MSC 8035M

К ВОПРОСУ О ТЕПЛООБМЕНЕ СФЕРИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЫ В ГАЗООБРАЗНОЙ СРЕДЕ

Н.В. Малай, С.И. Цыбульников

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, Белгород, 308007, Россия, e-mail: e-mail: malay@bsu.edu.ru

Аннотация. Получено приближенное решение задачи о теплообмене движущейся твердой нагретой сферической частицы со средой при малых числах Пекле и Рейнольдса. Рассмотрен случай, когда внутри частицы действуют неравномерно распределенные источники тепла произвольной природы. Задача решается методом сращиваемых асимптотических разложений по числу Рейнольдса. При рассмотрении теплообмена предполагалось, что средняя температура поверхности частицы может существенно отличается от температуры окружающей ее газообразной среды. При решении уравнения конвективного теплопереноса учитывался степенной вид зависимости коэффициентов теплопроводности и плотности газообразной среды от температуры.

Ключевые слова: поле температуры, метод сращиваемых асимптотических разложений.

Введение. Исследование многочисленных энергетических процессов связано с решением задач переноса теплоты и вещества. Перенос этих субстанций в твердых телах, жидкостях и газах подчиняется условно принятым линейным зависимостям, например, перенос теплоты – закону Фурье: плотность теплового потока (удельный тепловой поток) пропорционален температурному градиенту; молекулярный перенос вещества – закону диффузии Фика: плотность потока вещества пропорциональна градиенту концентраций (или разности диффузионных химических потенциалов). На основании этих линеаризованных законов выводятся соответствующие дифференциальные уравнения.

В дальнейшем, мы будем рассматривать случай однородной среды без диффузии и химических реакций, протекающих с конечной скоростью. Если скорость движения сплошной среды мала по сравнению со скоростью звука, то возникающие в результате движения изменения давления настолько малы, что вызываемым ими изменением плотности (и других термодинамических величин) можно пренебречь. Общие уравнения закона сохранения энергии вне и внутри частицы упрощаются и принимают следующий вид [1]:

$$\rho_e c_{pe} \left(\mathbf{U_e} \nabla\right) T_e = \operatorname{div}\left(\lambda_e \nabla T_e\right), \quad \operatorname{div}\left(\lambda_i \nabla T_i\right) = -q_i \tag{1}$$

с краевыми условиями в сферической системе координат r, θ, φ

$$r = R, \;\; T_e = T_i, \;\; \lambda_e \frac{\partial T_e}{\partial r} = \lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial r} + \sigma_o \sigma_1 \left(T_i^4 - T_{e\infty}^4\right), \tag{2}$$

$$r \to \infty, \quad T_e = T_{e\infty}, \tag{3}$$

$$r \to 0, \;\; T_i \neq \infty, \tag{4}$$

где R – радиус частицы, σ_o – постоянная Стефана-Больцмана; σ_1 – интегральная степень черноты; ρ_e, $\mathbf{U_e}$ и c_{pe} – плотность, массовая скорость и удельная теплоемкость жидкости; q_i – плотность тепловых источников, неоднородно распределенных в объеме частицы, за счет которых происходит нагрев ее поверхности. В уравнение (1) входит массовая скорость газообразной среды $\mathbf{U_e}$. Для определения этой величины использовались результаты работы [2].

В литературе первое уравнение в выражении (2) называется конвективным уравнением переноса тепла. Оно описывает переноса тепла в газообразной среде за счет движения самой среды левая часть этого уравнения и за счет теплопроводности - правая часть. Наличие левой части делает это уравнение существенно нелинейным, что приводит к большим математическим трудностям при нахождении его решений.

Значимость процесса теплообмена, как в природе, так и в технике определяется, прежде всего, тем, что свойства тел самым существенным образом зависят от их теплового состояния, которое в свою очередь само определяется условиями теплообмена [3]. Эти условия оказывают существенное влияние на процессы изменения состояния вещества, механические, магнитные и другие свойства тел. Кроме того при проектировании экспериментальных установок, в которых необходимо обеспечить направленное движение нагретых частиц; при разработке методов тонкой очистки газов от аэрозольных частиц; при математическом моделировании процесса осаждения частиц в разнотемпературных плоскопараллельных каналах и т.п. необходимо знать поле температуры в их окрестности.

