MSC 35G15

К НЕЛОКАЛЬНЫМ КРАЕВЫМ ЗАДАЧАМ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

М.Х. Бештоков

Кабардино-Балкарский государственный университет,
ул. Чернышевского, 173, Нальчик, 360004, Россия, e-mail: beshtokov_murat@rambler.ru

Аннотация. В работе рассматриваются нелокальные краевые задачи для псевдопараболических уравнений третьего порядка с переменными коэффициентами в одномерном и в многомерном случаях. С помощью метода функции Римана доказаны существование и единственность решения нелокальной краевой задачи в одномерном случае. Для решения нелокальных задач получены априорные оценки в дифференциальной и разностной трактовках. Из полученных оценок следуют единственность, устойчивость, а также сходимость решения разностной задачи к решению дифференциальной задачи.

Ключевые слова: краевые задачи, метод функции Римана, нелокальное условие, априорная оценка, разностная схема, устойчивость и сходимость разностных схем, уравнение в частных производных третьего порядка, псевдопараболическое уравнение.

Введение. Математическое моделирование многих процессов приводит к изучению нестандартных начально-краевых, прямых и обратных задач для уравнений в частных производных, не имеющих аналогов в классической математической физике. Хорошо известно, что вопросы фильтрации жидкости в пористых средах [1], [2], передачи тепла в гетерогенной среде [3], [4], влагопереноса в почво-грунтах [5], (см. [6, с. 137]) приводят к модифицированным уравнениям диффузии, которые являются псевдопараболическими уравнениями в частных производных третьего порядка. Краевые задачи для псевдопараболических уравнений третьего порядка изучались в работах [7-16].

В настоящей работе рассматриваются нелокальные краевые задачи для псевдопараболических уравнений третьего порядка с переменными коэффициентами в одномерном и в многомерном случаях. С помощью метода функции Римана доказаны существование и единственность решения нелокальной краевой задачи в одномерном случае(см. [7], [8], [13 -16]). Для решения нелокальных задач получены априорные оценки в дифференциальной и разностной трактовках. Из полученных оценок следуют единственность, устойчивость, а также сходимость решения разностной задачи к решению дифференциальной задачи.

1. Постановка задачи. Существование и единственность решения. В замкнутом цилиндре $\overline{Q}_T = \{(x,t) : 0 \le x \le l, 0 \le t \le T\}$ рассмотрим следующую нелокальную краевую задачу

$$u_t = (k(x,t)u_x)_x + (\eta(x,t)u_{xt})_x + r(x,t)u_x - q(x,t)u + f(x,t)\,, \quad 0 < x < l,\ 0 < t \le T, \tag{1.1}$$

$$\Pi(0,t)=\beta_1(t)\int_0^l u(x,t)dx+\int_0^t \rho(t,\tau)u(0,\tau)d\tau-\mu_1(t),\quad 0\le t\le T,\tag{1.2}$$

$$-\Pi(l,t)=\beta_2(t)u(l,t)-\mu_2(t),\quad 0\le t\le T,\tag{1.3}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad 0\le x\le l,\tag{1.4}$$

где

$$r(0,t)=r_0\le 0,\ r(l,t)=r_N\ge 0,\ 0<c_0\le\eta(x,t)\,,\quad k(x,t)\le c_1,$$
$$|\eta_t(x,t)|,\ |r(x,t)|,\ |q(x,t)|,\ |k_x|,\ |r_x|,\ |\beta_1(t)|,\ |\beta_2(t)|,\ |\rho(t,\tau)|\le c_2,\tag{1.5}$$

$$u\in C^{4,3}(Q_T),\ \eta\in C^{3,2}(Q_T),\ k\in C^{3,2}(Q_T),\quad r,q,f\in C^{2,2}(Q_T),\quad \beta_1(t),\ \beta_2(t)\in C[0,T],$$

$Q_T=\{(x,t):0<x<l,0<t<T\}$, $\Pi(x,t)=ku_x+\eta u_{xt}$, $0\le\tau\le t$, $u_0(x)\in C^2[0,l]$, $\rho(t,\tau)$ – функция, непрерывная на $[0,T]$, c_0,c_1,c_2 – положительные числа.

Заметим, что нелокальное условие (1.2) можно заменить условием

$$\Pi(0,t)=\beta_1(t)\int_0^\alpha u(x,t)dx+\int_0^t \rho(t,\tau)u(0,\tau)d\tau-\mu_1(t),$$

где α – глубина корнеобитаемого слоя (см. [17]) или активный слой почвы, который участвует в водоснабжении корневой системы, в процессах испарения и транспирации. Поставленные и исследованные в работе задачи характерны также тем, что содержат в краевых условиях нелокальность по времени, впервые изученную А.И. Кожановым [12].

По ходу изложения будем использовать положительные постоянные числа M_i, $i=1,2,...$, зависящие только от входных данных задачи (1.1)-(1.4). Имеет место следующая

Теорема. *Пусть коэффициенты уравнения (1.1) и граничных условий (1.2)-(1.4) удовлетворяют условиям гладкости (1.5). Тогда задача (1.1)-(1.4) имеет единственное регулярное в* $\overline{Q}_T$ *решение.*

□ Следуя [14,18], введем аналог функции Римана $\nu=\nu(x,t;\,\xi,\tau)$ для уравнения (1.1) в области $\Omega=\{(x,t):0<x<\xi,0<t<\tau\}$ в следующей форме

$$M\nu(x,t;\xi,\tau)=-(\eta(x,t)\nu_x)_{xt}+(k(x,t)\nu_x)_x-(r(x,t)\nu)_x+\nu_t-q(x,t)\nu=0,$$

$$\nu(\xi,t;\xi,\tau)=0,\tag{1.6}$$

$$\nu_x(\xi,t;\xi,\tau)=\frac{1}{\eta(\xi,\tau)}\exp\left\{\int_\tau^t\frac{k(\xi,t_1)}{\eta(\xi,t_1)}dt_1\right\},$$

$$\nu(x,\tau;\xi,\tau)=\omega_1(x,\tau),$$

где $\omega_1(x,\tau)$ – решение следующей задачи Коши

$$(\eta(x,\tau)\nu_x(x,\tau;\xi,\tau))_x - \nu(x,\tau;\xi,\tau) = 0,$$
$$\nu(\xi,\tau;\xi,\tau) = 0\,,$$
$$\nu_x(\xi,\tau;\xi,\tau) = \frac{1}{\eta(\xi,\tau)}\,.$$

Имеет место соотношение

$$\nu Lu - uM\nu = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x}\,, \tag{1.7}$$

где

$$Lu = (\eta u_{xt})_x + (ku_x)_x + ru_x - u_t - qu + f(x,t)\,,$$
$$Q = \eta\nu u_{xt} + u(\eta\nu_x)_t + k\nu u_x - k\nu_x u + ru\nu,$$
$$P = \eta\nu_x u_x + u\nu.$$

Пусть производные P_x, Q_t непрерывны в $\overline{Q}_T$, что влечет их ограниченность в этой области, а также непрерывность и ограниченность самих функций P, Q. В этих условиях проинтегрируем соотношение (1.7) по области $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < \xi, 0 < t < \tau\}$, где ξ, τ – произвольная точка области Q_T

$$\int_\Omega (\nu Lu - uM\nu)dxdt = \int_0^\xi \int_0^\tau \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x}\Big)dxdt. \tag{1.8}$$

Тогда из (1.8) получим представление

$$\begin{gathered}u(\xi,\tau) = u(0,\tau)\eta(0,\tau)\nu_x(0,\tau;\xi,\tau) - \int_0^\tau \Big(\eta(0,t)\nu(0,t;\xi,\tau)u_{xt}(0,t) + k(0,t)\nu(0,t;\xi,\tau)u_x(0,t) + \\ + u(0,t)\Big[\big(\eta(0,t)\nu_x(0,t;\xi,\tau)\big)_t - k(0,t)\nu_x(0,t;\xi,\tau) + r(0,t)\nu(0,t;\xi,\tau)\Big]\Big)dt + \\ + \int_0^\xi \Big(\eta(x,0)\nu_x(x,0;\xi,\tau)u_x(x,0) + \nu(x,0;\xi,\tau)u(x,0)\Big)dx + \int_0^\tau\int_0^\xi \nu(x,t;\xi,\tau)f(x,t)dxdt,\end{gathered} \tag{1.9}$$

где (ξ,τ) – произвольная фиксированная точка области Q_T. Существование и единственность аналога функции Римана доказаны в работе [14].

Проинтегрируем, далее, (1.9) по ξ от 0 до l. Тогда с учетом (1.2), (1.4) получим

$$\Pi(0,\tau) - u(0,\tau)\beta_1(\tau)\eta(0,\tau)\int_0^l \nu_x(0,\tau;\xi,\tau)d\xi + \int_0^\tau \Big(K_1(\tau,t)\Pi(0,t) + K_2(\tau,t)u(0,t)\Big)dt = \gamma_1(\tau), \tag{1.10}$$

где

$$K_1(\tau,t) = \beta_1(\tau)\int_0^l \nu(0,t;\xi,\tau)d\xi,$$

$$K_2(t,\tau) = \beta_1(\tau)\int_0^l \Big(\big(\eta(0,t)\nu_x(0,t;\xi,\tau)\big)_t - k(0,t)\nu_x(0,t;\xi,\tau) + r(0,t)\nu(0,t;\xi,\tau)\Big)d\xi - \rho(\tau,\tau),$$

$$\gamma_1(\tau) = \beta_1(\tau)\int_0^l\int_0^\xi \Big(\eta(x,0)\nu_x(x,0;\xi,\tau)u_0'(x) + \nu(x,0;\xi,\tau)u_0(x)\Big)dxd\xi +$$
$$+\beta_1(\tau)\int_0^l\int_0^\tau\int_0^\xi \nu(x,t;\xi,\tau)f(x,t)dxdtd\xi - \mu_1(\tau).$$

Из представления (1.9) при $\xi = l$ следует интегральное уравнение:

$$u(l,\tau) - u(0,\tau)\eta(0,\tau)\nu_x(0,\tau;l,\tau) + \int_0^\tau \Big(K_3(\tau,t)\Pi(0,t) + K_4(\tau,t)u(0,t)\Big)dt = \gamma_2(\tau), \quad (1.11)$$

где

$$K_3(\tau,t) = \nu(0,t;l,\tau)dp,$$

$$K_4(t,\tau) = \big(\eta(0,t)\nu_x(0,t;l,\tau)\big)_t - k(0,t)\nu_x(0,t;l,\tau) + r(0,t)\nu(0,t;l,\tau),$$

$$\gamma_2(\tau) = \int_0^l \Big(\eta(x,0)\nu_x(x,0;l,\tau)u_x(x,0) + \nu(x,0;l,\tau)u(x,0)\Big)dx + \int_0^\tau\int_0^l \nu(x,t;l,\tau)f(x,t)dxdt.$$

