I_k^1) = \begin{cases} 1 - 2/m_k^1, & i = j; \\ -2/m_k^1, & i \neq j, \end{cases} \qquad \text{где } m_k^1 > 1, \\ B_{ii}(I_k^1) = \begin{cases} 1, & \Gamma_i = \Omega_k^1 \subseteq \Omega_D^1; \\ -1, & \Gamma_i = \Omega_k^1 \subseteq \Omega_H^1, \end{cases} \qquad \text{где } m_k^1 = 1. \end{gathered} \tag{21}$$

С задачей Римана естественным образом связано понятие концевого символа — аналитической на всей плоскости матрицы-функции $X(\zeta) = U + V(\zeta)$, где матрица U зависит только от A^σ, а матрица $V(\zeta)$ — от геометрии области. При построении этого символа будем следовать обозначениям [7]. С этой целью выберем единую нумерацию $\Gamma_{(k)}$, $1 \le k \le 2m$ отрезков Γ_j^p, $1 \le j \le m$, $p = 0, 1$, и введем две $2m \times 2m$-матрицы U и $V(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{C}$, с элементами

$$\begin{gathered} U_{kr} = B_{ij} \quad \text{при} \quad \Gamma_{(k)} = \Gamma_i^p,\ \Gamma_{(r)} = \Gamma_j^p, \\ U_{kr} = 0 \qquad \text{в остальных случаях,} \\ V_{kr}(\zeta) = V_{rk}(\zeta) = e^{i\theta_j\zeta} \quad \text{при} \quad \Gamma_{(k)} \cup \Gamma_{(r)} = \partial' D_{(j)}, \\ V_{kr}(\zeta) = 0 \qquad \text{в остальных случаях,} \end{gathered} \tag{22}$$

где θ_j означает раствор сектора $D_{(j)}$.

Единой нумерации отрезков $\Gamma_{(k)}$ отвечает аналогичная нумерация отрезков $L_{(k)}$, $1 \le k \le 2m$, на сторонах L_j^p. Рассмотрим разбиение E множества номеров $\{1, \ldots, 2m\}$ на подмножества $E_\tau = \{k \mid L_{(k)} \subseteq \Omega_\tau^1\}$, $\tau \in F$. Очевидно, число элементов E_τ совпадает с $2m_\tau$ и можно ввести перенумерацию

$$k \in E_\tau \to i \in \{1, \ldots, 2m_\tau\}, \quad L_{(k)} = L_{\tau,i}, \tag{23}$$

этого подмножества. В результате получаем нумерацию $\Gamma_{\tau,i}$ соответствующих отрезков, отвечающих нумерации $L_{\tau,i}$, $1 \le i \le 2m_\tau$.

Напомним, что согласно (6) сумма всех m_τ совпадает с m. Утверждается, что матрицы U, V блочно-диагональны относительно разбиения множества $\{1, \ldots, 2m\}$ на подмножества E_τ и их диагональные блоки $U(E_\tau)$, $V(E_\tau)$ относительно указанной перенумерации множества E_τ совпадают с U_τ, V_τ соответственно. В самом деле, при отображении (23) подмножество $E_{\tau,k} = \{j \in E_\tau \mid L_{(j)} = \Omega_{\tau,k}^1\}$ переходит на $I_{\tau,k}$ и целиком содержится в одном из двух множеств $E^p = \{k \mid L_{(k)} = L_i^p\}$, $p = 0, 1$. Поэтому справедливость утверждения по отношению к U и U_τ непосредственно следует из сравнения (8) с (21), (22). Заметим, что диагональный блок матрицы U_τ, отвечающий $I_{\tau,k}$ при $m_{\tau,k} > 1$

не зависит от перенумерации его элементов. Точно также при отображении (23) номера k_1 и k_2, для которых $\Gamma_{(k_1)} \cup \Gamma_{(k_2)} = \partial' D_{\tau,j}$ переходят, в соответственно номера i_1 и i_2, для которых L_{τ,i_1} и L_{τ,i_2} составляют боковую границу соответствующего сектора $\Omega^2_{\tau,j}$. Отсюда следует и справедливость утверждения для матриц V и V_τ.

