МАТЕМАТИКА

MSC 34E05

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА ОКОЛО ТОЧКИ ВЫРОЖДЕНИЯ

В.П. Архипов, А.В. Глушак

Старооскольский технологический институт НИТУ МИСиС,
м-н Макаренко, 42, 309516, Старый Оскол, e-mail: varhipov@inbox.ru,
Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, 308007, г. Белгород, e-mail: Glushak@bsu.edu.ru

Аннотация. В статье исследуется поведение решений обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка в окрестности точки вырождения старшего коэффициента. Устанавливаются точные двусторонние асимптотические формулы для гладких решений. Приведены условия, обеспечивающие однозначную разрешимость рассматриваемых уравнений.

Ключевые слова: вырождающиеся дифференциальные уравнения, точка вырождения, асимптотические представления, начальные и граничные задачи.

В теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами поведение решений вблизи точек вырождения старшего коэффициента до сегодняшнего дня еще недостаточно исследовано. В настоящей работе рассматриваются вопросы существования, а также асимптотика гладких решений линейного дифференциального уравнения второго порядка, вырождающегося в некоторой точке в уравнение первого порядка. Подобные уравнения изучались Глушко В.П. [1, 2], Розовым Н.Х., Сушко В.Г., Чудовой Д.И. [3] и др. В [1, 2] исследовались вопросы разрешимости двухточечных граничных задач, в [3] — возможности постановки и разрешимости задачи типа Коши, а также применение к нелинейным уравнениям. В работе [4] получены точные асимптотические формулы решений в правой окрестности точки вырождения $t_0 = 0$, показано, что при определённых условиях, существуют бесконечно убывающие к нулю и существенно неограниченные решения уравнения. На основе результатов [4] в предлагаемой статье строятся двусторонние асимптотики гладких решений уравнения около точки вырождения и рассматривается возможность правильной постановки начальных (граничных) задач, обеспечивающей их однозначную разрешимость в классах непрерывных функций.

Работа второго автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 13-01-00378.

1. Предварительные условия, обозначения и преобразования. Рассмотрим при $t \in [0; d]$ линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$(a(t)u'(t))' + b(t)u'(t) + c(t)u(t) = f(t)\,, \tag{1}$$

$a(t_0) = 0$, $a(t) \neq 0$ при $t \neq t_0$, $b(t_0) = b_0 \neq 0$. Для простоты формулировок гладкость заданных коэффициентов и правой части уравнения (1) предполагается достаточной для выполнения необходимых в дальнейшем действий.

Условие 1. Коэффициенты уравнения (1) и $f(t)$ – бесконечно дифференцируемые на $[0; d]$ функции $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $f(t) \in C^\infty[0; d])$, $a(t) \neq 0$ при $t \in [0; t_0) \cup (t_0; d]$ и $0 < t_0 < d$, $a(t_0) = 0$, $b(t_0) = b_0 \neq 0$.

В дальнейшем в ряде случаев бесконечная дифференцируемость не требуется, тогда $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $f(t) \in C^N[0; d]$.

Для некоторого $\delta > 0$ на отрезке $[t_0 - \delta; t_0 + \delta]$ определим функции

$$\alpha(t) = \sqrt{b^2(t) - 4a(t)c(t)} > 0\,,$$

$$h(t) = \frac{\alpha^{-1}(t)}{4} \cdot \left(a(t) \left(\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}\right)^2 - 2\left(a(t)\frac{\alpha'(t)'}{\alpha(t)}\right) - 2b'(t) \right).$$

Выбор параметра $\delta > 0$ обусловлен выполнением следующего условия.

Условие 2. На отрезке $[t_0 - \delta; t_0 + \delta]$ выполняются неравенства

$$\alpha(t) = \sqrt{b^2(t) - 4a(t)c(t)} > \frac{|b_0|}{2}\,, \qquad \int\limits_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} |h(t_1)dt_1| < \frac{1}{2}\,, \qquad b(t) \neq 0\,. \tag{2}$$

Для любого решения $u(t)$ уравнения (1) будем рассматривать его отдельно на каждом из промежутков $[t_0 - \delta; t_0)$ и $(t_0; t_0 + \delta]$, т.е.

$$u(t) = \begin{cases} u^-(t), \ t \in [t_0 - \delta; t_0), \\ u^+(t), \ t \in (t_0; t_0 + \delta]. \end{cases}$$

Как известно, выполнение условия 1, всюду, за исключением возможно точки t_0, обеспечивает гладкость решения $u(t)$. Основное требование — непрерывность $u(t)$ достигается при выполнении предельного соотношения

$$\lim_{t \to t_0 - 0} u^-(t) = \lim_{t \to t_0 + 0} u^+(t) = u^\pm(t_0) = u(t_0).$$

Простые замены переменных в теореме 2 из [4] позволяют получить асимптотические представления для функций $u^\pm(t)$ на соответствующих промежутках. При этом они несколько отличаются при изменении знака $a(t)$.

Определим при $a(t) > 0$ на $(t_0; t_0 + \delta]$ функции

$$v_1^+(t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} \exp\left(\int\limits_t^{t_0+\delta} \frac{b(\tau)+\alpha(\tau)}{2\cdot a(\tau)} d\tau\right), \quad v_2^+(t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} \exp\left(\int\limits_t^{t_0+\delta} \frac{b(\tau)-\alpha(\tau)}{2\cdot a(\tau)} d\tau\right) \tag{3}$$

и функции

$$\Phi^+(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k^+(t) = \sum_{k=0}^{n} \varphi_k^+(t) + \hat{\varphi}_n^+(t), \quad \Psi^+(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k^+(t) = \sum_{k=0}^{n} \psi_k^+(t) + \hat{\psi}_n^+(t), \tag{4}$$

как решения уравнений

$$\Phi^+(t) = 1 + K_1^+\Phi^+(t), \qquad \Psi^+(t) = 1 + K_2^+\Psi^+(t),$$

где интегральные операторы

$$K_1^+\varphi(t) = \int\limits_{t_0}^{t_0+\delta} K_1^+(t,t_1)\varphi(t_1)dt_1, \qquad K_2^+\psi(t) = \int\limits_{t_0}^{t} K_2^+(t,t_1)\psi(t_1)dt_1$$

имеют ядра

$$K_1^+(t,t_1) = \begin{cases} h(t_1), & t_0 \le t_1 \le t \le t_0+\delta, \\ h(t_1)\exp\left(-\int\limits_t^{t_1} \frac{\alpha(\tau)}{a(\tau)} d\tau\right), & t \le t_1 \le t_0+\delta, \end{cases}$$

$$K_2^+(t,t_1) = -h(t_1) + h(t_1)\exp\left(-\int\limits_{t_1}^{t} \frac{\alpha(\tau)}{a(\tau)} d\tau\right), \quad t_0 \le t_1 \le t \le t_0+\delta,$$

а

$$\varphi_{k+1}^+ = K_1^+\varphi_k^+ = (K_1^+)^{k+1}\varphi_0^+, \qquad \psi_{k+1}^+ = K_2^+\psi_k^+ = (K_2^+)^{k+1}\psi_0^+, \qquad \varphi_0^+(t) \equiv \psi_0^+(t) \equiv 1.$$

Как отмечено в [4] ряды в (4) являются асимптотическими при $t \to t_0+0$, абсолютно и равномерно на $[t_0; t_0+\delta]$ сходятся при выполнении (2).