Точно также как и в [14], введем аналог функции Римана $w = w(x,t;\alpha,\tau)$ для уравнения (1.1) в области $\Omega = \{(x,t) : \alpha < x < l, 0 < t < \tau\}$ в следующей форме

$$Mw(x,t;\alpha,\tau) = -(\eta(x,t)w_x)_{xt} + (k(x,t)w_x)_x - (r(x,t)w)_x + w_t - q(x,t)w = 0,$$

$$w(\alpha,t;\alpha,\tau) = 0, \quad (1.12)$$

$$w_x(\alpha,t;\alpha,\tau) = \frac{1}{\eta(\alpha,\tau)}\exp\left\{\int\limits_\tau^t \frac{k(\alpha,t_1)}{\eta(\alpha,t_1)}dt_1\right\},$$

$$w(x,\tau;\alpha,\tau) = \omega_2(x,\tau),$$

где $\omega_2(x,\tau)$ – решение следующей задачи Коши

$$(\eta(x,\tau)w_x(x,\tau;\alpha,\tau))_x - w(x,\tau;\alpha,\tau) = 0,$$

$$w(\alpha,\tau;\alpha,\tau) = 0,$$

$$w_x(\alpha,\tau;\alpha,\tau)) = \frac{1}{\eta(\alpha,\tau)}.$$

Имеет место представление

$$u(\alpha,\tau) = u(l,\tau)\eta(l,\tau)w_x(l,\tau;\alpha,\tau) - \int_0^\tau \Big(\big(\eta(l,t)u_{xt}(l,t) + k(l,t)u_x(l,t)\big)w(l,t;\alpha,\tau) +$$

$$+ u(l,t)\Big[\big(\eta(l,t)w_x(l,t;\alpha,\tau)\big)_t - k(l,t)w_x(l,t;\alpha,\tau) + r(l,t)w(l,t;\alpha,\tau)\Big]\Big)dt - \quad (1.13)$$

$$-\int_0^l \Big(w(x,0;\alpha,\tau)u(x,0) + \eta(x,0)w_x(x,0;\alpha,\tau)u_x(x,0)\Big)dx - \int_0^\tau\int_0^l w(x,t;\alpha,\tau)f(x,t)dxdt,$$

где (α,τ) — произвольная фиксированная точка области Q_T.

Из представления (1.13) при $\alpha = 0$, с учетом условий (1.3), (1.4), получим интегральное уравнение:

$$u(0,\tau) - u(l,\tau)\eta(l,\tau)w_x(l,\tau;0,\tau) + \int_0^\tau \Big(K_7(\tau,t)u(l,t)\Big)dt = \gamma_3(\tau), \tag{1.14}$$

где

$$K_7(t,\tau) = \big(\eta(l,t)w_x(l,t;0,\tau)\big)_t - k(l,t)w_x(l,t;0,\tau) + r(l,t)w(l,t;0,\tau) - \beta_2(\tau)w(l,t;0,\tau),$$

$$\gamma_3(\tau) = -\int_0^l \Big(w(x,0;0,\tau)u_0(x) + \eta(x,0)w_x(x,0;0,\tau)u_0'(x)\Big)dx -$$
$$-\int_0^\tau\int_0^l w(x,t;0,\tau)f(x,t)dxdt - \int_0^\tau K_7(t,\tau)\mu_2(t)dt.$$

Систему интегральных уравнений (1.10), (1.11), (1.14) перепишем в операторном виде

$$A(\tau)\vec{u}(\tau) + \int_0^\tau B(\tau,t)\vec{u}(t)dt = \vec{\gamma}(\tau), \tag{1.15}$$

где

$$\det|A(\tau)| = \eta(0,\tau)\nu_x(0,\tau;l,\tau)\eta(l,\tau)w_x(l,\tau;0,\tau) - 1.$$

Отличие определителя $\det|A(\tau)|$ от нуля при $0 \le \tau \le T$ следует из доказываемой ниже леммы. Поэтому система уравнений (1.10), (1.11), (1.14) является системой интегральных уравнений Вольтерра второго рода, которая безусловно разрешима. Таким образом, находя из интегральных уравнений Вольтерра $u(0,\tau) = f(\tau)$, $u(l,\tau) = \varphi(\tau)$, где $f(\tau)$, $\varphi(\tau) \in C^1[0,T]$ задачу (1.1)-(1.4) редуцируем к первой начально-краевой задаче, однозначная разрешимость которой установлена также в работе [14]. Отсюда следуют существование и единственность решения задачи (1.1)-(1.4). ■

Имеет место следующая

Лемма. *Функция $\nu(x,t;\xi,\tau)$ и $w(x,t;\alpha,\tau)$ удовлетворяют неравенствам:*

$$\nu(x,\tau;l,\tau) < 0, \quad \text{для любого} \;\; x \in [0,l), \quad \eta(0,\tau)\nu_x(0,\tau;l,\tau) > 1\,,$$

$$w(x,\tau;0,\tau) > 0, \quad \text{для любого} \;\; x \in (0,l], \quad \eta(l,\tau)w_x(l,\tau;0,\tau) > 1\,,$$

если только $\eta(x,t) \ge c_0 > 0$ для любого $(x,t) \in Q_T$.

□ Следуя рассуждениям [14], рассмотрим задачу

$$(\eta(x,\tau)\nu_x(x,\tau;\xi,\tau))_x - \nu(x,\tau;\xi,\tau) = 0,$$
$$\nu(\xi,\tau;\xi,\tau) = 0, \tag{1.16}$$
$$\nu_x(\xi,\tau;\xi,\tau) = \frac{1}{\eta(\xi,\tau)}\,.$$

С помощью принципа максимума и принципа Зарембa-Жиро из (1.16) получаем $\nu(x,\tau;l,\tau) < 0$ для любого $(x,t) \in [0,l)$. Тогда из равенства

$$\eta(0,\tau)\nu_x(0,\tau;l,\tau) = \eta(l,\tau)\nu_x(l,\tau;l,\tau) - \int_0^l \nu(x,\tau;l,\tau)dx$$

имеем, что $\eta(0,\tau)\nu_x(0,\tau;l,\tau) > 1$. Аналогично получаем, что $\eta(l,\tau)w_x(l,\tau;0,\tau) > 1$. ■

2. Априорная оценка в дифференциальной трактовке. В замкнутом цилиндре $\overline{Q}_T$, получим априорную оценку для решения задачи (1.1) – (1.4). Для получения априорной оценки воспользуемся методом энергетических неравенств. Умножим уравнение (1.1) скалярно на u:

$$\big(u_t,u\big) = \big((ku_x)_x,u\big) + \big((\eta u_{xt})_x,u\big) + \big(r(x,t)u_x,u\big) - \big(q(x,t)u,u\big) + \big(f(x,t),u\big), \tag{2.1}$$

где $\big(u,v\big) = \displaystyle\int_0^l uv dx, \quad \|u\|_0^2 = (u,u)$.

Пользуясь неравенством Коши с ε, из (2.1) получим

$$\frac{d}{dt}\|u\|_0^2 + \frac{d}{dt}\int_0^l \eta u_x^2 dx + 2\int_0^l k(x,t)u_x^2 dx \le$$

$$\le 2\Big(\Pi(l,t)u(l,t) - \Pi(0,t)u(0,t)\Big) + 3c_2\|u_x\|_0^2 + (3c_2+1)\|u\|_0^2 + \|f\|_0^2. \tag{2.2}$$

Имеет место оценка (см.[19, стр.124]):

$$u^2(l,t) \le \varepsilon\|u_x\|_0^2 + c_\varepsilon\|u\|_0^2, \tag{2.3}$$

где $\varepsilon > 0, \quad c_\varepsilon = \dfrac{1}{\varepsilon} + \dfrac{1}{l}$.

Первое и второе слагаемые в правой части неравенства (2.2), пользуясь неравенством Коши с ε и граничными условиями (1.3) и (1.4), оценим так:

$$\Pi(l,t)u(l,t) - \Pi(0,t)u(0,t) = -u(l,t)\Big(\beta_2(t)u(l,t) - \mu_2(t)\Big) -$$

$$- u(0,t)\Big(\beta_1(t)\int_0^l u(x,t)dx + \int_0^t \rho(t,\tau)u(0,\tau)d\tau - \mu_1(t)\Big) \le M_1\Big[u^2(l,t) + u^2(0,t) +$$

$$+ \Big(\beta_1(t)\int_0^l u(x,t)dx\Big)^2\Big] + \frac{1}{2}\Big(\mu_1^2(t) + \mu_2^2(t)\Big) + M_2\int_0^t u^2(0,\tau)d\tau. \tag{2.4}$$

Из (2.4), пользуясь (2.3) и неравенством Буняковского, получим

$$\Pi(l,t)u(l,t) - \Pi(0,t)u(0,t) \le$$

$$\le M_3\Big(\|u_x\|_0^2 + \|u\|_0^2\Big) + M_4\int_0^t \Big(\|u_x\|_0^2 + \|u\|_0^2\Big)d\tau + \frac{1}{2}\Big(\mu_1^2(t) + \mu_2^2(t)\Big). \tag{2.5}$$

Учитывая (2.5), из (2.2) находим

$$\frac{d}{dt}\|u\|_0^2+\frac{d}{dt}\int_0^l \eta u_x^2dx+c_0\|u_x\|_{2,Q_t}^2\leq M_5\Big(\|u_x\|_0^2+\|u\|_0^2\Big)+$$

$$+2M_4\int_0^t\Big(\|u_x\|_0^2+\|u\|_0^2\Big)d\tau+\mu_1^2(t)+\mu_2^2(t)+\|f\|_0^2. \tag{2.6}$$

Проинтегрируем (2.6) по τ от 0 до t, тогда получим

$$\|u\|_0^2+\|u_x\|_0^2+\|u_x\|_{2,Q_t}^2\leq M_6\int_0^t\Big(\|u_x\|_0^2+\|u\|_0^2\Big)d\tau+M_7\int_0^t\int_0^\tau\Big(\|u_x\|_0^2+\|u\|_0^2\Big)d\tau_1 d\tau+$$

$$+M_8\bigg(\int_0^t\Big(\|f\|_0^2+\mu_1^2(\tau)+\mu_2^2(\tau)\Big)d\tau+\|u_0(x)\|_0^2+\|u_0'(x)\|_0^2\bigg), \tag{2.7}$$

где

$$\|u_x\|_{2,Q_t}^2=\int_0^t\|u_x\|_0^2d\tau.$$

Второе слагаемое в правой части (2.7) оценим следующим образом:

$$\int_0^t\int_0^\tau\Big(\|u_x\|_0^2+\|u\|_0^2\Big)d\tau_1d\tau\leq T\int_0^t\Big(\|u_x\|_0^2+\|u\|_0^2\Big)d\tau. \tag{2.8}$$

В силу (2.8) из (2.7) находим

$$\|u\|_0^2+\|u_x\|_0^2\leq M_9\int_0^t\Big(\|u_x\|_0^2+\|u\|_0^2\Big)d\tau+$$

$$+M_8\bigg(\int_0^t\Big(\|f\|_0^2+\mu_1^2(\tau)+\mu_2^2(\tau)\Big)d\tau+\|u_0(x)\|_0^2+\|u_0'(x)\|_0^2\bigg). \tag{2.9}$$

Применяя к неравенству (2.9) лемму Гронуолла (см.[19, стр.152]), из (2.7) с учетом (2.8) получим

$$\|u\|_{W_2^1(0,l)}^2+\|u_x\|_{2,Q_t}^2\leq M(t)\bigg(\int_0^t\Big(\|f\|_0^2+\mu_1^2(\tau)+\mu_2^2(\tau)\Big)d\tau+\|u_0(x)\|_{W_2^1(0,l)}^2\bigg), \tag{2.10}$$

где $M(t)$ зависит только от входных данных задачи (1.1)–(1.4).