Таким образом,

$$\det[U + V(\zeta)] = \prod_{\tau \in F} \det[U_\tau + V_\tau(\zeta)]\,,$$

величину $\chi(\lambda)$ в (10) можно определять но отношению к концевому символу $U + V(\zeta)$ этой задачи.

Предположим, что для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$ выполнено условие

$$\det[U + V(\zeta)] \neq 0, \quad \operatorname{Re}\zeta = \lambda\,. \tag{24}$$

Тогда согласно результатам [9], примененным к задаче (20), имеют место следующие утверждения.

(i) Задача (20) фредгольмова в классе $C^\mu_\lambda(D, F)$ и ее индекс как $\mathbb{R}-$ линейного оператора, действующего из пространства $C^\mu_\lambda(D, F) = \prod_1^m C^\mu_\lambda(\Omega, F)$ аналитических функций в пространство $C^\mu_\lambda([0, 1]; 0, 1)$ вещественных $m-$ вектор-функций, дается формулой

$$æ(\lambda) = n - \chi(\lambda) - (\operatorname{sgn}\lambda)s\{0, \lambda\}\,, \tag{25}$$

где $s\{0, \lambda\}$ означает число нулей (с учетом их кратности) функции $\det[U + V(\zeta)]$ в открытой полосе, заключенной между прямыми $\operatorname{Re}\zeta = 0$ и $\operatorname{Re}\zeta = \lambda$.

(ii) Если условие (24) выполнено для всех $\lambda^0 \leq \lambda \leq \lambda^1$, то решения однородной задачи принадлежат классу $\bigcap_{\lambda>\lambda^0} C^\mu_\lambda$, а разрешимость неоднородной задачи с правой частью $f \in \bigcap_{\lambda>\lambda^0} C^\mu_\lambda$ определяется условиями ортогональности вида

$$\int_0^1 f(t)g(t)\frac{dt}{t(1-t)} = 0, \quad g \in \bigcap_{\lambda>-\lambda^1} C^\mu_\lambda\,.$$

(iii) Если в дополнение к условиям (ii) функция $tf'(t) \in \bigcap_{\lambda>\lambda^0} C^\mu_\lambda$, то и любое решение $\phi \in \bigcap_{\lambda>\lambda^0} C^\mu_\lambda$ обладает аналогичным свойством, т.е. $\rho(z)\phi'(z) \in \bigcap_{\lambda>\lambda^0} C^\mu_\lambda$.

Вспоминая определения классов $\overset{\circ}{H}$ и $\dot{H}$, на основании этих утверждений приходим к следующему заключению. Однородная задача (20) в классе $\dot{H}$ имеет конечное число линейно независимых решений, а разрешимость неоднородной задачи определяется условиями ортогональности указанного вида к конечному числу функций из $\overset{\circ}{H}$. При этом индекс задачи как разность этих чисел согласно (25) равен $n - \chi(-0)$.

Поскольку размерность пространства векторов $\tilde{c}$ в (19) равна l_H, оператор задачи (19), рассматриваемый на парах $(\phi, \tilde{c})$, является сначала расширением оператора задачи (20) на l_H измерений (над полем $\mathbb{R}$), а потом сужением на n измерений. В силу соответствующего свойства фредгольмовых операторов [10] отсюда следует фредгольмовость исходной задачи в классе $\dot{H}$ и формула ее индекса (14).

Вторая часть теоремы является следствием (iii), нужно только принять во внимание, что условие $\rho f' \in \dot{H}(\Omega_D^1, F)$ влечет аналогичное условие

$$t(1-t)(\tilde{f}-\tilde{c})'(t) \in \dot{H}([0,1];\, 0,1)$$

по отношению к правой части (19).

В качестве примера рассмотрим стратифицированное множество, представляющее собой правильную пирамиду без одной грани. Двумерные страты $\Omega_s^2, 1 \leq s \leq 3$ — грани пирамиды, одномерные страты $\Omega_j^1 \subset \Omega_H^1, 1 \leq j \leq 3$ - ребра пирамиды, оставшиеся стороны $\Omega_j^1, 4 \leq j \leq 6$ входят в границу стратифицированного множества, на которой заданы данные Дирихле. Вершины пирамиды будем обозначать $\tau_l, 1 \leq l \leq 4$, причем $F_D = \{\tau_2, \tau_3, \tau_4\}$.