Функции

$$u_1^+(t) = v_1^+(t)\Phi^+(t), \quad u_2^+(t) = v_2^+(t)\Psi^+(t) \tag{5}$$

представляют фундаментальную систему решений однородного уравнения (1).

Частное решение уравнения (1) на промежутке $(t_0; t_0+\delta]$ определим равенством

$$u_*^+(t) = \int\limits_{t_0}^{t_0+\delta} G^+(t,\tau)f(\tau)d\tau\ , \tag{6}$$

$$\text{где } G^+(t,\tau)=\begin{cases}\dfrac{-\Phi^+(t)\Psi^+(\tau)\exp\left(-\int\limits_{\tau}^{t}\dfrac{b(\tau_1)+\alpha(\tau_1)}{2\cdot a(\tau_1)}d\tau_1\right)}{a(t_0+\delta)W^+(t_0+\delta)\sqrt{\alpha(t)\alpha(\tau)}}, & t_0<\tau\le t,\\[2ex] \dfrac{-\Phi^+(\tau)\Psi^+(t)\exp\left(\int\limits_{t}^{\tau}\dfrac{b(\tau_1)-\alpha(\tau_1)}{2\cdot a(\tau_1)}d\tau_1\right)}{a(t_0+\delta)W^+(t_0+\delta)\sqrt{\alpha(t)\alpha(\tau)}}, & t\le\tau\le t_0+\delta,\end{cases}$$

$$W^+(t_0+\delta)=u_1^+(t_0+\delta)(u_2^+)'(t_0+\delta)-(u_1^+)'(t_0+\delta)u_2^+(t_0+\delta).$$

Аналогично, при $a(t)<0$ на $(t_0;t_0+\delta]$ рассмотрим функции

$$\bar v_1^+(t)=\frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}}\exp\left(\int\limits_{t}^{t_0+\delta}\frac{b(\tau)-\alpha(\tau)}{2\cdot a(\tau)}d\tau\right),\quad \bar v_2^+(t)=\frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}}\exp\left(\int\limits_{t}^{t_0+\delta}\frac{b(\tau)+\alpha(\tau)}{2\cdot a(\tau)}d\tau\right), \tag{7}$$

и

$$\bar\Phi^+(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\bar\varphi_k^+(t)=\sum_{k=0}^{n}\bar\varphi_k^+(t)+\breve\varphi_n^+(t),\qquad \bar\Psi^+(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\bar\psi_k^+(t)=\sum_{k=0}^{n}\bar\psi_k^+(t)+\breve\psi_n^+(t), \tag{8}$$

как решения уравнений

$$\bar\Phi^+(t)=1+\bar K_1^+\bar\Phi^+(t),\qquad \bar\Psi^+(t)=1+\bar K_2^+\bar\Psi^+(t)$$

с интегральными операторами

$$\bar K_1^+\varphi(t)=\int\limits_{t_0}^{t_0+\delta}\bar K_1^+(t,t_1)\varphi(t_1)dt_1,\quad \bar K_2^+\psi(t)=\int\limits_{t_0}^{t}\bar K_2^+(t,t_1)\psi(t_1)dt_1$$

и ядрами

$$\bar K_1^+(t,t_1)=\begin{cases}-h(t_1), & t_0\le t_1\le t\le t_0+\delta,\\ -h(t_1)\exp\left(\int\limits_{t}^{t_1}\dfrac{\alpha(\tau)}{a(\tau)}d\tau\right), & t\le t_1\le t_0+\delta,\end{cases}$$

$$\bar K_2^+(t,t_1)=h(t_1)-h(t_1)\exp\left(\int\limits_{t_1}^{t}\frac{\alpha(\tau)}{a(\tau)}d\tau\right),\ t_0\le t_1\le t\le t_0+\delta,$$

где $\bar\varphi_{k+1}^+=\bar K_1^+\bar\varphi_k^+=(\bar K_1^+)^{k+1}\bar\varphi_0^+$, $\bar\varphi_0^+(t)=1$, $\bar\psi_{k+1}^+=\bar K_2^+\bar\psi_k^+=(\bar K_2^+)^{k+1}\bar\psi_0^+$, $\bar\psi_0^+(t)=1$.

Как и выше,

$$\bar u_1^+(t)=\bar v_1^+(t)\bar\Phi^+(t)\quad\text{и}\quad \bar u_2^+(t)=\bar v_2^+(t)\bar\Psi^+(t) \tag{9}$$

– фундаментальные решения уравнения (1), частное решение задается в виде

$$\bar{u}_*^+(t)=\int\limits_{t_0}^{t_0+\delta}\bar{G}^+(t,\tau)f(\tau)d\tau, \tag{10}$$

где $$\bar{G}^+(t,\tau)=\begin{cases}\dfrac{-\bar{\Phi}^+(t)\bar{\Psi}^+(\tau)\exp\left(-\displaystyle\int\limits_{\tau}^{t}\dfrac{b(\tau_1)-\alpha(\tau_1)}{2\cdot a(\tau_1)}d\tau_1\right)}{a(t_0+\delta)\bar{W}^+(t_0+\delta)\sqrt{\alpha(t)\alpha(\tau)}}, & t_0<\tau\le t,\\[2ex] \dfrac{-\bar{\Phi}^+(\tau)\bar{\Psi}^+(t)\exp\left(\displaystyle\int\limits_{t}^{\tau}\dfrac{b(\tau_1)+\alpha(\tau_1)}{2\cdot a(\tau_1)}d\tau_1\right)}{a(t_0+\delta)\bar{W}^+(t_0+\delta)\sqrt{\alpha(t)\alpha(\tau)}}, & t\le\tau\le t_0+\delta,\end{cases}$$

$$\bar{W}^+(t_0+\delta)=\bar{u}_1^+(t_0+\delta)(\bar{u}_2^+)'(t_0+\delta)-(\bar{u}_1^+)'(t_0+\delta)\bar{u}_2^+(t_0+\delta)\ne 0.$$