Из априорной оценки (2.10) следует единственность решения исходной задачи (1.1)–(1.4), а также непрерывная зависимость решения задачи от входных данных на каждом временном слое в норме пространства $W_2^1(0,l)$.

3. Устойчивость и сходимость разностной схемы. Для решения задачи (1.1)–(1.4) применим метод конечных разностей. Для этого в замкнутом цилиндре $\overline{Q}_T$ введем равномерную сетку [20]:

$$\overline{\omega}_{h\tau}=\overline{\omega}_h\times\overline{\omega}_\tau=\{(x_i,t_j),\ x\in\overline{\omega}_h,\ t\in\overline{\omega}_\tau\},$$

$$\overline{\omega}_h = \{x_i = ih,\ i = 0, 1, ..., N,\ Nh = l\},$$

$$\overline{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau,\ j = 0, 1, ..., m,\ m\tau = T\}.$$

На сетке $\overline{\omega}_{h\tau}$ дифференциальной задаче (1.1)–(1.4) поставим в соответствие разностную схему:

$$y_{t,i} = \widetilde{\Lambda}(\overline{t})y_i^{(\sigma)} + \delta y + \varphi_i, \quad (x,t) \in \omega_{h\tau}, \tag{3.1}$$

$$a_1\chi_0 y_{x,0}^{(\sigma)} + \gamma_1 y_{xt,0} = \beta_1 \sum_{\overline{s}=0}^{N} y_{\overline{s}}^{(\sigma)}\hbar + \sum_{s=0}^{j} \overline{\tau}\rho_{s,j} y_{s,0}^{(\sigma)} - \mu_1 + \frac{h}{2}\Big(y_{t,0} + d_0 y_0^{(\sigma)} - \varphi_0\Big),\ t \in \overline{\omega}_\tau, \tag{3.2}$$

$$-\Big(a_N\chi_N y_{\overline{x},N}^{(\sigma)} + \gamma_N y_{\overline{x}t,N}\Big) = \beta_2 y_N^{(\sigma)} - \mu_2 + \frac{h}{2}\Big(y_{t,N} + d_N y_N^{(\sigma)} - \varphi_N\Big),\ t \in \overline{\omega}_\tau \tag{3.3}$$

$$y(x,0) = u_0(x),\ x \in \overline{\omega}_h, \tag{3.4}$$

где

$$\widetilde{\Lambda}(\overline{t})y_i^{(\sigma)} = \chi_i\big(ay_{\overline{x}}^{(\sigma)}\big)_{x,i} + b_i^+ a_{i+1} y_{x,i}^{(\sigma)} + b_i^- a_i y_{\overline{x},i}^{(\sigma)} - d_i y_i^{(\sigma)},$$

$$\delta y = \big(\gamma y_{\overline{x}t}\big)_{x,i},\ y^{(\sigma)} = \sigma\hat{y} + (1-\sigma)y,\ y = y_i^j = y(x_i, t_j),\ r = r^+ + r^-,\ b^\pm = \frac{r^\pm}{k} + O(h^2),$$

$$|r| = r^+ - r^-,\ r^+ = (r + |r|)/2 \geq 0,\ r^- = (r - |r|)/2 \leq 0,$$

$$a_i = k(x_{i-1/2}, \overline{t}), \quad \gamma_i = \eta(x_{i-1/2}, \overline{t}), \quad d_i = q(x_i, \overline{t}), \quad \varphi_i = f(x_i, \overline{t}),$$

$$\overline{t} = t_{j+1/2} = t_j + \tau/2, \quad x_{i-1/2} = x_i - h/2\,, \quad h,\ \tau - \text{шаги сетки.}$$

$$\chi = (1+R)^{-1}\ , \quad R = \frac{h|r|}{2k} - \text{разностное число Рейнольдса,}$$

$$\chi_0 = \frac{1}{1 + \dfrac{h|r_0|}{2k_{1/2}}}\ , \ \text{если}\ \ r_0 \leq 0, \quad \chi_N = \frac{1}{1 + \dfrac{h|r_N|}{2k_{N-1/2}}},\ \ \text{если}\ \ r_N \geq 0,$$

$$\overline{\tau} = \begin{cases} \dfrac{\tau}{2}\ , \text{если}\ s = 0,\ s = j, \\ \tau\ ,\ \text{если}\ s = \overline{1, j-1}. \end{cases} \qquad \hbar = \begin{cases} \dfrac{h}{2}\ ,\ \text{если}\ \overline{s} = 0,\ \overline{s} = N, \\ h\ ,\ \text{если}\ \overline{s} = \overline{1, N-1}. \end{cases}$$

Для получения априорной оценки воспользуемся методом энергетических неравенств. Тогда задачу (3.1)-(3.4) перепишем в другой форме

$$y_{t,i} = \chi_i\big(ay_{\overline{x}}^{(\sigma)}\big)_{x,i} + \big(\gamma y_{\overline{x}t}\big)_{x,i} + b_i^+ a_{i+1} y_{x,i}^{(\sigma)} + b_i^- a_i y_{\overline{x},i}^{(\sigma)} - d_i y_i^{(\sigma)} + \varphi_i\,, \tag{3.5}$$

$$y_{t,0} = \frac{a_1\chi_0 y_{x,0}^{(\sigma)} - hd_0 y_0^{(\sigma)}/2 - \beta_1 \sum\limits_{\overline{s}=0}^{N} y_{\overline{s}}^{(\sigma)}\hbar - \sum\limits_{s=0}^{j} \overline{\tau}\rho_{s,j} y_{s,0}^{(\sigma)} + \mu_1}{h/2} + \frac{\gamma_1 y_{xt,0}}{h/2}\ , \tag{3.6}$$

$$y_{t,N} = \frac{-a_N\chi_N y^{(\sigma)}_{\bar{x},N} - hd_N y^{(\sigma)}_N/2 - \beta_2 y^{(\sigma)}_N + \mu_2}{h/2} - \frac{\gamma_N y_{\bar{x}t,N}}{h/2}\,, \tag{3.7}$$

$$y(x,0) = u_0(x). \tag{3.8}$$

Полагая $\sigma = 1/2$ и обозначая $\check{y} + y = Y$, перепишем задачу (3.5)-(3.8)

$$y_t = \widetilde{\Lambda}^*(\bar{t})Y/2 + \bar{\delta} y + \Phi\,, \tag{3.9}$$

$$y(x,0) = u_0(x), \tag{3.10}$$

где

$$\widetilde{\Lambda}^*(\bar{t})Y = \begin{cases} \widetilde{\Lambda}Y = \chi_i\big(aY_{\bar{x}}\big)_{x,i} + b_i^+ a_{i+1}Y_{x,i} + b_i^- a_i Y_{\bar{x},i} - d_i Y_i\,, & \text{при} \quad x \in \omega_h, \\ \Lambda^- Y = \dfrac{a_1\chi_0 Y_{x,0} - hd_0 Y_0/2 - \beta_1 \sum\limits_{\bar{s}=0}^{N} y^{(\sigma)}_{\bar{s}}\bar{h} - \sum\limits_{s=0}^{j} \bar{\tau}\rho_{s,j} Y_{s,0}}{h/2}\,, & \text{при} \quad x = 0, \\ \Lambda^+ Y = \dfrac{-a_N\chi_N Y_{\bar{x},N} - hd_N Y_N/2 - \beta_2 Y_N}{h/2}\,, & \text{при} \quad x = l, \end{cases}$$

$$\bar{\delta} y = \begin{cases} \delta y = \big(\gamma y_{\bar{x}t}\big)_{x,i}\,, & \text{при } x \in \omega_h\,, \\ \delta^- y = \dfrac{\gamma_1 y_{xt,0}}{h/2}\,, & \text{при } x = 0\,, \\ \delta^+ y = -\dfrac{\gamma_N y_{\bar{x}t,N}}{h/2}\,, & \text{при } x = l\,; \end{cases} \qquad \Phi = \begin{cases} \varphi = \varphi_i\,, & \text{при } x \in \omega_h\,, \\ \varphi^- = \dfrac{\mu_1}{h/2}\,, & \text{при } x = 0\,, \\ \varphi^+ = \dfrac{\mu_2}{h/2}\,, & \text{при } x = l\,; \end{cases}$$

$$\bar{\chi} = \begin{cases} \chi = \left(1 + \dfrac{h|r|}{2k}\right)^{-1}, & \text{при } x \in \omega_h, \\ \chi^- = \left(1 + \dfrac{h|r_0|}{2k_{1/2}}\right)^{-1}, & \text{при } x = 0, \quad r_0 \le 0, \\ \chi^+ = \left(1 + \dfrac{h|r_N|}{2k_{N-1/2}}\right)^{-1}, & \text{при } x = l, \quad r_N \ge 0. \end{cases}$$

Введем скалярное произведение

$$[u,v] = \sum_{i=0}^{N} u_i v_i \bar{h}, \quad \bar{h} = \begin{cases} \dfrac{h}{2}, & i = 0, \ i = N, \\ h, & i = \overline{1, N-1}, \end{cases}$$

и норму

$$|[u]|^2 = [u,u], \quad \|u]|^2 = \sum_{i=1}^{N} u_i^2 h = (u,u].$$

Умножим теперь разностное уравнение (3.9) скалярно на $Y = \hat{y} + y$:

$$\left[y_t, Y\right] = \frac{1}{2}\left[\widetilde{\Lambda}^*(\bar{t})Y, Y\right] + \left[\bar{\delta}y, Y\right] + \left[\Phi, Y\right]. \tag{3.11}$$