Таким образом, многие задачи по тепло-и массопереносу с которыми сталкиваются сегодня физики, инженеры и специалисты по прикладной математике, не поддаются точному решению. Среди причин, затрудняющих точное решение, можно указать, например, нелинейные уравнения движения. Переменные коэффициенты и нелинейные граничные условия на известных или неизвестных границах сложной формы. Для решения подобных задач мы вынуждены пользоваться различного рода приближениями, комбинируя аналитические и численные методы. Среди аналитических методов весьма мощными являются методы возмущений (асимптотических разложений) по большим или малым значениям параметра или координаты [4].

1. Постановка задачи. Метод решения. Рассматривается установившейся процесс теплообмена в потоке вязкой неизотермической газообразной среде, обтекающей твердую сферическую частицу радиусом R. На большом расстоянии от сферы скорость потока равна $\mathbf{U}_\infty$. При описании свойств газообразной среды и частицы рассматривается степенной вид зависимости динамической вязкости и теплопроводности от температуры [5], таким образом

$$\mu_e = \mu_{e\infty} t_e^{\beta}, \quad \lambda_e = \lambda_{e\infty} t_e^{\alpha}, \quad \rho_e = \rho_{e\infty} t_e, \quad \lambda_i = \lambda_{i\infty} t_i^{\omega},$$
$$\mu_{e\infty} = \mu_e\left(T_{e\infty}\right), \quad \rho_{e\infty} = \rho_e\left(T_{e\infty}\right), \quad \lambda_{e\infty} = \lambda_e\left(T_{e\infty}\right), \quad \lambda_{i\infty} = \lambda_i\left(T_{e\infty}\right),$$
$$t_k = T_k/T_{e\infty}, \quad k = e,\ i, \quad 0,5 \le \alpha,\ \beta \le 1, \quad -1 \le \omega \le 1.$$

Здесь и далее индекс e указывает на газообразную среду, индекс i — на принадлежность частице, а индекс ∞ означает параметры газообразной среды на бесконечности, т.е. вдали от частицы.

Определяющими параметрами задачи являются коэффициенты $\rho_{e\infty}$, $\mu_{e\infty}$, $\lambda_{e\infty}$ и сохраняющиеся в процессе движения частицы величины – R, U_∞ и $T_{e\infty}$. Из этих параметров составить следующие безразмерные комбинации: число Рейнольдса $\mathrm{Re}_\infty = (\rho_{e\infty} U_\infty R)/\mu_{e\infty}$, число Пекле $\mathrm{Pe}_\infty = \mathrm{Re}_\infty \cdot \mathrm{Pr}_\infty$, где $\mathrm{Pr}_\infty = (c_{pe}\mu_{e\infty}/\lambda_{e\infty}$ — число Прандтля, U_∞ — величина характерной скорости. Обезразмерим уравнения и граничные условия: $\mathbf{V_e} = \mathbf{U_e}/U_\infty$, $y_m x_m/R$.

При $\varepsilon = \mathrm{Re}_\infty \ll 1$ решение уравнений гидродинамики находятся в виде ряда по ε [2]. Перейдем теперь к решению уравнений теплопроводности. Если перейти к безразмерным величинам, то конвективное уравнение теплопроводности принимает вид

$$\varepsilon \frac{\mathrm{Pr}_\infty}{t_e}\left(V_r \frac{\partial t_e}{\partial y} + \frac{V_\theta}{y}\frac{\partial t_e}{\partial \theta}\right) = \mathrm{div}\left(t_e^\alpha \nabla t_e\right). \tag{5}$$

Конвективное уравнение переноса теплоты является нелинейным и для его решения применим метод сращиваемых асимптотических разложений [4]. В работе будем рассматриваться задача с возмущениями, действующими в очень узких областях, или зонах, в которых зависимые переменные испытывают достаточно резкие изменения. Ввиду наличия малого параметра при старшей производной эти узкие зоны часто оказываются лежащими вблизи границы области, в которой решается задача. Поэтому в задачах механики жидкостей и газов такие зоны получили название пограничными слоями, в механике твердого тела – областями краевого эффекта, в электрических приложениях – поверхностными, или скин-слоями.