Для построения двусторонних разложений решений в окрестности точки t_0, необходимо выписать асимптотические формулы для $u^-(t)$. На $[t_0-\delta;t_0)$ определим при $a(t)>0$

$$v_1^-(t)=\frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}}\exp\left(-\int\limits_{t_0-\delta}^{t}\frac{b(\tau)-\alpha(\tau)}{2\cdot a(\tau)}d\tau\right),\quad v_2^-(t)=\frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}}\exp\left(-\int\limits_{t_0-\delta}^{t}\frac{b(\tau)+\alpha(\tau)}{2\cdot a(\tau)}d\tau\right) \tag{11}$$

и функции

$$\Phi^-(t)=\sum_{k=0}^{n}\varphi_k^-(t)+\hat{\varphi}_n^-(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k^-(t),\ \Psi^-(t)=\sum_{k=0}^{n}\psi_k^-(t)+\hat{\psi}_n^-(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\psi_k^-(t) \tag{12}$$

из уравнений

$$\Phi^-(t)=1+K_1^-\Phi^-(t),\qquad \Psi^-(t)=1+K_2^-\Psi^-(t),$$

где

$$K_1^-\varphi(t)=\int\limits_{t_0-\delta}^{t_0}K_1^-(t,t_1)\varphi(t_1)dt_1,\quad K_2^-\psi(t)=\int\limits_{t}^{t_0}K_2^-(t,t_1)\psi(t_1)dt_1$$

– интегральные операторы с ядрами

$$K_1^-(t,t_1)=\begin{cases}h(t_1), & t_0-\delta\le t\le t_1\le t_0,\\ h(t_1)\exp\left(-\displaystyle\int\limits_{t_1}^{t}\frac{\alpha(\tilde{t})}{a(\tilde{t})}d\tilde{t}\right), & t_0-\delta\le t_1\le t<t_0,\end{cases}$$

$$K_2^-(t,t_1) = -h(t_1) + h(t_1)\exp\left(-\int\limits_t^{t_1}\frac{\alpha(\tilde t)}{a(\tilde t)}d\tilde t\right), \quad t_0-\delta \le t \le t_1 < t_0.$$

Функции

$$u_1^-(t) = v_1^-(t)\cdot\Phi^-(t), \qquad u_2^-(t) = v_2^-(t)\cdot\Psi^-(t) \tag{13}$$

представляют фундаментальную систему решений для уравнения (1) на $[t_0-\delta;t_0)$, а частное решение для произвольной функции $f(t)$ можно записать в виде

$$u_*^-(t) = \int\limits_{t_0-\delta}^{t_0} G^-(t,\tilde t)f(\tilde t)d\tilde t, \tag{14}$$

где $G^-(t,\tilde t) = \begin{cases} \dfrac{-\Phi^-(t)\Psi^-(\tilde t)\exp\left(\displaystyle\int\limits_t^{\tilde t}\frac{b(t_1)-\alpha(t_1)}{2\cdot a(t_1)}dt_1\right)}{a(t_0-\delta)W^-(t_0-\delta)\sqrt{\alpha(t)\alpha(\tilde t)}}, & t\le\tilde t<t_0,\\[2ex] \dfrac{-\Phi^-(\tilde t)\Psi^-(t)\exp\left(-\displaystyle\int\limits_{\tilde t}^{t}\frac{b(t_1)+\alpha(t_1)}{2\cdot a(t_1)}dt_1\right)}{a(t_0-\delta)W^-(t_0-\delta)\sqrt{\alpha(t)\alpha(\tilde t)}}, & t_0-\delta\le\tilde t\le t, \end{cases}$

$$W^-(t_0-\delta) = u_1^-(t_0-\delta)(u_2^-)'(t_0-\delta) - (u_1^-)'(t_0-\delta)u_2^-(t_0-\delta) \ne 0.$$

Справедливо следующее утверждение (ср. с Теоремой 2 в [4]).

Теорема 1. *Пусть в уравнении (1) выполнены условия 1 и 2. Тогда:*

а) если $a(t)>0$ при $t>t_0$, то общее решение уравнения (1) для любой функции $f(t)$ представимо на $(t_0;t_0+\delta]$ в виде

$$u^+(t) = \tilde C_1^+\cdot u_1^+(t) + \tilde C_2^+\cdot u_2^+(t) + u_*^+(t),$$

где $u_1^+(t), u_2^+(t), u_*^+(t)$ определены в (3)-(6); при этом

если $b(t_0)=b_0<0$, то $u_{1,2}^+(t)\in C^N[t_0;t_0+\delta]$, $u_*^+(t)\in C^N[t_0;t_0+\delta]$ и $u^+(t)\in C^N[t_0;t_0+\delta]$ для любых постоянных $\tilde C_1^+$, $\tilde C_2^+$, где $N=\max\{m: b_0+m\cdot a'(t_0)<0\}$, $\lim\limits_{t\to t_0+0}(u_2^+)^{(m)}(t)=0$ для всех $0\le m\le N$;

если $b(t_0)=b_0>0$, то $u_*^+(t)\in C^\infty[t_0;t_0+\delta]$, $\lim\limits_{t\to t_0+0}(u_1^+)^{(m)}(t)=+\infty$ для всех $m\ge0$ и $u^+(t)\in C^\infty[t_0;t_0+\delta]$, если $\tilde C_1^+=0$;

б) если $a(t)<0$ при $t>t_0$, то общее решение уравнения (1) для любой функции $f(t)$ представимо на $(t_0;t_0+\delta]$ в виде

$$u^+(t) = \tilde C_1^+\cdot u_1^+(t) + \tilde C_2^+\cdot u_2^+(t) + u_*^+(t),$$

где $\bar{u}_1^+(t), \bar{u}_2^+(t), \bar{u}_*^+(t)$ *определены в (7)-(10); при этом*

если $b(t_0) = b_0 > 0$, *то* $\bar{u}_{1,2}^+(t) \in C^N[t_0; t_0+\delta]$, $\bar{u}_*^+(t) \in C^N[t_0; t_0+\delta]$ *и* $\bar{u}^+(t) \in C^N[t_0; t_0+\delta]$ *для любых постоянных* $\tilde{C}_1^+$, $\tilde{C}_2^+$, *где* $N = \max\{m : b_0 + m \cdot a'(t_0) > 0\}$, $\lim\limits_{t\to t_0+0} (u_2^+)^{(m)}(t) = 0$ *для всех* $0 \le m \le N$;

если $b(t_0) = b_0 < 0$, *то* $u_*^+(t) \in C^\infty[t_0; t_0 + \delta]$, $\lim\limits_{t\to t_0+0} (\bar{u}_1^+)^{(m)}(t) = +\infty$ *для всех* $m \ge 0$ *и* $\bar{u}^+(t) \in C^\infty[t_0; t_0 + \delta]$, *если* $\tilde{C}_1^+ = 0$;