Преобразуем суммы, входящие в (3.11):

$$\left[y_t, Y\right] = \left[\frac{1}{\tau}(\hat{y} - y), (\hat{y} + y)\right] = \frac{\left[1, \hat{y}^2\right] - \left[1, y^2\right]}{\tau} = \left[1, y^2\right]_t, \tag{3.12}$$

$$\left[\widetilde{\Lambda}^*(\bar{t})Y, Y\right] = \left(\widetilde{\Lambda}Y, Y\right) + \frac{1}{2}hY_0\Lambda^-Y_0 + \frac{1}{2}hY_N\Lambda^+Y_N =$$
$$= -(a\chi, Y_{\bar{x}}^2] - (aY, \chi_{\bar{x}}Y_{\bar{x}}) + (b^+a^{+1}Y_x, Y) + (b^-aY_{\bar{x}}, Y) -$$
$$- \left[d, Y^2\right] - \beta_1 Y_0 \sum_{\bar{s}=0}^{N} Y_{\bar{s}}\bar{h} - \beta_2 Y_N^2 - Y_0 \sum_{s=0}^{j} \bar{\tau}\rho_{s,j}Y_0^s\,, \tag{3.13}$$

$$\left[\bar{\delta}y, Y\right] = (\delta y, Y) + \frac{1}{2}hY_0\delta^-y + \frac{1}{2}hY_N\delta^+y = -\left(\gamma y_{\bar{x}t}, Y_{\bar{x}}\right], \tag{3.14}$$

$$\left[\Phi, Y\right] = (\varphi, Y) + \frac{1}{2}h\varphi^-Y_0 + \frac{1}{2}h\varphi^+Y_N = (\varphi, Y) + \mu_1 Y_0 + \mu_2 Y_N\,. \tag{3.15}$$

Учитывая (3.12)-(3.15), из (3.11) находим

$$\left[1, y^2\right]_t = -\frac{1}{2}(a\chi, Y_{\bar{x}}^2] - \left(\gamma y_{\bar{x}t}, Y_{\bar{x}}\right] - \frac{1}{2}(a\chi_{\bar{x}}Y, Y_{\bar{x}}) + \frac{1}{2}(b^+a^{+1}Y_x, Y) + \frac{1}{2}(b^-aY_{\bar{x}}, Y) - \frac{1}{2}[d, Y^2] -$$
$$-\frac{1}{2}\beta_1 Y_0 \sum_{\bar{s}=0}^{N} Y_{\bar{s}}\bar{h} - \frac{1}{2}\beta_2 Y_N^2 - \frac{1}{2}Y_0 \sum_{s=0}^{j} \bar{\tau}\rho_{s,j}Y_0^s + (\varphi, Y) + \mu_1 Y_0 + \mu_2 Y_N. \tag{3.16}$$

Оценим суммы, входящие в (3.16):

$$[1, y^2]_t = \left(||y]|^2\right)_t, \tag{3.17}$$

$$(a\chi, Y_{\bar{x}}^2] \geq M_1(1, Y_{\bar{x}}^2] = M_1\|Y_{\bar{x}}]|^2, \tag{3.18}$$

$$(\gamma y_{\bar{x}t}, Y_{\bar{x}}] = (1, \gamma(y_{\bar{x}}^2)_t] = (1, (\gamma y_{\bar{x}}^2)_t] - (1, \gamma_t \hat{y}_{\bar{x}}^2], \tag{3.19}$$

$$-(a\chi_{\bar{x}}Y, Y_{\bar{x}}) + (b^+a^{+1}Y, Y_x) + (b^-aY, Y_{\bar{x}}) \leq M_2\|Y_{\bar{x}}]|\,|[Y]| \leq M_3\left(\|Y_{\bar{x}}]|^2 + |[Y]|^2\right), \tag{3.20}$$

$$-[d, Y^2] \leq c_1[1, Y^2] = c_1|[Y]|^2, \tag{3.21}$$

$$[\varphi, Y] \leq \frac{1}{2}\left(|[Y]|^2 + |[\varphi]|^2\right). \tag{3.22}$$

Справедлива следующая [21]

Лемма. *Для любой функции $y(x)$, заданной на сетке $\overline{\omega}_h$, справедливо неравенство*

$$\max_{x\in\overline{\omega}_h} y^2(x) \leq \varepsilon\|y_{\overline{x}}]|^2 + \left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{l}\right)|[y]|^2,$$

где ε – произвольная положительная постоянная, l – длина интервала, на котором введена сетка $\overline{\omega}_h$.

С помощью этой леммы и неравенства Коши получаем оценку

$$-\beta_1 Y_0 \sum_{\overline{s}=0}^{N} Y_{\overline{s}}\overline{h} - \beta_2 Y_N^2 - Y_0\sum_{s=0}^{j}\overline{\tau}\rho_{js}Y_0^s + \mu_1 Y_0 + \mu_2 Y_N \leq$$

$$\leq \frac{\mu_1^2}{2}+\frac{\mu_2^2}{2} + M_4\Big(\|Y_{\overline{x}}]|^2 + |[Y]|^2\Big) + M_5\sum_{s=0}^{j}\Big(\|Y_{\overline{x}}]|^2 + |[Y]|^2\Big)\overline{\tau}. \tag{3.23}$$

Учитывая оценки (3.17)-(3.23), из (3.16) находим:

$$\Big(|[y]|^2\Big)_t + (1,(\gamma y_{\overline{x}}^2)_t] + M_1\|Y_{\overline{x}}]|^2 \leq c_1||y_x^{j+1}]|^2 + M_6\Big(|[Y]|^2 + \|Y_{\overline{x}}]|^2\Big) +$$

$$+ M_5\sum_{s=0}^{j}\Big(|[Y]|^2 + \|Y_{\overline{x}}]|^2\Big)\overline{\tau} + M_7\Big(|[\varphi]|^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2\Big). \tag{3.24}$$

Умножим обе части (3.24) на τ и просуммируем по j' от 0 до j :

$$||[y^{j+1}]|^2 + \|y_{\overline{x}}^{j+1}]|^2 + \sum_{j'=0}^{j}\|Y_{\overline{x}}^{j'}]|^2\tau \leq M_8\sum_{j'=0}^{j}\Big(|[Y^{j'}]|^2 + \|Y_{\overline{x}}^{j'}]|^2\Big)\tau +$$

$$+M_9\Big(||y_x^{j+1}]|^2 + \sum_{j'=0}^{j}\sum_{s=0}^{j}\Big(|[Y^{j'}]|^2 + \|Y_{\overline{x}}^{j'}]|^2\Big)\overline{\tau}\tau\Big) +$$

$$+M_{10}\Big(\sum_{j'=0}^{j}\Big(|[\varphi]|^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2\Big)\tau + |[y^0]|^2 + \|y_{\overline{x}}^0]|^2\Big). \tag{3.25}$$

Обозначая $F(t_j) = M_{10}\Big(\sum\limits_{j'=0}^{j}\Big(|[\varphi]|^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2\Big)\tau + |[y^0]|^2 + \|y_{\overline{x}}^0]|^2\Big)$, из (3.25) получим

$$||[y^{j+1}]|^2 + \|y_{\overline{x}}^{j+1}]|^2\tau + \sum_{j'=0}^{j}\|Y_{\overline{x}}^{j'}]|^2\tau \leq M_8\sum_{j'=0}^{j}\Big(|[Y^{j'}]|^2 + \|Y_{\overline{x}}^{j'}]|^2\Big)\tau +$$

$$+M_9\Big(||y_x^{j+1}]|^2 + \sum_{j'=0}^{j}\sum_{s=0}^{j}\Big(|[Y^{j'}]|^2 + \|Y_{\overline{x}}^{j'}]|^2\Big)\overline{\tau}\tau\Big) + F(t_j). \tag{3.26}$$

Второе выражение в правой части (3.26) преобразуем следующим образом

$$\sum_{j'=0}^{j}\sum_{s=0}^{j}\left(|[Y^{j'}]|^2+\|Y_{\overline{x}}^{j'}]|^2\right)\overline{\tau}\tau \le T\sum_{j'=0}^{j}\left(|[Y^{j'}]|^2+\|Y_{\overline{x}}^{j'}]|^2\right)\tau. \tag{3.27}$$

В силу (3.27) из (3.26) находим

$$|[y^{j+1}]|^2+\|y_{\overline{x}}^{j+1}]|^2+\sum_{j'=0}^{j}\|Y_{\overline{x}}^{j'}]|^2\tau \le M_{11}\left(||y_x^{j+1}]|^2+\sum_{j'=0}^{j}\left(|[Y^{j'}]|^2+\|Y_{\overline{x}}^{j'}]|^2\right)\tau\right)+F(t_j). \tag{3.28}$$

Учитывая неравенство $|[y^{j'+1}+y^{j'}]|^2 \le 2|[y^{j'+1}]|^2+2|[y^{j'}]|^2$, преобразуем сумму $||y_x^{j+1}]|^2+\sum\limits_{j'=0}^{j}\left(|[Y^{j'}]|^2+\|Y_{\overline{x}}^{j'}]|^2\right)\tau$. Тогда

$$||y_x^{j+1}]|^2+\sum_{j'=0}^{j}\left(|[Y^{j'}]|^2+\|Y_{\overline{x}}^{j'}]|^2\right)\tau=||y_x^{j+1}]|^2+\sum_{j'=0}^{j}\left(|[y^{j'+1}+y^{j'}]|^2+\|y_{\overline{x}}^{j'+1}+y_{\overline{x}}^{j'}]|^2\right)\tau \le$$

$$\le M_{12}\left(|[y^{j+1}]|^2+\|y_{\overline{x}}^{j+1}]|^2\right)\tau+M_{13}\sum_{j'=1}^{j}\left(|[y^{j'}]|^2+\|y_{\overline{x}}^{j'}]|^2\right)\tau+M_{14}\left(|[y^{0}]|^2+\|y_{\overline{x}}^{0}]|^2\right)\tau. \tag{3.29}$$

Подставляя (3.29) в (3.28), получим

$$|[y^{j+1}]|^2+\|y_{\overline{x}}^{j+1}]|^2+\sum_{j'=0}^{j}\|\left(y^{j'+1}+y^{j'}\right)_{\overline{x}}]|^2\tau \le$$

$$\le M_{15}\left(|[y^{j+1}]|^2+\|y_{\overline{x}}^{j+1}]|^2\right)\tau+M_{16}\sum_{j'=1}^{j}\left(|[y^{j'}]|^2+\|y_{\overline{x}}^{j'}]|^2\right)\tau+\widetilde{F}(t_j). \tag{3.30}$$

Выбирая τ таким образом, что для всех $\tau \le \tau_0, \tau_0=M_{15}^{-1}$ и обозначая через $\widetilde{F}(t_j)=M_{17}\Big(\sum\limits_{j'=0}^{j}\left(|[\varphi^{j'}]|^2+\mu_1^{j'\,2}+\mu_2^{j'\,2}\right)\tau+|[y^0]|^2+\|y_{\overline{x}}^0]|^2\Big)$, из (3.30) получим

$$|[y^{j+1}]|^2+\|y_{\overline{x}}^{j+1}]|^2 \le M_{18}\sum_{j'=1}^{j}\left(|[y^{j'}]|^2+||y_{\overline{x}}^{j'}]|^2\right)\tau+M_{19}\widetilde{F}(t_j). \tag{3.31}$$

Оценивая первое слагаемое в правой части (3.31) с помощью Леммы 4 [22, стр. 171], из (3.28) с учетом (3.29), (3.30) получим априорную оценку

$$|[y^{j+1}]|^2_{W_2^1(0,l)}+\sum_{j'=0}^{j}\|\left(y^{j'+1}+y^{j'}\right)_{\overline{x}}]|^2\tau \le M\Big(\sum_{j'=0}^{j}\left(|[\varphi^{j'}]|^2+\mu_1^{j'\,2}+\mu_2^{j'\,2}\right)\tau+|[y^0]|^2_{W_2^1(0,l)}\Big), \tag{3.32}$$

где M – положительная постоянная, не зависящая от h и τ. Из полученной априорной оценки следует следующая

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (1.5), тогда при $\sigma = 1/2$ существует такое τ_0, что если $\tau \leq \tau_0$, для решения разностной задачи (3.9)-(3.10) справедлива априорная оценка*

$$||[y^{j+1}]|^2_{W_2^1(0,l)} + \sum_{j'=0}^{j} \|\left(y^{j'+1} + y^{j'}\right)_{\overline{x}}]|^2\tau \leq M\left(\sum_{j'=0}^{j}\left(|[\varphi^{j'}]|^2 + \mu_1^{j'2} + \mu_2^{j'2}\right)\tau + |[y^0]|^2_{W_2^1(0,l)}\right)$$

где M – положительная постоянная, не зависящая от h и τ.