Следовательно, во многих физических задачах, где резкие изменения зависимых переменных часто происходят внутри интересующих нас областей эти узкие зоны называются — ударными слоями (скачками уплотнения), точками перехода или стоксовскими линиями или поверхностями. Указанные быстрые изменения мы не можем исследовать с помощью обычных медленных масштабов; это приводит к необходимости вводить новые – быстрые, увеличенные или растянутые переменные [4]. Таким образом, исследование обыкновенных дифференциальных уравнений показали, что получить равномерно пригодные разложения в случаях, когда в некоторых областях изменения независимых переменных, где зависимые переменные испытывают резкие изменения обычными методами невозможно.

Один из методов, связанных с этой проблемой, заключается в построении прямых разложений (называемых внешними разложениями) с использованием исходных переменных и в построении разложений (называемых внутренними разложениями), описывающих эти резкие изменения и использующих увеличенные масштабы. Внешние разложения становятся непригодными в областях резких изменений, в то время как пригодность внутренних разложений нарушается при выходе из этих областей. Чтобы связать эти разложения, используют так называемую процедуру сращивания [4].

Внутренние и внешние асимптотические разложения обезразмеренной температуры представим как

$$t_e(y,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\varepsilon) t_{en}(y,\theta), \quad (f_0(\varepsilon) = 1), \tag{6}$$

$$t_e^*(\xi,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^*(\varepsilon) t_{en}^*(\xi,\theta), \tag{7}$$

где $\xi = \varepsilon y$ - «сжатая» радиальная координата [4].

При этом требуется, чтобы $f_{n+1}/f_n \to 0$, $f_{n+1}^*/f_n^* \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Недостающие граничные условия для внутреннего и внешнего разложений вытекают из условия тождественности продолжения асимптотических разложений того и другого в некоторую промежуточную область, т.е.

$$t_e(y \to \infty, \theta) = t_e^*(\xi \to 0, \theta)\,. \tag{8}$$

Асимптотическое разложение решения внутри частицы, как показывают граничные условия на поверхности частицы, следует искать в аналогичном виде

$$t_i(y,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\varepsilon) t_{in}(y,\theta). \tag{9}$$

Относительно функций $f_n^*(\varepsilon)$ и $f_n(\varepsilon)$ предполагается, что их порядок малости по ε увеличивается с ростом n.

С учетом сжатой радиальной координаты имеем следующее уравнение для температуры t_e^*

$$\frac{Pr_\infty}{t_e^*}\left(V_r^* \frac{\partial t_e^*}{\partial \xi} + \frac{V_\theta^*}{\xi}\frac{\partial t_e^*}{\partial \theta}\right) = \operatorname{div}\left(t_e^{*\alpha} \nabla t_e^*\right), \quad t_e^* \to 1 \ \text{ при } \ \xi \to \infty\,, \tag{10}$$

$$\mathbf{V}_\mathbf{e}^*(\xi,\theta) = \mathbf{n_z} + \varepsilon \mathbf{V}_\mathbf{e}^{(1)*}(\xi,\theta) + \ldots, \quad P_e^*(\xi,\theta) \to P_\infty \quad \xi \to \infty\,. \tag{11}$$

Здесь $t_e^* = t_e^*(\xi,\theta)$, $\mathbf{n_z}$ – единичный вектор в направлении оси z.

2. Поля температур в окрестности нагретой аэрозольной частицы. При нахождении распределений температур в окрестности аэрозольной частицы мы ограничимся поправками первого порядка малости по ε. Они определяются последовательно с учетом условия сращивания. Ввиду громоздкости полученных формул мы приведем нулевые и первые члены разложения в случае малых относительных перепадов температуры

$$t_e^*(\xi,\theta) = t_{e0}^* + \varepsilon t_{e1}^*, \quad t_e(y,\theta) = t_{e0} + \varepsilon t_{e1}, \quad t_i(y,\theta) = t_{i0} + \varepsilon t_{i1}, \quad t_{e0}(y) = 1 + \frac{\Gamma_0}{y}\,,$$