Пусть

стороны L_1, L_2 отвечают ребру Ω_1^1 с вершинами τ_1, τ_2,

стороны L_3, L_4 отвечают ребру Ω_2^1 с вершинами τ_1, τ_3,

стороны L_5, L_6 отвечают ребру Ω_3^1 с вершинами τ_1, τ_4,

сторона L_7 отвечают ребру Ω_4^1 с вершинами τ_1, τ_2,

сторона L_8 отвечают ребру Ω_5^1 с вершинами τ_2, τ_3,

сторона L_9 отвечают ребру Ω_6^1 с вершинами τ_3, τ_1.

Множество номеров сторон, составляющих границу каждого двумерного страта определим следующим образом: $I_1^2 = \{1, 3, 7\}$, $I_2^2 = \{4, 5, 8\}$, $I_3^2 = \{2, 6, 9\}$.

Таким образом,

$$m_\tau = \left\{ \begin{array}{ll} 3, & \tau = \tau_1; \\ 2, & \tau = \tau_l, l = 2, \ldots, 4, \end{array} \right. \quad \text{при} \quad m = 9;$$

$$l_{\tau,D} = \left\{ \begin{array}{ll} 2, & \tau = \tau_1; \\ 0, & \tau = \tau_l, l = 2, \ldots, 4, \end{array} \right. \quad \text{при } l_H = 3. \tag{26}$$

Рассмотрим 2×2-матрицу B с элементами

$$B_{ij} = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & i = j, \\ -1, & i \neq j. \end{array} \right.$$

Нумерацию $L_{\tau,j}$ выберем так, что формулы (8) приводили к блочно-диагональным матрицам, U_τ и V_τ

$$U_\tau = \begin{pmatrix} B & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}, \quad V_\tau = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{i\theta\zeta} \\ 0 & 0 & e^{i\theta\zeta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta\zeta} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{i\theta\zeta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\theta\zeta} & 0 & 0 \\ e^{i\theta\zeta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau = \tau_1;$$

$$U_\tau = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V_\tau = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^{i\theta\zeta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\theta\zeta} \\ e^{i\theta\zeta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta\zeta} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau = \tau_l\,, \quad l = 2, \ldots, 4.$$

Вычислим определитель матрицы $(U_\tau + V_\tau)$, обозначив $t = e^{i\theta\zeta}$

$$\det(U_\tau + V_\tau) = \begin{cases} -(t-1)^2(t^2+t+1)^2, & \tau = \tau_1, \\ (t^2-1)(t^2+1), & \tau = \tau_l,\ l = 2, \ldots, 4. \end{cases}$$

Очевидно, что

$$s_\tau(0) = \begin{cases} 2, & \tau = \tau_1, \\ 1, & \tau = \tau_l,\ l = 2, \ldots, 4. \end{cases} \tag{27}$$

Для матриц $(U_\tau + V_\tau)^{-1}$ имеем следующие выражения:

$$(U_\tau + V_\tau)^{-1} = \frac{1}{t-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & t & 0 & t^2 \\ 1 & 0 & t^2 & 0 & t & 0 \\ 0 & t^2 & 0 & 1 & 0 & t \\ t & 0 & 1 & 0 & t^2 & 0 \\ 0 & t & 0 & t^2 & 0 & 1 \\ t^2 & 0 & t & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \tau = \tau_1,$$

$$(U_\tau + V_\tau)^{-1} = \frac{1}{t^4-1} \begin{pmatrix} -t^2 & 1 & t^3 & -t \\ 1 & -t^2 & -t & t^3 \\ t^3 & -t & -1 & t^2 \\ -t & t^3 & t^2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \tau = \tau_l, l = 2, \ldots, 4.$$

Очевидно, что при любом ζ все элементы матриц справа не обращаются в нуль, следовательно,

$$r_\tau = 1, \quad \tau = \tau_l,\ l = 1, \ldots, 8. \tag{28}$$

Вычислим определитель матрицы $(1 + V_\tau)$

$$\det(1 + V_\tau) = \begin{cases} -(t-1)^3(t+1)^3, & \tau = \tau_1, \\ -(t^2-1)^2, & \tau = \tau_l,\ l = 2, \ldots, 4. \end{cases}$$