Таким образом, доказана устойчивость решения разностной задачи (3.9)-(3.10) по начальным данным и правой части в сеточной норме $|[y^{j+1}]|^2_{W_2^1(0,l)}$ на слое.

Пусть $u(x,t)$ – решение задачи (3.1)-(3.4), y_i^j – решение разностной задачи (3.5) – (3.8), тогда обозначим через $z = y - u$ погрешность. Подставляя $y = z + u$ в (3.5)-(3.8) и считая $u(x,t)$ заданной функцией, получим задачу для z:

$$z_{t,i} = \chi_i\left(az_{\overline{x}}^{(\sigma)}\right)_{x,i} + \left(\gamma z_{\overline{x}t}\right)_{x,i} + b_i^+ a_{i+1} z_{x,i}^{(\sigma)} + b_i^- a_i z_{\overline{x},i}^{(\sigma)} - d_i z_i^{(\sigma)} + \psi_i, \tag{3.33}$$

$$a_1\chi_0 z_{x,0}^{(\sigma)} + \gamma_1 z_{xt,0} = \beta_1 \sum_{\overline{s}=0}^{N} z_{\overline{s}}^{(\sigma)}\overline{h} + \sum_{s=0}^{j}\overline{\tau}\rho_{s,j} z_{s,0}^{(\sigma)} + \frac{h}{2}\left(z_{t,0} + d_0 z_0^{(\sigma)}\right) - \nu_1, \tag{3.34}$$

$$-\left(a_N\chi_N z_{\overline{x},N}^{(\sigma)} + \gamma_N z_{\overline{x}t,N}\right) = \beta_2 z_N^{(\sigma)} + \frac{h}{2}\left(z_{t,N} + d_N z_N^{(\sigma)}\right) - \nu_2, \tag{3.35}$$

$$z(x,0) = 0, \tag{3.36}$$

$\psi_i = O(h^2 + \tau^2)$, $\nu_1 = O(h^2 + \tau^2)$, $\nu_2 = O(h^2 + \tau^2)$ – погрешности аппроксимации на решении исходной задачи при каждом фиксированном t, в силу построения оператора $\tilde{\Lambda}$ при $\sigma = 1/2$.

Применяя априорную оценку (3.32) к задаче для погрешности, при $\sigma = 1/2$ получим оценку

$$|[z^{j+1}]|^2 + \|z_{\overline{x}}^{j+1}]|^2 + \sum_{j'=0}^{j} \|\left(z^{j'+1} + z^{j'}\right)_{\overline{x}}]|^2\tau \leq M\sum_{j'=0}^{j}\left(|[\Psi^{j'}]|^2 + \nu_1^{j'2} + \nu_2^{j'2}\right)\tau,$$

где – положительная постоянная, не зависящая от h и τ.

Из полученной априорной оценки следует сходимость схемы (3.33)-(3.36) при $\sigma = 1/2$ со скоростью $O(h^2 + \tau^2)$ на слое.

4. Априорная оценка решения задачи в многомерной области. В замкнутом цилиндре $\overline{Q}_T = \overline{G} \times [0 \leq t \leq T]$, основанием которого является p-мерный прямоугольный параллелепипед $\overline{G} = \{x = (x_1, ..., x_p) : \ 0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \ \alpha = 1, 2, ..., p\}$ с границей Γ, $\overline{G} = G \cup \Gamma$ рассматривается нелокальная краевая задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{4.1}$$

$$\Pi_\alpha(x,t)=\beta_{-\alpha}(x,t)\int_0^{l_\alpha}u(x,t)dx_\alpha+\int_0^t\rho_{-\alpha}(t,\tau)u(x,\tau)d\tau-\mu_{-\alpha}(x,t),\quad \text{при } x_\alpha=0, \tag{4.2}$$

$$-\Pi_\alpha(x,t)=\beta_{+\alpha}(x,t)u(x,t)-\mu_{+\alpha}(x,t),\quad \text{при } x_\alpha=l_\alpha, \tag{4.3}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad x\in\overline{G}, \tag{4.4}$$

где
$$Lu=\sum_{\alpha=1}^p L_\alpha u,$$

$$L_\alpha u=\left(k_\alpha(x,t)u_{x_\alpha}\right)_{x_\alpha}+\left(\eta_\alpha(x,t)u_{x_\alpha t}\right)_{x_\alpha}+r_\alpha(x,t)u_{x_\alpha}-q_\alpha(x,t)u,$$

$$Q_T=G\times[0<t\le T],\quad 0<c_0\le\eta_\alpha(x,t),k_\alpha(x,t)\le c_1,$$

$$|r_\alpha|,\ |q_\alpha|,\ |\beta_{-\alpha}(x,t)|,\ |\beta_{+\alpha}(x,t)|,\ |\rho_{-\alpha}(t,\tau)|\le c_2, \tag{4.5}$$

$$\Pi_\alpha(x,t)=k_\alpha(x,t)u_{x_\alpha}+\eta_\alpha(x,t)u_{x_\alpha t}-\text{полный поток},\quad 0\le\tau\le t.$$

$$c_0,c_1,c_2-\text{положительные постоянные},\ \alpha=\overline{1,p}.$$

По ходу изложения будем использовать положительные постоянные числа M_i, $i=1,2,...$, зависящие только от входных данных задачи (1)-(4).

Относительно коэффициентов задачи (4.1)-(4.4) предположим, что они обладают таким количеством непрерывных производных, которое необходимо для обеспечения нужной гладкости решения $u(x,t)$ в цилиндре Q_T.

Допуская существование решения дифференциальной задачи (4.1)-(4.4) в цилиндре $\overline{Q}_T$, получим априорную оценку для ее решения. Для получения априорной оценки воспользуемся методом энергетических неравенств.

В дальнейшем изложении будем пользоваться скалярным произведением и нормой

$$(u,v)=\int_G uvdx,\quad (u,u)=\|u\|_0^2,\quad \|u\|_0^2=\int_G u^2dx,\quad u_x^2=\sum_{\alpha=1}^p u_{x_\alpha}^2,$$

$$\|u\|^2_{L_2(0,l_\alpha)}=\int_0^{l_\alpha}u^2(x,t)dx_\alpha\,.$$

Умножим тогда уравнение (4.1) скалярно на $\mathbf{u}$:

$$\Big(u_t,u\Big)=\Big(\sum_{\alpha=1}^p\left(k_\alpha(x,t)u_{x_\alpha}\right)_{x_\alpha},u\Big)+\Big(\sum_{\alpha=1}^p\left(\eta_\alpha(x,t)u_{x_\alpha t}\right)_{x_\alpha},u\Big)+$$
$$+\Big(\sum_{\alpha=1}^p r_\alpha(x,t)u_{x_\alpha},u\Big)-\Big(\sum_{\alpha=1}^p q_\alpha(x,t)u,u\Big)+\Big(f(x,t),u\Big). \tag{4.6}$$

Преобразуем интегралы, входящие в (4.6):

$$\Big(u_t,u\Big)=\int_G u_tudx=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_0^2, \tag{4.7}$$

$$\left(\sum_{\alpha=1}^{p}\left(k_\alpha u_{x_\alpha}\right)_{x_\alpha}, u\right) = \int_G \sum_{\alpha=1}^{p}\left(k_\alpha u_{x_\alpha}\right)_{x_\alpha} u dx = \sum_{\alpha=1}^{p}\int_{G_\alpha} k_\alpha u u_{x_\alpha}\Big|_0^{l_\alpha} dx' - \sum_{\alpha=1}^{p}\int_G k_\alpha \left(u_{x_\alpha}\right)^2 dx, \tag{4.8}$$

$$\left(\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\eta_\alpha u_{x_\alpha t}\right)_{x_\alpha}, u\right) = \int_G \sum_{\alpha=1}^{p}\left(\eta_\alpha u_{x_\alpha t}\right)_{x_\alpha} u dx = \sum_{\alpha=1}^{p}\int_{G_\alpha} u\eta_\alpha u_{x_\alpha t}\Big|_0^{l_\alpha} dx' +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{p}\int_G \eta_{t\alpha}\left(u_{x_\alpha}\right)^2 dx - \frac{d}{dt}\sum_{\alpha=1}^{p}\int_G \frac{\eta_\alpha}{2}\left(u_{x_\alpha}\right)^2 dx. \tag{4.9}$$

Далее, для оценки слагаемых в правой части применим неравенство Коши с ε

$$\left(\sum_{\alpha=1}^{p} r_\alpha(x,t) u_{x_\alpha}, u\right) = \int_G \sum_{\alpha=1}^{p} r_\alpha(x,t) u_{x_\alpha} u dx \le \frac{c_2}{2}\sum_{\alpha=1}^{p}\int_G \left(u_{x_\alpha}\right)^2 dx + \frac{c_2}{2}\sum_{\alpha=1}^{p}\int_G u^2 dx, \tag{4.10}$$

$$-\left(\sum_{\alpha=1}^{p} q_\alpha(x,t) u, u\right) = -\int_G \sum_{\alpha=1}^{p} q_\alpha(x,t) u^2 dx \le c_2 \sum_{\alpha=1}^{p}\int_G u^2 dx, \tag{4.11}$$

$$\Big(f(x,t), u\Big) = \int_G f(x,t) u dx \le \frac{1}{2}\|f\|_0^2 + \frac{1}{2}\|u\|_0^2, \tag{4.12}$$

где

$$G_\alpha = \{x' = (x_1, x_2, ..., x_{\alpha-1}, x_{\alpha+1}, ..., x_p) : \ 0 < x_k < l_k,$$
$$k = 1, 2, ..., \alpha-1, \alpha+1, ..., p\}, \ dx' = dx_1 dx_2 \cdots dx_{\alpha-1} dx_{\alpha+1} \cdots dx_p.$$