$$t_{e0}^* = 1, \quad t_{i0}(y) = B_0 + \frac{1}{4\pi R^2 T_{e\infty}\lambda_{e\infty} y^2}\int_V q_i\, dV + \int_1^y \frac{\psi_0}{y}\, dy - \frac{1}{y^2}\int_1^y \psi_0\, dy\,,$$

$$t_{e1}^*(\xi,\theta) = \frac{\Gamma_0}{\xi}\exp\left\{\frac{1}{2}\mathrm{Pr}_\infty \xi (x-1)\right\}, \quad t_{e1}(y,\theta) = \frac{\omega}{2y}(1-y) + \cos\left[\frac{\Gamma_0}{y^2} + \omega\left(\frac{1}{2} - \frac{A_1}{4y^3} + \frac{A_2}{2y}\right)\right],$$

$$t_{i1}(y,\theta) = \cos\left\{B_1 y + \frac{1}{4\pi R^2 T_{e\infty}\lambda_{e\infty} y^2}\int_V q_i\, z\, dV + \frac{1}{3}\left[y\int_1^y \frac{\psi_1}{y^2}\, dy - \frac{1}{y^2}\int_1^y \psi_1 y\, dy\right]\right\},$$

$$\psi_n(y) = -\frac{R^2 y^2}{\lambda_{i\infty} T_{e\infty}} \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} q_i \, P_n(\cos\theta) \, d(\cos\theta) \;\; (n \geq 0), \;\; x = \cos\theta, \;\; \omega = \Pr_\infty \Gamma_0 \, .$$

Постоянные интегрирования, входящие в выражения для полей температур определяются из граничных условий на поверхности частицы. Что же касается постоянных A_1, A_2 — они определяются из граничных условий для массовой скорости [2].

Заключение. Получены выражения для распределения температур вне и внутри аэрозольной частицы с учетом влияния движения среды (т.е. учтено влияние конвективного члена в уравнении теплопроводности) при произвольных относительных перепадах температуры в окрестности частицы. Поскольку частица нагрета, то при решении уравнений газовой динамики использовался степенной вид зависимости коэффициентов молекулярного переноса (вязкости и теплопроводности) и плотности газообразной среды от температуры. При нахождении полей температур вне и внутри аэрозольной частицы в случае значительных перепадов температуры предполагалось, что коэффциент теплопроводности частицы по величине много больше коэффициента теплопроводности газа, т.е. $\lambda_i \gg \lambda_e$. При выполнении этого условия в коэффициенте динамической вязкости $\mu_e(r,\theta)$ можно пренебречь зависимостью по углу θ в системе частица-газ и, считать, что $\mu_e(t_e) \approx \mu_e(t_{e0})$ (предполагалась слабая угловая асимметрия распределения температуры). Это позволило рассматривать гидродинамическую часть отдельно от тепловой части, а связь между ними осуществляется через граничные условия.

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред / М.: ГИТ-ТЛ, 1954. – 795 с.
2. Малай Н.В., Щукин Е.Р., Стукалов А.А., Рязанов К.С. К вопросу о гравитационном движении равномерно нагретой частицы в газообразной среде // ПМТФ. – 2008. – 49;1. – С.74-80.
3. Брюханов О.Н., Шевченко С.Н. Тепломассообмен / М.: Ассоциация строительных вузов, 2005. – 460 с.
4. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости / М.: Мир, 1967. – 310 с.
5. Бретшнайдер С. Свойства газов и жидкостей. Инженерные методы расчета / М.: Химия, 1966. – 536 с.

ON HEAT EXCHANGE BETWEEN SPHERICAL PARTICLE IN GASEOUS MEDIUM

N.V. Malay, S.I. Tsybulnikov

Belgorod State University,
Studencheskaya St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: e-mail: malay@bsu.edu.ru

Abstract. Approximated solution of the heat exchange between moving hard spherical particle at small Pecle's and Reynolds' numbers is obtained. The case when inhomogeneous distributed heat sources acted into particle is under consideration. The problem are solved by the method of joined asymptotic expansions on Reynolds' number powers when averaged temperature on the particle surface may be essentially differed from the temperature of surround gaseous medium.

Key words: temperature distribution, method of joined asymptotic expansions.