в) если $a(t) > 0$ *при* $t < t_0$, *то общее решение уравнения (1) для любой функции* $f(t)$ *представимо на* $[t_0 - \delta; t_0)$ *в виде*

$$u^-(t) = \tilde{C}_1^- \cdot u_1^-(t) + \tilde{C}_2^- \cdot u_2^-(t) + u_*^-(t),$$

где $u_{1,2}^- t), u_*^-(t)$ *определены в (11)-(14); при этом*

если $b(t_0) = b_0 < 0$, *то* $\lim\limits_{t\to t_0-0} (u_1^-)^{(m)}(t) = +\infty$ *для всех* $m \ge 0$, $u_*^-(t) \in C^\infty[t_0 - \delta; t_0]$ *и* $u^-(t) \in C^\infty[t_0 - \delta; t_0]$, *если* $\tilde{C}_1^- = 0$;

если $b(t_0) = b_0 > 0$, *то* $u_{1,2}^-(t) \in C^N[t_0-\delta; t_0]$, $u_*^-(t) \in C^N[t_0-\delta; t_0]$ *и* $u^-(t) \in C^N[t_0-\delta; t_0]$ *для любых постоянных* $\tilde{C}_1^-$, $\tilde{C}_2^-$, *где* $N = \max\{m : b_0 + m \cdot a'(t_0) > 0\}$, $\lim\limits_{t\to t_0-0} (u_2^-)^{(m)}(t) = 0$ *для всех* $0 \le m \le N$.

Замечание.

1) Если $a'(t_0) = 0$, то в Теореме 1 $N = +\infty$.

2) В точке $t = t_0$ выполнены (в случае $a(t) > 0$ при $t > t_0$) предельные соотношения

$$u_1^+(t_0) = v_1^+(t_0) = \frac{1}{\sqrt{|b_0|}} \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t_0+\delta} \frac{b(\tau) + \alpha(\tau)}{2 \cdot a(\tau)} d\tau\right) = \begin{cases} \theta_1^+ > 0 & \text{при } b_0 < 0\,, \\ +\infty & \text{при } b_0 > 0\,; \end{cases}$$

$$u_2^+(t_0) = \frac{1}{\sqrt{|b_0|}} \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t_0+\delta} \frac{b(\tau) - \alpha(\tau)}{2 \cdot a(\tau)} d\tau\right) = \begin{cases} 0 & \text{при } b_0 < 0\,, \\ \theta_2^+ > 0 & \text{при } b_0 > 0\,; \end{cases}$$

$$\lim_{t\to t_0+0} u_*^+(t) = u_*^+(t_0) = \begin{cases} 0 & \text{при } b_0 < 0\,, \\ \theta_*^+ & \text{при } b_0 > 0\,; \end{cases} .$$

3) В точке $t = t_0$ выполнены (в случае $a(t) < 0$ при $t > t_0$) предельные соотношения

$$\bar{u}_1^+(t_0) = \bar{v}_1^+(t_0) = \frac{1}{\sqrt{|b_0|}} \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t_0+\delta} \frac{b(\tau) - \alpha(\tau)}{2 \cdot a(\tau)} d\tau\right) = \begin{cases} +\infty & \text{при } b_0 < 0\,, \\ \bar{\theta}_1^+ > 0 & \text{при } b_0 > 0\,; \end{cases}$$

$$\bar{u}_2^+(t_0) = \frac{1}{\sqrt{|b_0|}} \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t_0+\delta} \frac{b(\tau) + \alpha(\tau)}{2 \cdot a(\tau)} d\tau\right) = \begin{cases} \bar{\theta}_2^+ > 0 & \text{при } b_0 < 0\,, \\ 0 & \text{при } b_0 > 0\,. \end{cases}$$

$$\lim_{t\to t_0+0} \bar{u}_*^+(t) = \bar{u}_*^+(t_0) = \begin{cases} \bar{\theta}_*^+ & \text{при } b_0 < 0\,, \\ 0 & \text{при } b_0 > 0\,. \end{cases}$$

4) В точке $t = t_0$ выполнены (в случае $a(t) > 0$ при $t < t_0$) следующие предельные соотношения

$$v_1^-(t_0) = \frac{1}{\sqrt{|b_0|}} \exp\left(-\int\limits_{t_0-\delta}^{t_0} \frac{b(\tau) - \alpha(\tau)}{2 \cdot a(\tau)} d\tau\right) = \begin{cases} +\infty & \text{при} \quad b_0 < 0\,, \\ \theta_1^- > 0 & \text{при} \quad b_0 > 0\,; \end{cases}$$

$$u_1^-(t_0) = v_1^-(t_0) = \frac{1}{\sqrt{|b_0|}} \exp\left(-\int\limits_{t_0-\delta}^{t_0} \frac{b(\tau) - \alpha(\tau)}{2 \cdot a(\tau)} d\tau\right) = \begin{cases} +\infty & \text{при} \quad b_0 < 0\,, \\ \theta_1^- > 0 & \text{при} \quad b_0 > 0\,; \end{cases}$$

$$v_2^-(t_0) = \frac{1}{\sqrt{|b_0|}} \exp\left(-\int\limits_{t_0-\delta}^{t_0} \frac{b(\tau) + \alpha(\tau)}{2 \cdot a(\tau)} d\tau\right) = \begin{cases} \theta_2^- > 0 & \text{при} \quad b_0 < 0\,, \\ 0 & \text{при} \quad b_0 > 0\,; \end{cases}$$

$$u_2^-(t_0) = v_2^-(t_0) = \frac{1}{\sqrt{|b_0|}} \exp\left(-\int\limits_{t_0-\delta}^{t_0} \frac{b(\tau) + \alpha(\tau)}{2 \cdot a(\tau)} d\tau\right) = \begin{cases} \theta_2^- > 0 & \text{при} \quad b_0 < 0\,, \\ 0 & \text{при} \quad b_0 > 0 \end{cases} \tag{15}$$

и
$$\lim_{t \to t_0 - 0} u_*^-(t) = u_*^-(t_0) = \begin{cases} \theta_*^- & \text{при} \quad b_0 < 0\,, \\ 0 & \text{при} \quad b_0 > 0\,. \end{cases}$$

Полученные результаты позволяют построить двусторонние асимптотические формулы гладких решений уравнения (1) в окрестности точки t_0.

2. Двусторонние асимптотики решений.

I. Рассмотрим вопрос о существовании гладких решений уравнения (1) на всем отрезке $[0; d]$ при условии сохранения знака функции $a(t) > 0$ на $[0; t_0) \cup (t_0; d]$. При выполнении условия 1 в этом случае $a(t_0) = a'(t_0) = 0$ и в Теореме 1 $N = +\infty$.