Подставляя (4.7)-(4.12) в (4.6), получаем неравенство

$$\frac{d}{dt}\|u\|_0^2 + \frac{d}{dt}\sum_{\alpha=1}^{p}\int_G \eta_\alpha \left(u_{x_\alpha}\right)^2 dx + \sum_{\alpha=1}^{p}\int_G k_\alpha \left(u_{x_\alpha}\right)^2 dx \le$$

$$\le 2\sum_{\alpha=1}^{p}\int_{G_\alpha} u\left(k_\alpha u_{x_\alpha} + \eta_\alpha u_{x_\alpha t}\right)\Big|_0^{l_\alpha} dx' + 3c_2\sum_{\alpha=1}^{p}\int_G \left(u_{x_\alpha}\right)^2 dx + (3pc_2+1)\|u\|_0^2 + \|f\|_0^2. \tag{4.13}$$

Первое слагаемое в правой части (4.13), пользуясь теоремой 6.5 [19], краевыми условиями (4.2), (4.3) и неравенством Коши с ε, оценим так:

$$\sum_{\alpha=1}^{p}\int_{G_\alpha} u\left(k_\alpha u_{x_\alpha} + \eta_\alpha u_{x_\alpha t}\right)\Big|_0^{l_\alpha} dx' = \sum_{\alpha=1}^{p}\int_{G_\alpha}\Big(\Pi_\alpha(x,t)u(x,t)|_{x_\alpha=l_\alpha} - \Pi_\alpha(x,t)u(x,t)|_{x_\alpha=0}\Big)dx' =$$

$$= -\sum_{\alpha=1}^{p}\int_{G_\alpha}\Big[u(x,t)\Big(\beta_{+\alpha}(x,t)u(x,t) - \mu_{+\alpha}(x,t)\Big)\Big|_{x_\alpha=l_\alpha} -$$

$$-u(x,t)\Big(\beta_{-\alpha}(x,t)\int_0^{l_\alpha} u(x,t)dx_\alpha + \int_0^t \rho_{-\alpha}(t,\tau)u(x,\tau)d\tau - \mu_{-\alpha}(x,t)\Big)\Big]\Big|_{x_\alpha=0} dx' \leq \quad (4.14)$$

$$\leq M_1\Big(\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2\Big) + M_2\int_0^t \Big(\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2\Big)d\tau + \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^p \int_{G_\alpha}\Big(\mu_{-\alpha}^2 + \mu_{+\alpha}^2\Big)dx'.$$

Тогда из (4.13), с учетом (4.14), находим

$$\frac{d}{dt}\|u\|_0^2 + \frac{d}{dt}\sum_{\alpha=1}^p \int_G \eta_\alpha\big(u_{x_\alpha}\big)^2 dx + \sum_{\alpha=1}^p \int_G k_\alpha\big(u_{x_\alpha}\big)^2 dx \leq M_3\Big(\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2\Big) +$$

$$+M_4\int_0^t \Big(\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2\Big)d\tau + \sum_{\alpha=1}^p \int_{G_\alpha}\Big(\mu_{-\alpha}^2 + \mu_{+\alpha}^2\Big)dx' + \|f\|_0^2. \quad (4.15)$$

Проинтегрируем (4.15) по τ от 0 до t, тогда получим

$$\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2 + \|u_x\|_{2,Q_t}^2 \leq M_5\int_0^t \Big(\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2\Big)d\tau + M_6\int_0^t\int_0^\tau \Big(\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2\Big)d\tau_1 d\tau +$$

$$+M_7\Big(\int_0^t \Big(\|f\|_0^2 + \sum_{\alpha=1}^p \int_{G_\alpha}\Big(\mu_{-\alpha}^2 + \mu_{+\alpha}^2\Big)dx'\Big)d\tau + \|u_0(x)\|_0^2 + \|u_0'(x)\|_0^2\Big). \quad (4.16)$$

Оценим второе слагаемое в правой части (4.16) следующим образом:

$$\int_0^t\int_0^\tau \Big(\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2\Big)d\tau_1 d\tau \leq T\int_0^t \Big(\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2\Big)d\tau. \quad (4.17)$$

С помощью (4.17) из (4.16) находим

$$\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2 \leq M_8\int_0^t \Big(\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2\Big)d\tau +$$

$$+M_7\Big(\int_0^t \Big(\|f\|_0^2 + \sum_{\alpha=1}^p \int_{G_\alpha}\Big(\mu_{-\alpha}^2 + \mu_{+\alpha}^2\Big)dx'\Big)d\tau + \|u_0(x)\|_0^2 + \|u_0'(x)\|_0^2\Big). \quad (4.18)$$

На основании леммы Гронуолла из (4.18) получим неравенство

$$\int_0^t \Big(\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2\Big)d\tau \leq$$

$$\leq M(t)\Big(\int_0^t \Big(\|f\|_0^2 + \sum_{\alpha=1}^p \int_{G_\alpha}\Big(\mu_{-\alpha}^2 + \mu_{+\alpha}^2\Big)dx'\Big)d\tau + \|u_0(x)\|_0^2 + \|u_0'(x)\|_0^2\Big). \quad (4.19)$$

Учитывая неравенство (4.17)-(4.19), из (4.16) получаем априорную оценку

$$\|u\|_{W_2^1(G)}^2 + \|u_x\|_{2,Q_t}^2 \leq M(t)\Big(\int_0^t \Big(\|f\|_0^2 + \sum_{\alpha=1}^p \int_{G_\alpha}\Big(\mu_{-\alpha}^2 + \mu_{+\alpha}^2\Big)dx'\Big)d\tau + \|u_0(x)\|_{W_2^1(G)}^2\Big), \quad (4.20)$$

где $M(t)$ – зависит только от входных данных задачи (4.1)-(4.4).

Из априорной оценки (4.20) следует единственность решения исходной задачи (4.1)-(4.4), а также непрерывная зависимость решения задачи от входных данных на каждом временном слое в норме пространства $W_2^1(G)$.

5. Устойчивость и сходимость разностной схемы. Для решения задачи (4.1) – (4.4) применим метод конечных разностей. В замкнутом цилиндре $\overline{Q}_T$ введем равномерную сетку [20, 23]:

$$\overline{\omega}_{h\tau} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau = \{(x_i, t_j),\ x \in \overline{\omega}_h,\ t \in \overline{\omega}_\tau\},$$

$$\overline{\omega}_h = \prod_{\alpha=1}^{p} \overline{\omega}_{h_\alpha}, \quad \overline{\omega}_{h_\alpha} = \{x_\alpha^{i_\alpha} = i_\alpha h_\alpha,\ i_\alpha = 0, 1, ..., N_\alpha,\ N_\alpha h_\alpha = l_\alpha\},$$

$$\overline{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau,\ j = 0, 1, ..., m,\ m\tau = T\}.$$

На сетке $\overline{\omega}_{h\tau}$ дифференциальной задаче (4.1)-(4.4) поставим в соответствие разностную схему, порядка аппроксимации $O\big(|h| + \tau\big)$:

$$y_t = \Lambda(t)y + \delta(t)y + \varphi, \quad (x,t) \in \omega_{h\tau}, \tag{5.1}$$

$$a_{-\alpha}^{(+1_\alpha)} y_{x_\alpha} + \gamma_{-\alpha}^{(+1_\alpha)} y_{x_\alpha t} = \beta_{-\alpha} \sum_{\bar{s}=0}^{N} y_{\bar{s}} \bar{h} + \sum_{s=0}^{j} \rho_{-\alpha,s,j} y_\alpha^{(0)} \overline{\tau} - \mu_{-\alpha}, \quad x_\alpha = 0, \tag{5.2}$$

$$-\Big(a_{+\alpha} y_{\overline{x}_\alpha} + \gamma_{+\alpha} y_{\overline{x}_\alpha t,}\Big) = \beta_{+\alpha} y_\alpha^{(N_\alpha)} - \mu_{+\alpha}, \quad x_\alpha = l_\alpha, \tag{5.3}$$

$$y(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{\omega}_h, \tag{5.4}$$

где

$$\Lambda(t) = \sum_{\alpha=1}^{p} \Lambda_\alpha(t), \qquad \delta(t) = \sum_{\alpha=1}^{p} \delta_\alpha(t),$$

$$\Lambda_\alpha(t) y_{(\alpha)} = \big(a_\alpha y_{\overline{x}_\alpha}\big)_{x_\alpha} + r_\alpha^+ y_{x_\alpha} + r_\alpha^- y_{\overline{x}_\alpha} - d_\alpha y, \qquad \delta_\alpha(t) y_{(\alpha)} = \big(\gamma_\alpha y_{\overline{x}_\alpha t}\big)_{x_\alpha}$$

$$y_{\overline{x}_\alpha} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_\alpha}, \quad y_{x_\alpha} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_\alpha}, \quad y_t = \frac{y^{j+1} - y^j}{\tau}, \quad y = y^j, \quad \hat{y} = y^{j+1},$$

$$r_\alpha = r_\alpha^+ + r_\alpha^-, \qquad |r_\alpha| = r_\alpha^+ - r_\alpha^-, \quad r_\alpha^+ = \frac{1}{2}(r_\alpha + |r_\alpha|) \geq 0,$$

$$r_\alpha^- = \frac{1}{2}(r_\alpha - |r_\alpha|) \leq 0, \qquad t_j = j\tau, \quad t_j + \tau = (j+1)\tau, \quad \tau,\ h - \text{шаги сетки}, \quad i_\alpha = 1, ..., N_\alpha$$

$$a_\alpha = k_\alpha(x^{-\alpha/2}, t_j), \quad \gamma_\alpha = \eta_\alpha(x^{-\alpha/2}, t_j), \quad d_\alpha = q_\alpha(x_i, t), \quad \varphi_i = f(x_i, t_j), \quad x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha,$$

$$x_i = (x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}, ..., x_\alpha^{(i_\alpha)}, ..., x_p^{(i_p)}), \qquad x^{-\alpha/2} = x_1, ..., x_{\alpha-1}, x_\alpha - h_\alpha/2, x_{\alpha+1}, ..., x_p, \quad x_\alpha^{(0)} = 0,$$

$y_\alpha^{(0)} = (x_1, x_2, ..., x_\alpha^{(0)}, ..., x_p, \tau), \qquad y_\alpha^{(N_\alpha)} = (x_1, x_2, ..., x_\alpha^{(N_\alpha)}, ..., x_p, \tau), \qquad x_\alpha^{(N_\alpha)} = N_\alpha h_\alpha = l_\alpha.$

Для решения задачи (5.1)-(5.4) получим априорную оценку, для чего воспользуемся методом энергетических неравенств. В пространстве функции определим норму и введем ее в таком виде:

$$(u, u) = \|u\|^2, \quad (u, u] = \|u]|^2,$$

$$(u, v] = \sum_{\alpha=1}^{p} (u, v]_\alpha, \ \ \|Y_{\overline{x}}]|^2 = \sum_{\alpha=1}^{p} \|Y_{\overline{x}_\alpha}]|^2.$$