Тогда

$$\frac{\det(U_\tau + V_\tau)}{\det(1 + V_\tau)} = \begin{cases} (t^2+t+1)^2(1+t)^{-3}(t-1)^{-1}, & \tau = \tau_1, \\ (t^2+1)(t^2-1)^{-1}, & \tau = \tau_l, l = 2, \ldots, 4. \end{cases}$$

Приращение непрерывной ветви логарифма при достаточно малом $\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{2\pi i} \ln \left[\frac{1+t^2}{1-t^2}\right] \Big|_{\mathrm{Re}\,\zeta = -\varepsilon} = \frac{1}{2}\,,$$

для точек $\tau = \tau_l, l = 2, \ldots, 4.$

Заметим, что функция $h_\tau(\zeta)$ нечетная, так что

$$\frac{1}{2\pi i}\ln h_\tau(\zeta)\Big|_{-\alpha-i\infty}^{-\alpha+i\infty} = -\frac{1}{2\pi i}\ln h_\tau(\zeta)\Big|_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}.$$

С другой стороны, по принципу аргумента для аналитических функций, разность

$$\frac{1}{2\pi i}\ln h_\tau(\zeta)\Big|_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} - \frac{1}{2\pi i}\ln h_\tau(\zeta)\Big|_{-\alpha-i\infty}^{-\alpha+i\infty} = m,$$

где m означает разность между числом нулей и числом полюсов функции $h_\tau(\zeta)$ в полосе $-\alpha < \operatorname{Re}\zeta < \alpha$, считая кратности. Из этих двух равенств следует, что приращение непрерывной ветви $\ln h_\tau(\zeta)$, деленное на $2\pi i$ равно $-m/2$.

Согласно (27), (28) m=-1, тогда по формуле (10)

$$\chi(-0) = 4 * 1/2 = 2\,. \tag{29}$$

В результате с учетом (26), (29) для индекса æ в классе $\dot{H}$ формула (14) дает значение

$$\text{æ} = 3 - 2 = 1\,.$$

Литература

1. Lumer G. Espases ramifes et diffusion sur les reseaux topologiques // C.R. Acad. Sc. Paris. – 1980. – A291. – P.219-234.
2. Nicaise S., Penkin O. Poincare-Perron's method for the Dirichlet problem on stratified sets // J. Math. Anal. Appl. – 2004. – 296; №2. – P.504-520.
3. Penkin O. About a geometrical approach to multistructures and some qualitative properties of solution // in F. Ali Mehmeti, J.von Below, S.Nicaise. Lect. Notes Pure Appl. Math. – 2001. – 219. – P.183-192.
4. Penkin O.M. Second-order elliptic equations on a stratified set. Differential equations on networks // J. Math. Sci. (N.Y.). – 2004. – 119;№6. – P.836-867.
5. Penkin O.M., Gavrilov A.A., Nicaise S. Poincaré's inequality on stratified sets and applications // Prog.Nonlinear Differential Equations Appl. – 2003. – 55.– P.195-213.
6. Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., и др. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / М.: Физматлит, 2004. – 272 с.
7. Солдатов А.П. Нелокальная краевая задача Римана // Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика. – 2011 – 5;22. – С.122-132.
8. Солдатов А.П. Общая краевая задача теории функций // Докл.АН СССР. – 1988. – 299;№4. – С.825-828.
9. Солдатов А.П. Краевые задачи теории функций в областях с кусочно-гладкой границей / Тбилиси: Изд-во ТГУ, Ин-т прикл. матем. им. И.Н.Векуа, II, 1991.
10. Пале Р. Семинар по теореме Атьи-Зингера об индексе / М.: Мир, 1970.

SOLVABILITY OF DIRICHLET's PROBLEM ON STRATIFIED SET

L.A. Kovaleva

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, Russia, e-mail: Kovaleva_l@bsu.edu.ru

Abstract. Solvability of Dirichlet's problem on stratified two-dimensional set is investigated. It is done by reduction of the original problem to the non-local Riemann's problem.

Key words: Dirichlet's problem, solvability, index, stratify set.