Напомним, что $u(t) = \begin{cases} u^-(t), & t \in [t_0 - \delta; t_0) \\ u^+(t), & t \in (t_0; t_0 + \delta] \end{cases}$ и непрерывное на $[t_0 - \delta; t_0 + \delta]$ решение $u(t)$ должно удовлетворять условию:

$$\lim_{t \to t_0 - 0} u^-(t) = \lim_{t \to t_0 + 0} u^+(t) = u^\pm(t_0) = u(t_0). \tag{16}$$

а). При $b_0 < 0$ для $u^-(t) = \tilde{C}_1^- \cdot u_1^-(t) + \tilde{C}_2^- \cdot u_2^-(t) + u_*^-(t)$ при $t \in [t_0 - \delta; t_0)$ $\tilde{C}_1^- = 0$ (требование непрерывности (ограниченности)), $u(t) = u^-(t) = C_2^- \cdot u_2^-(t) + u_*^-(t)$ и

$$\lim_{t \to t_0 - 0} u^-(t) = \tilde{C}_2^- \cdot u_2^-(t_0) + u_*^-(t_0) = \tilde{C}_2^- \cdot \theta_2^- + \theta_*^-;$$

при $t \in (t_0; t_0 + \delta]$ для $u(t) = u^+(t) = \tilde{C}_1^+ \cdot u_1^+(t) + \tilde{C}_2^+ \cdot u_2^+(t) + u_*^+(t)$ при любых $\tilde{C}_{1,2}^+$:

$$\lim_{t \to t_0 + 0} u^+(t) = \tilde{C}_1^+ \cdot u_1^+(t_0) + \tilde{C}_2^+ \cdot u_2^+(t_0) + u_*^+(t_0) = \tilde{C}_1^+ \cdot \theta_1^+ (u_2^+(t_0) = u_*^+(t_0) = 0)$$

и из (16) следует

$$\tilde{C}_2^- \cdot \theta_2^- + \theta_*^- = \tilde{C}_1^+ \cdot \theta_1^+ \quad \text{или} \quad \tilde{C}_2^- = \frac{\tilde{C}_1^+ \cdot \theta_1^+ - \theta_*^-}{\theta_2^-} \qquad \left(\tilde{C}_1^+ = \frac{\tilde{C}_2^- \cdot \theta_2^- + \theta_*^-}{\theta_1^+} \right). \tag{17}$$

Таким образом, непрерывное на $[t_0 - \delta; t_0 + \delta]$ решение уравнения (1) имеет вид:

$$u(t) = \begin{cases} \tilde{C}_2^- \cdot u_2^-(t) + u_*^-(t) & \text{при } t \in [t_0 - \delta; t_0], \\ \tilde{C}_1^+ \cdot u_1^+(t) + \tilde{C}_2^+ \cdot u_2^+(t) + u_*^+(t) & \text{при } t \in [t_0; t_0 + \delta], \end{cases} \tag{18}$$

где постоянные $\tilde{C}_2^-$,$\tilde{C}_2^+$ произвольны, а $\tilde{C}_1^+$ находится из условия (17). При этом $u(t_0) = \tilde{C}_1^+ \cdot \theta_1^+ = \tilde{C}_2^- \cdot \theta_2^- + \theta_*^-$.

Таким образом, в этом случае при $t > t_0$ происходит «qqраздвоение» гладкого решения уравнения (1). С другой стороны, двухпараметрическое семейство решений уравнения (1) при $t < t_0$ расщепляется в левой окрестности в точке t_0 на однопараметрические ограниченное и неограниченное семейства решений.

Рассмотрим вопрос о гладкости этих решений в точке t_0. Для производной

$$u'(t) = \begin{cases} \tilde{C}_2^- \cdot (u_2^-)'(t) + (u_*^-)'(t) & \text{при } t \in [t_0 - \delta; t_0), \\ \tilde{C}_1^+ \cdot (u_1^+)'(t) + \tilde{C}_2^+ \cdot (u_2^+)'(t) + (u_*^+)'(t) & \text{при } t \in (t_0; t_0 + \delta], \end{cases} \tag{19}$$

кроме того, $\lim\limits_{t \to t_0 + 0} a(t)(u^+)''(t) = \lim\limits_{t \to t_0 - 0} a(t)(u^-)''(t) = 0$. Тогда

$$\lim_{t \to t_0 + 0} (f(t) - b(t)(u^+)'(t) - c(t)u^+(t)) = 0, \qquad (u^+)'(t_0) = \frac{f(t_0) - c(t_0)u^+(t_0)}{b_0},$$

$$\lim_{t \to t_0 - 0} (f(t) - b(t)(u^-)'(t) - c(t)u^-(t)) = 0,$$

$$(u^-)'(t_0) = \frac{f(t_0) - c(t_0)u^-(t_0)}{b_0} = (u^+)'(t_0) = u'(t_0).$$

Таким образом, функция $u(t)$, определенная в (18), непрерывно дифференцируема на $[t_0 - \delta; t_0 + \delta]$, т.е. $u(t) \in C^1[t_0 - \delta; t_0 + \delta]$ для любой постоянной $\tilde{C}_2^+$. Отметим, что для справедливости этих рассуждений вполне достаточно непрерывности функции $f(t)$ на $[t_0 - \delta; t_0 + \delta]$ и не требуется бесконечная гладкость коэффициентов уравнения. Несложные стандартные рассуждения позволяют при выполнении условия 1 установить бесконечную дифференцируемость решений уравнения (1), определенных формулами (18)-(19) (см. замечание, п. 1). Действительно, обозначив

$$v(t) = u'(t) = \begin{cases} \tilde{C}_2^- \cdot (u_2^-)'(t) + (u_*^-)'(t) & t \in [t_0 - \delta; t_0), \\ \tilde{C}_1^+ \cdot (u_1^+)'(t) + \tilde{C}_2^+ \cdot (u_2^+)'(t) + (u_*^+)'(t), & t \in (t_0; t_0 + \delta] \end{cases}$$

и продифференцировав (1), видим, что функция $v(t)$ является непрерывным на $[t_0 - \delta; t_0 + \delta]$ решением вырождающегося дифференциального уравнения

$$(a(t)v'(t))' + \hat{b}(t)v'(t) + \hat{c}(t)v(t) = \hat{f}(t), \quad t \in [0; d], \quad a(t_0) = 0,\ \hat{b}(t_0) = b_0 \neq 0, \tag{20}$$

где $\hat{b}(t) = b(t) + a'(t)$, $\hat{c}(t) = c(t) + b'(t) + a''(t)$, $\hat{f}(t) = f'(t) - c'(t)u(t)$.