Умножим тогда разностное уравнение (5.1) скалярно на $2\tau\hat{y}$:

$$2\tau(y_t, \hat{y}) = 2\tau(\Lambda(t)\hat{y}, \hat{y}) + 2\tau(\delta(t)y, \hat{y}) + 2\tau(\varphi, \hat{y}). \tag{5.5}$$

Преобразуем суммы, входящие в (5.5), с учетом условий (5.2), (5.3) и формулы $2\hat{y}y_t = (y^2)_t + \tau(y_t)^2$:

$$2\tau(y_t, \hat{y}) = (1, \hat{y}^2) - (1, y^2) + \tau^2(1, y_t^2), \tag{5.6}$$

$$\big(\Lambda(t)\hat{y}, \hat{y}\big) + \big(\delta(t)y, \hat{y}\big) = \left(\sum_{\alpha=1}^{p} \Lambda_\alpha(t)\hat{y}, \hat{y}\right) + \left(\sum_{\alpha=1}^{p} \delta_\alpha(t)y, \hat{y}\right) = \sum_{\alpha=1}^{p}\Big(\Lambda_\alpha(t)\hat{y}, \hat{y}\Big) + \sum_{\alpha=1}^{p}\Big(\delta_\alpha(\overline{t})y, \hat{y}\Big) =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{p}\Big(\big((a_\alpha \hat{y}_{\overline{x}_\alpha})_{x_\alpha}, \hat{y}\big) + \big((\gamma_\alpha y_{\overline{x}_\alpha t})_{x_\alpha}, \hat{y}\big) + \big(r_\alpha^+ \hat{y}_{x_\alpha}, \hat{y}\big) + \big(r_\alpha^- \hat{y}_{\overline{x}_\alpha}, \hat{y}\big) - \big(d_\alpha \hat{y}, \hat{y}\big)\Big). \tag{5.7}$$

Применяя первую разностную формулу Грина в (5.7) и подставляя преобразованные таким образом выражения в (5.5), с учетом (5.6), получаем

$$(1, \hat{y}^2) - (1, y^2) + \tau^2(1, y_t^2) + \tau\sum_{\alpha=1}^{p}\big(1, (\gamma_\alpha y_{\overline{x}_\alpha}^2)_t\big]_\alpha + \tau^2\sum_{\alpha=1}^{p}\big(\gamma_\alpha, (y_{\overline{x}_\alpha t})^2\big]_\alpha =$$

$$= -2\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\big(a_\alpha, y_{\overline{x}_\alpha}^2\big]_\alpha - \tau\sum_{\alpha=1}^{p}\big(\gamma_{t\alpha}, \hat{y}_{\overline{x}_\alpha}^2\big]_\alpha + 2\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\big(r_\alpha^+ y_{x_\alpha}, y\big) + 2\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\big(r_\alpha^- y_{\overline{x}_\alpha}, y\big) -$$

$$-2\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\big(d_\alpha, y^2\big) - 2\tau\sum_{\alpha=1}^{p} y_\alpha^{(0)}\sum_{\overline{s}=0}^{N}\beta_{-\alpha,\overline{s}}y\overline{h} - 2\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\beta_{+\alpha}\big(y_\alpha^{(N_\alpha)}\big)^2 + 2\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\mu_{+\alpha}y_\alpha^{(N_\alpha)} +$$

$$+2\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\mu_{-\alpha}y_\alpha^{(0)} - 2\tau\sum_{\alpha=1}^{p}y_\alpha^{(0)}\sum_{s=0}^{j}\rho_{-\alpha,s,j}y_\alpha^{(N_\alpha),s+1}\overline{\tau} + 2\tau\big(\varphi, y\big). \tag{5.8}$$

Оценим суммы, входящие в (5.8):

$$\sum_{\alpha=1}^{p}\big(a_\alpha, y_{\overline{x}_\alpha}^2\big]_\alpha \ge c_1\sum_{\alpha=1}^{p}\big(1, y_{\overline{x}_\alpha}^2\big]_\alpha = c_1\big(1, y_{\overline{x}}^2\big] = c_1\|y_{\overline{x}}]|^2, \tag{5.9}$$

$$\tau^2\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\gamma_\alpha,(y_{\overline{x}_\alpha t})^2\right]_\alpha \geq \tau^2 c_0\|y_{\overline{x}t}]|^2, \tag{5.10}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{p}\left(r_\alpha^+ y_{x_\alpha},y\right)+\sum_{\alpha=1}^{p}\left(r_\alpha^- y_{\overline{x}_\alpha},y\right)\leq 2c_2\|y_{\overline{x}}]|\,\|y\|\leq c_2\left(\|y\|^2+\|y_{\overline{x}}]|^2\right), \tag{5.11}$$

$$-\sum_{\alpha=1}^{p}(d_\alpha,y^2)\leq c_2\sum_{\alpha=1}^{p}(1,y^2)=c_2\|y\|^2, \tag{5.12}$$

$$-\sum_{\alpha=1}^{p}y_\alpha^{(0)}\beta_{-\alpha}\sum_{\overline{s}=0}^{N}y_{\overline{s}}\,\overline{h}-\sum_{\alpha=1}^{p}\beta_{+\alpha}\left(y_\alpha^{(N_\alpha)}\right)^2\leq\sum_{\alpha=1}^{p}\left[\frac{1}{2}\left(y_\alpha^{(0)}\right)^2-\beta_{+\alpha}\left(y_\alpha^{(N_\alpha)}\right)^2\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{p}\left[\left(\beta_{-\alpha}\sum_{\overline{s}=0}^{N}y_{\overline{s}}\,\overline{h}\right)^2\right]\leq M_1\left(\|y_{\overline{x}}]|^2+\|y\|^2\right), \tag{5.13}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{p}\mu_{-\alpha}y_\alpha^{(0)}\leq\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\mu_{-\alpha}^2+\left(y_\alpha^{(0)}\right)^2\right)\leq\frac{1}{2}\left(\varepsilon\|y_{\overline{x}}]|^2+c(\varepsilon)\|y\|^2+\sum_{\alpha=1}^{p}\mu_{-\alpha}^2\right), \tag{5.14}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{p}\mu_{+\alpha}y_\alpha^{(N_\alpha)}\leq\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\mu_{+\alpha}^2+\left(y_\alpha^{(N_\alpha)}\right)^2\right)\leq\frac{1}{2}\left(\varepsilon\|y_{\overline{x}}]|^2+c(\varepsilon)\|y\|^2+\sum_{\alpha=1}^{p}\mu_{+\alpha}^2\right), \tag{5.15}$$

$$-\sum_{\alpha=1}^{p}y_\alpha^{(0)}\sum_{s=0}^{j}\rho_{-\alpha,s,j}y_\alpha^{(0),s+1}\overline{\tau}\leq\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\left(\sum_{s=0}^{j}\rho_{-\alpha,s,j}y_\alpha^{(0),s+1}\overline{\tau}\right)^2+\left(y_\alpha^{(0)}\right)^2\right), \tag{5.16}$$

Из (5.16) получим

$$\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\left(\sum_{s=0}^{j}\rho_{-\alpha,s,j}y_\alpha^{(0),s+1}\overline{\tau}\right)^2+\left(y_\alpha^{(0)}\right)^2\right)\leq$$

$$\leq\frac{1}{2}\left(\varepsilon\|y_{\overline{x}}]|^2+c(\varepsilon)\|y\|^2\right)+M_2\sum_{s=0}^{j}\left(\varepsilon\|y_{\overline{x}}^{s+1}]|^2+c(\varepsilon)\|y^{s+1}\|^2\right)\overline{\tau}, \tag{5.17}$$

$$(\varphi,y)\leq\frac{1}{2}\|y\|^2+q\frac{1}{2}\|\varphi\|^2. \tag{5.18}$$

Учитывая оценки (5.9) – (5.18), после несложных преобразований из (5.8) находим:

$$\|\hat{y}\|^2-\|y\|^2+\tau\left(1,(\gamma y_{\overline{x}}^2)_t\right]+\tau^2\|\hat{y}_t]|^2+\tau^2c_0\|\hat{y}_{\overline{x}t}]|^2+2\tau c_1\|\hat{y}_{\overline{x}}]|^2\leq$$

$$\leq M_3(\|\hat{y}\|^2+\|\hat{y}_{\overline{x}}]|^2)\tau+M_4\sum_{s=0}^{j}\left(\|y^{s+1}\|^2+\|y_{\overline{x}}^{s+1}]|^2\right)\overline{\tau}\tau+M_5\left(\|\varphi\|^2+\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\mu_{-\alpha}^2+\mu_{+\alpha}^2\right)\right)\tau. \tag{5.19}$$

Просуммируем (5.19) по j' от 0 до j :

$$\|y^{j+1}\|^2+\|y_{\overline{x}}^{j+1}]|^2+\sum_{j'=0}^{j}\left(\|y_t^{j'+1}]|^2\tau+\|y_{\overline{x}t}^{j'+1}]|^2\tau+\|y_{\overline{x}}^{j'+1}]|^2\right)\tau\leq$$

$$\leq M_6\sum_{j'=0}^{j}\left(\|y^{j'+1}\|^2+\|y_{\bar x}^{j'+1}]|^2\right)\tau+M_7\sum_{j'=0}^{j}\sum_{s=0}^{j'}\left(\|y^{s+1}\|^2+\|y_{\bar x}^{s+1}]|^2\right)\bar\tau\tau+$$

$$+M_8\left(\sum_{j'=0}^{j}\left(\|\varphi^{j'}\|^2+\sum_{\alpha=1}^{p}(\mu_{-\alpha}^2+\mu_{+\alpha}^2)\right)\tau+\|y^0\|^2+\|y_{\bar x}^0]|^2\right). \tag{5.20}$$

Второе слагаемое в правой части (5.20) оценим так

$$\sum_{j'=0}^{j}\sum_{s=0}^{j'}\left(\|y^{s+1}\|^2+\|y_{\bar x}^{s+1}]|^2\right)\bar\tau\tau\leq T\sum_{j'=0}^{j}\left(\|y^{j'+1}\|^2+\|y_{\bar x}^{j'+1}]|^2\right)\tau. \tag{5.21}$$

В силу (5.21) из (5.20) имеем

$$\|y^{j+1}\|^2+\|y_{\bar x}^{j+1}]|^2+\sum_{j'=0}^{j}\left(\|y_t^{j'+1}]|^2\tau+\|y_{\bar x t}^{j'+1}]|^2\tau+\|y_{\bar x}^{j'+1}]|^2\right)\tau\leq M_9\sum_{j'=0}^{j}\left(\|y^{j'+1}\|^2+\|y_{\bar x}^{j'+1}]|^2\right)\tau+$$

$$M_8\left(\sum_{j'=0}^{j}\left(\|\varphi^{j'}\|^2+\sum_{\alpha=1}^{p}(\mu_{-\alpha}^{j'2}+\mu_{+\alpha}^{j'2})\right)\tau+\|y^0\|^2+\|y_{\bar x}^0]|^2\right)=M_9\left(\|y^{j'+1}\|^2+\|y_{\bar x}^{j'+1}]|^2\right)\tau+$$

$$+M_9\sum_{j'=1}^{j}\left(\|y^{j'}\|^2+\|y_{\bar x}^{j'}]|^2\right)\tau+M_{10}\left(\sum_{j'=0}^{j}\left(\|\varphi^{j'}\|^2+\sum_{\alpha=1}^{p}(\mu_{-\alpha}^{j'2}+\mu_{+\alpha}^{j'2})\right)\tau+\|y^0\|^2+\|y_{\bar x}^0]|^2\right). \tag{5.22}$$

Выбирая τ таким образом, что для всех $\tau\leq\tau_0,\ \tau_0=(2M_9)^{-1}$, из (5.22) получим

$$\|y^{j+1}\|^2+\|y_{\bar x}^{j+1}]|^2\leq M_{11}\sum_{j'=1}^{j}\left(\|y^{j'}\|^2+\|y_{\bar x}^{j'}]|^2\right)\tau+$$

$$+M_{12}\left(\sum_{j'=0}^{j}\left(\|\varphi^{j'}\|^2+\sum_{\alpha=1}^{p}(\mu_{-\alpha}^{j'2}+\mu_{+\alpha}^{j'2})\right)\tau+\|y^0\|^2+\|y_{\bar x}^0]|^2\right). \tag{5.23}$$

Оценивая первое слагаемое в правой части (5.23) с помощью леммы Гронуолла для сеточной функций [24], из (5.20) с учетом (5.21), (5.22) получим априорную оценку

$$\|y^{j+1}\|^2+\|y_{\bar x}^{j+1}]|^2+\sum_{j'=0}^{j}\left(\|y_t^{j'+1}]|^2\tau+\|y_{\bar x t}^{j'+1}]|^2\tau+\|y_{\bar x}^{j'+1}]|^2\right)\tau\leq$$

$$\leq M\left(\sum_{j'=0}^{j}\left(\|\varphi^{j'}\|^2+\sum_{\alpha=1}^{p}(\mu_{-\alpha}^{j'2}+\mu_{+\alpha}^{j'2})\right)\tau+\|y^0\|^2+\|y_{\bar x}^0]|^2\right). \tag{5.24}$$

Тогда справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть выполнены условия (4.5). Тогда существует такое τ_0, что если $\tau \le \tau_0$, для решения разностной задачи (5.1) – (5.4) справедлива априорная оценка*

$$\|y^{j+1}\|^2_{W_2^1(G)} + \sum_{j'=0}^{j}\Big(\|y_{\bar t}^{j'+1}]|^2\tau + \|y_{\bar x t}^{j'+1}]|^2\tau + \|y_{\bar x}^{j'+1}]|^2\Big)\tau \le$$

$$\le M\Bigg(\sum_{j'=0}^{j}\Big(\|\varphi^{j'}\|^2 + \sum_{\alpha=1}^{p}\big(\mu_{-\alpha}^{j'2} + \mu_{+\alpha}^{j'2}\big)\Big)\tau + \|y^0\|^2_{W_2^1(G)}\Bigg).$$

где – положительная постоянная, не зависящая от $|h|$ и τ.

□ Пусть $u(x,t)$ – решение задачи (4.1)-(4.4), $y(x_i,t_j) = y_i^j$ – решение разностной задачи (5.1)-(5.4). Обозначим через $z_i^j = y_i^j - u_i^j$ погрешность. Тогда, подставляя $y = z+u$ в (5.1)-(5.4), получим задачу для z:

$$z_t = \Lambda(t)z + \delta(t)z + \Psi, \quad (x,t) \in \omega_{h\tau}\,, \tag{5.25}$$

$$a_{-\alpha}^{(+1_\alpha)} z_{x_\alpha} + \gamma_{-\alpha}^{(+1_\alpha)} z_{x_\alpha t} = \beta_{-\alpha}\sum_{s=0}^{N} z_{\bar s}\,\bar h + \sum_{s=0}^{j}\rho_{-\alpha,s,j} z_\alpha^{(0)}\bar\tau - \nu_{-\alpha}, \quad \text{при} x_\alpha = 0, \tag{5.26}$$

$$-\Big(a_{+\alpha} z_{\bar x_\alpha} + \gamma_{+\alpha} z_{\bar x_\alpha t}\Big) = \beta_{+\alpha} z_\alpha^{N_\alpha} - \nu_{+\alpha}, \quad \text{при } x_\alpha = l_\alpha, \tag{5.27}$$

$$z(x,0) = 0, \quad x \in \overline{\omega}_h, \tag{5.28}$$

где $\Psi = O\big(|h|+\tau\big)$, $\nu_{-\alpha} = O\big(|h|+\tau\big)$, $\nu_{+\alpha} = O\big(|h|+\tau\big)$ – погрешности аппроксимации на решении задачи (4.1)-(4.4).

Применяя априорную оценку (5.24) к решению задачи (5.25)-(5.28), получим оценку

$$\|z^{j+1}\|^2_{W_2^1(G)} + \sum_{j'=0}^{j}\Big(\|z_{\bar t}^{j'+1}]|^2\tau + \|z_{\bar x t}^{j'+1}]|^2\tau + \|z_{\bar x}^{j'+1}]|^2\Big)\tau \le M\sum_{j'=0}^{j}\Big(\|\Psi^{j'}\|^2 + \sum_{\alpha=1}^{p}\big(\nu_{-\alpha}^{j'2} + \nu_{+\alpha}^{j'2}\big)\Big)\tau,$$

где – положительная постоянная, не зависящая от $|h|$ и τ.

Из полученной априорной оценки следует сходимость схемы (5.25)-(5.28) со скоростью $O(|h|+\tau)$ в сеточной норме $W_2^1(G)$.

Замечание. Полученные результаты имеют место и в случае, когда уравнение имеет вид:

$$u_t = (k(x,t)u_x)_x + (\eta(x,t)u_x)_{xt} + r(x,t)u_x - q(x,t)u + f(x,t), \qquad 0 < x < l, \quad 0 < t \le T,$$

если потребовать условие $\eta \in C^{3,3}(Q_T)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации. Регистрационный номер НИР: 1.6197.2011.

Литература

1. Баренблат Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Прикладная математика и механика. – 1960. – 25;5. – С.852-864.
2. Дзекцер Е.С. Уравнения движения подземных вод со свободной поверхностью в многослойных средах // ДАН СССР. – 1875. – 220;3. – С.540-543.
3. Рубинштейн Л.И. К вопросу о процессе распространения тепла в гетерогенных средах // Известия АН СССР, сер. геогр. – 1948. – 12;1. – С.27-45.
4. Ting T., Cooling A. Process According to Two Temperature theory of heat Conduction // J. Math. Anal. Appl. – 1974. – 45;9.
5. Hallaire M. L'eau et la production vegetable // Institut National de la Recherche Agronomique. – 1964. – №9.
6. Чудновский А.Ф. Теплофизика почв // М: Наука, 1976.
7. Colton D.L. Pseudoparabolic equations in one space variable // J. Different. equations. – 1972. – 12;8. – P.559-565.
8. Colton D.L. Integral operators and the first initial-boundary value problems for pseudoparabolic equations with analytic coefficients // J. Different. equations. – 1973. – 13. – P.506-522.
9. Ахиев С.С., Гусейнов О.М. О фундаментальном решении одной краевой задачи для гиперболического уравнения третьего порядка // Баку: Азерб. унив-т, 1983. – 9 с.
10. Водахова В.А. Краевая задача с нелокальным условием А.М. Нахушева для одного псевдопараболического уравнения влагопереноса // Диффер урав. – 1982. – 18;2. – С.280-285.
11. Жегалов В.И. Миронов А.Н. Дифференциальные уравнения со старшими частными производными // Казань.: Изд. Казанское математическое общество, 2001. – 226 с.
12. Кожанов А.И. Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнений теплопроводности и Аллера // Диффер урав. – 2004. – 40;6. – С.763-774.
13. Шхануков М.Х. Исследование краевых задач для одного класса уравнений третьего порядка методом функции Римана // Сообщения АН ГССР. – 1983.
14. Шхануков М.Х. О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах // Дффер урав. – 1982. – 18;4. – С.689-699.
15. Coleman B.D., Duffin R.J., Mizel V.J. Instability, uniqueness, and nonexistence theorems for the equation $u_t = u_{xx} - u_{xxt}$ on a strip // Arch. Rat. Mech. Anal.
16. Showalter R.E., Ting T. Pseudoparabolic partial differential equations // Siam. J. Math. Anal. – 1970. – 1. – P.1-26.
17. Чудновский А.Ф. Некоторые коррективы в постановке и решении задач тепло- и влагопереноса в почве // Сборник трудов по агрофизике. – 1969. – №23, Гидрометеоиздат.
18. Карсанова Ж.Т., Нахушева Ф.М. Об одной нелокальной краевой задаче для псевдопараболического уравнения третьего порядка // Владикавказский математический журнал. – 2002. – 4;2. – С.31-37.
19. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики / М: Наука, 1973.
20. Самарский А.А. Теория разностных схем / М: Наука, 1983.
21. Андреев В.Б. О сходимости разностных схем, аппроксимирующих вторую и третью краевые задачи для эллиптических уравнений // ЖВМ и МФ. – 1968. – 8;6. – С.1218-1231.
22. Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем / М: Наука, 1973.
23. Бештоков М.Х. О сходимости разностных схем, аппроксимирующих третью краевую задачу для уравнения гиперболического типа в многомерной области с нелокальным краевым условием.Ч.1 // Известия КБНЦ РАН.-Нальчик. – 2007. – №3(19). – С.88-96.
24. Самарский А.А. Однородные разностные схемы на неравномерных сетках для уравнений параболического типа // ЖВМ и МФ. – 1963. – 3;2. – С.266-298.

ON NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE THIRD ORDER

M.Kh. Beshtokov

Kabardino-Balkarian State University,
Chernyshevskiy St., 173, Nalchik, 360004, Russia, e-mail: beshtokov_ murat@rambler.ru

Abstract. Nonlocal boundary value problems for pseudo-parabolic equations of third order with variable coefficients in one-dimensional and multidimensional cases are under consideration. Using the Riemann function method, existence and uniqueness of the solution of a nonlocal boundary value problem are proved in one-dimensional case. A priori estimates are obtained for nonlocal problems both in differential and difference interpretations. The estimates obtained imply uniqueness, stability and convergence of the difference problem solution to the correspondent differential problem solution.

Key words: boundary value problems, Riemann's function method, nonlocal condition, a priori estimate, difference scheme, stability and convergence of difference schemes, partial differential equation of third order, pseudo-parabolic equation.