Теперь, согласно утверждению Теоремы 1 (при $f(t) \in C^1[t_0 - \delta; t_0 + \delta]$), применённой к уравнению (20), следует, что $v(t) \in C^1[t_0 - \delta; t_0 + \delta]$ и $u(t) \in C^2[t_0 - \delta; t_0 + \delta]$. Далее эти рассуждения неограниченно продолжаются по индукции.

б). При $b_0 > 0$ для $u^-(t) = \tilde{C}_1^- \cdot u_1^-(t) + \tilde{C}_2^- \cdot u_2^-(t) + u_*^-(t)$ при $t \in [t_0 - \delta; t_0)$

$$\lim_{t \to t_0 - 0} u^-(t) = \tilde{C}_1^- \cdot u_1^-(t_0) + \tilde{C}_2^- \cdot u_2^-(t_0) + u_*^-(t_0) = \tilde{C}_1^- \cdot \theta_1^- (u_2^-(t_0) = u_*^-(t_0) = 0),$$

для $u^+(t) = \tilde{C}_1^+ \cdot u_1^+(t) + \tilde{C}_2^+ \cdot u_2^+(t) + u_*^+(t)$ при $t \in (t_0; t_0 + \delta] \quad \Rightarrow \tilde{C}_1^+ = 0$ (требование непрерывности (ограниченности)),

$$\lim_{t \to t_0 + 0} u^+(t) = \tilde{C}_2^+ \cdot u_2^+(t_0) + u_*^+(t_0) = \tilde{C}_2^+ \cdot \theta_2^+ + \theta_*^+,$$

а из (16) следует

$$\tilde{C}_2^+ \cdot \theta_2^+ + \theta_*^+ = \tilde{C}_1^- \cdot \theta_1^- \quad \text{или} \quad \tilde{C}_2^+ = \frac{\tilde{C}_1^- \cdot \theta_1^- - \theta_*^+}{\theta_2^+} \qquad \left(\tilde{C}_1^- = \frac{\tilde{C}_2^+ \cdot \theta_2^+ + \theta_*^+}{\theta_1^-} \right). \tag{21}$$

Таким образом, непрерывное на $[t_0 - \delta; t_0 + \delta]$ решение уравнения (1) имеет вид

$$u(t) = \begin{cases} \tilde{C}_1^- \cdot u_1^-(t) + \tilde{C}_2^- \cdot u_2^-(t) + u_*^-(t) & \text{при } t \in [t_0 - \delta; t_0], \\ \tilde{C}_2^+ \cdot u_2^+(t) + u_*^+(t) & \text{при } t \in [t_0; t_0 + \delta], \end{cases} \tag{22}$$

где постоянные $\tilde{C}_2^-, \tilde{C}_2^+$ произвольны, а константа $\tilde{C}_1^-$ определяется формулой (21).

При этом, $u(t_0) = \tilde{C}_1^- \cdot \theta_1^- = \tilde{C}_2^+ \cdot \theta_2^+ + \theta_*^+$. Как и ранее при выполнении условия 1 может быть установлена бесконечная дифференцируемость построенного решения (22). Таким образом, приходим к следующей теореме.

Теорема 2. *Пусть в уравнении (1), выполнены условия 1, 2 и $a(t) > 0$ при $t \in [t_0 - \delta; t_0) \cup (t_0; t_0 + \delta]$. Для любой функции $f(t) \in C^\infty[t_0 - \delta; t_0 + \delta]$ уравнение (1) имеет на $[t_0 - \delta; t_0 + \delta]$ бесконечное множество ограниченных решений. Любое непрерывное на отрезке $[t_0 - \delta; t_0 + \delta]$ решение уравнения (1) является бесконечно дифференцируемым на нём и может быть представлено в виде:*

а) при $b_0 < 0$ формулой (18)

$$u(t) = \begin{cases} \tilde{C}_2^- \cdot u_2^-(t) + u_*^-(t) & \text{при } t \in [t_0 - \delta; t_0], \\ \tilde{C}_1^+ \cdot u_1^+(t) + \tilde{C}_2^+ \cdot u_2^+(t) + u_*^+(t) & \text{при } t \in [t_0; t_0 + \delta], \end{cases}$$

где постоянные $\tilde{C}_1^+$, $\tilde{C}_2^+$ произвольны, а константа $\tilde{C}_2^- = \dfrac{\tilde{C}_1^+ \theta_1^+ - \theta_*^-}{\theta_2^-}$, функции $u_{1,2}^\pm(t)$, $u_*^\pm(t)$ определяются соотношениями (3)-(6), (4)-(14) и

$$u(t_0) = \tilde{C}_1^+ \theta_1^+ = \tilde{C}_2^- \theta_2^- + \theta_*^-, \qquad u'(t_0) = \frac{f(t_0) - c(t_0)u(t_0)}{b_0};$$

б) при $b_0 > 0$ *в виде (22)*

$$u(t) = \begin{cases} \tilde{C}_1^- \cdot u_1^-(t) + \tilde{C}_2^- \cdot u_2^-(t) + u_*^-(t) & t \in [t_0 - \delta; t_0], \\ \tilde{C}_2^+ \cdot u_2^+(t) + u_*^+(t) & t \in [t_0; t_0 + \delta], \end{cases}$$

где постоянные $\tilde{C}_1^-, \tilde{C}_2^-$ *произвольны, а* $\tilde{C}_2^+$ *определяется из условия (21), при этом* $u(t_0) = \tilde{C}_1^- \cdot \theta_1^- = \tilde{C}_2^+ \cdot \theta_2^+ + \theta_*^+$, $u'(t_0) = \dfrac{f(t_0) - c(t_0)u(t_0)}{b_0}$ *, функции* $u_{1.2}^{\pm}(t)$, $u_*^{\pm}(t)$ *определяются соотношениями (3)-(6), (11)-(14).*

II. Рассмотрим теперь вопрос о существовании гладких решений уравнения (1) на отрезке $[0; d]$ при условии, что функция $a(t)$ изменяет знак при переходе через точку t_0: $(t_0 - t)a(t) > 0$ при $t \in [t_0 - \delta; t_0) \cup (t_0; t_0 + \delta]$. Такие же рассуждения, как и выше, приводят к следующей теореме.

Теорема 3. *Пусть в уравнении (1), выполнены условия 1, 2 и* $(t_0 - t)a(t) > 0$ *при* $t \in [t_0 - \delta; t_0) \cup (t_0; t_0 + \delta]$. *Для любой функции* $f(t) \in C^\infty[t_0 - \delta; t_0 + \delta]$ *уравнение (1) имеет на* $[t_0 - \delta; t_0 + \delta]$ *бесконечное множество ограниченных решений. Любое непрерывное на отрезке* $[t_0 - \delta; t_0 + \delta]$ *решение* $u(t)$ *уравнения (1) обладает свойством:*

а) при $b_0 < 0$ *является бесконечно дифференцируемым и может быть представлено в виде*

$$u(t) = \begin{cases} \tilde{C}_2^- \cdot u_2^-(t) + u_*^-(t) & \text{при } t \in [t_0 - \delta; t_0], \\ \tilde{C}_2^+ \cdot \bar{u}_2^+(t) + \bar{u}_*^+(t) & \text{при } t \in [t_0; t_0 + \delta], \end{cases} \tag{23}$$

где постоянная $\tilde{C}_2^-$ *произвольна, а*

$$\tilde{C}_2^+ = \frac{\tilde{C}_2^- \cdot u_2^-(t_0) + u_*^-(t_0) - \bar{u}_*^+(t_0)}{\bar{u}_2^+(t_0)} = \frac{\tilde{C}_2^- \cdot \theta_2^- + \theta_*^- - \bar{\theta}_*^+}{\bar{\theta}_2^+},$$

функции $u_2^-(t)$, $u_*^-(t), \bar{u}_2^+(t)$, $\bar{u}_*^+(t)$ *определяются соотношениями (7) – (14), при этом* $u(t_0) = \tilde{C}_2^- \cdot \theta_2^- + \theta_*^- = \tilde{C}_2^+ \cdot \bar{\theta}_2^+ + \bar{\theta}_*^+$, $u'(t_0) = \dfrac{f(t_0) - c(t_0)u(t_0)}{b_0}$ *;*

б) при $b_0 > 0$ $\;u(t) \in C^N[t_0 - \delta; t_0 + \delta]$ *при* $N = \max\{m : b_0 + m \cdot a'(t_0) > 0\}$ *и может быть представлено в виде*

$$u(t) = \begin{cases} \tilde{C}_1^- \cdot u_1^-(t) + \tilde{C}_2^- \cdot u_2^-(t) + u_*^-(t) & t \in [t_0 - \delta; t_0], \\ \tilde{C}_1^+ \cdot \bar{u}_1^+(t) + \tilde{C}_2^+ \cdot \bar{u}_2^+(t) + \bar{u}_*^+(t) & t \in [t_0; t_0 + \delta], \end{cases} \tag{24}$$

где постоянные $\tilde{C}_1^-, \tilde{C}_2^-, \tilde{C}_2^+$ *произвольны, а* $\tilde{C}_1^+$ *однозначно выражается через* $\tilde{C}_1^-$: $\tilde{C}_1^+ = \dfrac{\tilde{C}_1^- \cdot u_1^-(t_0)}{\bar{u}_1^+(t_0)} = \dfrac{\tilde{C}_1^- \cdot \theta_1^-}{\bar{\theta}_2^+}$, *функции* $u_1^-(t)$, $u_2^-(t)$, $u_*^-(t)$, $\bar{u}_1^+(t)$, $\bar{u}_2^+(t)$, $\bar{u}_*^+(t)$ *определяются соотношениями (7)-(14), при этом* $u(t_0) = \tilde{C}_1^+ \cdot \bar{\theta}_1^+ = \tilde{C}_1^- \cdot \theta_1^-$, $u'(t_0) = \dfrac{f(t_0) - c(t_0)u(t_0)}{b_0}$.

Отметим, что асимптотические ряды в формулах (18), (22)-(24) абсолютно и равномерно сходятся на $[t_0 - \delta; t_0 + \delta]$.

3. Условия однозначной разрешимости на отрезке $[0; d]$. Полученные асимптотические представления решений в формулах (18), (22) - (24) позволяют полностью исследовать вопрос о возможности правильной постановки начальных (граничных) условий для уравнения (1), обеспечивающих однозначную разрешимость уравнения на отрезке $[0; d]$.

Рассмотрим следующую задачу Коши для уравнения (1): найти функцию $u(t)$, удовлетворяющую уравнению (1)

$$(a(t)u'(t))' + b(t)u'(t) + c(t)u(t) = f(t), \quad t \in [0; d], \quad a(t_0) = 0,\ b(t_0) = b_0 \neq 0\,,$$

и начальным условиям при $t_1 \in [0; d]$

$$u(t_1) = A, \quad u'(t_1) = B. \tag{25}$$

Вопросы разрешимости задачи Коши для уравнения (1) существенно зависят от знаков функции $a(t)$ на отрезке $[0; d]$ и $b_0 \neq 0$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть для коэффициентов уравнения (1) и функции $f(t)$ выполнено условие 1, $a(t) > 0$ при $t \in [0; t_0) \cup (t_0; d]$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

а). При $b(t_0) = b_0 > 0$ для любых произвольных постоянных A, B и любой точки $t_1 \in [0; t_0)$ существует единственное на $[0; d]$ решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (25). Функция $u(t)$, доставляющая решение этой задачи, бесконечно дифференцируема на $[0; d]$. Асимптотика решения в точке t_0 задаётся формулами (22) при постоянных, однозначно определяемых значениями A, B и t_1.

б). При $b(t_0) = b_0 < 0$ для любых произвольных постоянных A, B и любой точки $t_1 \in (t_0, d]$ существует единственное на $[0; d]$ решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (25). Функция $u(t)$, доставляющая решение этой задачи, бесконечно дифференцируема на $[0; d]$. Асимптотика решения в точке t_0 задаётся формулами (18) при постоянных, однозначно определяемых значениями A, B и t_1.

□ а). Выберем $\delta > 0$ так, чтобы выполнялось условие 2. Если $t_1 \in [0; t_0 - \delta]$ то, следуя классической теореме существования и единственности решения задачи Коши, найдем функцию $\hat{u}^-(t) \in C^\infty[0; t_0)$, дающую решение задачи Коши на $[0; t_0)$ для любых заданных A, B. Пусть $\hat{u}^-(t_0 - \delta) = A_\delta$, $(\hat{u}^-)'(t_0 - \delta) = B_\delta$. Как следует из Теоремы 2 п.б), любое ограниченное решение уравнения (1) может быть представлено в виде (22). Определим для функции

$$u_0(t) = \begin{cases} \tilde{C}_1^- \cdot u_1^-(t) + \tilde{C}_2^- \cdot u_2^-(t) + u_*^-(t) & \text{при } t \in [t_0 - \delta; t_0], \\ \tilde{C}_2^+ \cdot u_2^+(t) + u_*^+(t) & \text{при } t \in [t_0; t_0 + \delta], \end{cases}$$

постоянные $\tilde{C}_1^-$, $\tilde{C}_2^-$ из условий $u_0(t_0 - \delta) = A_\delta$, $u_0'(t_0 - \delta) = B_\delta$ как решения системы

$$\begin{cases} \tilde{C}_1^- \cdot u_1^-(t_0 - \delta) + \tilde{C}_2^- \cdot u_2^-(t_0 - \delta) + u_*^-(t_0 - \delta) = A_\delta, \\ \tilde{C}_1^-(u_1^-)'(t_0 - \delta) + \tilde{C}_2^-(u_2^-)'(t_0 - \delta) + (u_*^-)'(t_0 - \delta) = B_\delta. \end{cases} \tag{26}$$

Так как функции $u^-_{1,2}(t)$ линейно независимы и определитель системы $W^-(t_0-\delta) = u^-_1(t_0-\delta)(u^-_2)'(t_0-\delta) - (u^-_1)'(t_0-\delta)u^-_2(t_0-\delta) \neq 0$ отличен от нуля, то $\tilde{C}^-_1$, $\tilde{C}^-_2$ определяются однозначно для каждой пары A, B и произвольной точки $t_1 \in [0; t_0)$, при этом постоянная $\tilde{C}^+_2 = \dfrac{\tilde{C}^-_1 \cdot \theta^-_1 - \theta^+_*}{\theta^+_2}$ также определяется однозначно. Это позволяет построить единственное решение задачи на отрезке $[0; t_0+\delta]$. Продолжение решения на весь отрезок $[0; d]$ очевидно. Находим функцию $\hat{u}^+(t) \in C^\infty(t_0; d]$, удовлетворяющую уравнению (1) и условиям Коши $\hat{u}^+(t_0+\delta) = u_0(t_0+\delta)$, $\quad (u^+)'(t_0+\delta) = u_0'(t_0+\delta)$. Итак, требуемая в теореме функция при выполнении условий (17) и (26) имеет вид

$$u(t) = \begin{cases} \hat{u}^-(t) \ \ t \in [0; t_0-\delta], \\ u_0(t) \ \ t \in [t_0-\delta; t_0+\delta], \\ \hat{u}^+(t) \ \ t \in [t_0+\delta, d]. \end{cases} \tag{27}$$

В точках склейки функция (27) является решением задачи Коши для уравнения (1), что и обеспечивает её бесконечную дифференцируемость. Заметим, что функция $u_0(t)$ при выполнении условий (17) и (26) дает асимптотическое представление решения рассматриваемой задачи вблизи точки t_0. Пункт а) теоремы доказан, т.к. при $t_1 \in [t_0-\delta; t_0)$ первый шаг доказательства – построение $\hat{u}^-(t)$ – можно опустить. Для доказательства пункта б) теоремы проводятся аналогичные рассуждения. ■

Если функция $a(t)$ изменяет знак при переходе через точку t_0: $(t_0-t)a(t) > 0$ при $t \in [t_0-\delta; t_0) \cup (t_0; t_0+\delta]$, то дополнительные условия для однозначной разрешимости уравнения (1) выглядят иначе. Так, например, имеет место следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть для коэффициентов уравнения (1) и функции $f(t)$ выполнено условие 1, $(t_0-t)a(t) > 0$ при $t \in [0; t_0) \cup (t_0; d]$. Справедливы следующие утверждения.*

а). Если $b(t_0) = b_0 < 0$, то при некотором $\delta > 0$ для любой произвольной постоянной A и любой точки $t_1 \in [t_0-\delta; t_0+\delta]$ существует единственное на $[0; d]$ решение уравнения (1), удовлетворяющее условию $u(t_1) = A$. Функция $u(t)$, доставляющая решение этой задачи, бесконечно дифференцируема на $[0; d]$. Асимптотика решения в точке t_0 задаётся формулами (23) при постоянных, однозначно определяемых значениями A и t_1.

б). Если $b(t_0) = b_0 > 0$, то при некотором $\delta > 0$ для любых произвольных постоянных A, B, C и любой точки $t_1 \in [0; t_0) \cup (t_0; d]$ существует единственное на $[0; d]$ решение $u(t)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям (25) и $u(t_0-\delta) = C$ (или $u(t_0+\delta) = C$). Функция $u(t) \in C^N[0; d]$ при $N = \max\{m : b_0 + m \cdot a'(t_0) > 0\}$, асимптотика решения в точке t_0 задаётся формулами (24) при постоянных, однозначно определяемых значениями A, B, C и t_1.

□ Доказательство Теоремы 5 проводится по той же схеме, что и доказательство Теоремы 4. ■

Теоремы 4 и 5 не исчерпывают все возможности постановки начально-краевых задач для уравнения (1). Результаты теорем 1-5 позволяют практически полностью охарактеризовать все решения дифференциального уравнения второго порядка в окрестности точки вырождения старшего коэффициента. Они показывают существенные отличия в их поведении в зависимости от знака выражения $\Delta = b_0 \cdot (t_0 - t)a(t)$ в окрестности точки t_0. Отметим, что ни в каком случае для существования гладкого решения невозможно задание более одного условия непосредственно в точке вырождения. Полученные точные асимптотические формулы позволяют строить правильные расчетные схемы для численного решения начально-краевых задач для вырождающихся уравнений, так как именно вблизи особой точки возникают существенные изменения в поведении решений уравнения.

Литература

1. Глушко В.П. Вырождающиеся линейные дифференциальные уравнения. II, III // Дифференц. уравнения. – 1968. – 4;11; 1969. – 5;3.
2. Глушко В.П. Линейные вырождающиеся дифференциальные уравнения / Воронеж: Изд-во Воронежского ун-та, 1972.
3. Розов Н.Х., Сушко В.Г., Чудова Д.И. Дифференциальные уравнения с вырождающимся коэффициентом при старшей производной // Фундаментальная и прикладная математика. – 1998. – 4;3. – С.1063-1095.
4. Архипов В.П. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с вырождающимся коэффициентом при старшей производной // Дифференц. уравнения. – 2011. – 47;10. – С.1383-1393.

ASYMPTOTIC REPRESENTATIONS OF SOLUTIONS THE SECOND-ORDER DIFFERENTIAL EQUATION NEAR DEGENERATING POINT

V.P. Arhipov, A.V. Glushak

Stary Oskol technological institute NITU MISiS,
Makarenko dist., 42, Stary Oskol, 309516, Russia, e-mail: varhipov@inbox.ru
Belgorod State University,
Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: Glushak@bsu.edu.ru

Abstract. Solutions of ordinary linear second-order differential equations are studied. Their behavior in the neighborhood of high-order coefficient degeneracy point is investigated. Exact double-sided asymptotic formulas of smooth solutions are found. Conditions ensuring the single-valued solvability of equations under consideration are described.

Key words: degenerating differential equations, solutions near the degenerating point, asymptotic representations, initial and boundary value problems.