MSC 47G99

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ АБСТРАКТНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ОГРАНИЧЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ

И.М. Примак

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, Белгород, Россия, e-mail: iilika@yandex.ru

Аннотация. Найдены условия однозначной разрешимости краевых задач для абстрактных дифференциальных уравнений с ограниченным оператором.

Ключевые слова: краевая задача, дробная производная, однозначная разрешимость.

В первой части работы в банаховом пространстве E рассматривается решение краевых задач для абстрактных дифференциальных уравнений дробного порядка $\alpha \in (1, 2)$, содержащих дробную производную Герасимова-Капуто, во второй — дробную производную Римана-Лиувилля. Дробная производная Герасимова-Капуто определяется следующим образом:

$$\partial^\alpha u(t) = D^\alpha(u(t) - u(0) - tu'(0)),$$

где

$$D^\alpha u(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^2 I^{2-\alpha} u(t)$$

— дробная производная Римана-Лиувилля [1, с. 44],

$$I^{2-\alpha} u(t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^t \frac{u(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-1}} d\tau$$

— дробный интеграл Римана-Лиувилля, $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера.

Абстрактные краевые задачи для уравнений дробного порядка рассматриваются впервые. Ранее в [2] авторами была исследована краевая задача для уравнения порядка $\alpha \in (0, 1)$. Примеры конкретных краевых задач для уравнений, младшие члены которых содержат дробные производные можно найти в [3, 4].

1. Рассмотрим краевую задачу

$$\partial^\alpha u(t) = Au(t), \quad 0 < t < T, \tag{1}$$

с краевыми условиями общего вида

$$a_{11} u(0) + a_{12} \partial^\beta u(0) + b_{11} u(T) + b_{12} \partial^\gamma u(T) = u_1, \tag{2}$$

Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы (госконтракт № 14.A18.21.0357).

$$a_{21}u(0) + a_{22}\partial^{\beta}u(0) + b_{21}u(T) + b_{22}\partial^{\gamma}u(T) = u_2, \tag{3}$$

где $0 < \beta < \alpha$ и $0 < \gamma < \alpha$. В уравнении (1) будем считать A ограниченным оператором в банаховом пространстве E.

Определение 1. *Функция $u(t) \in C([0;T], E)$ такая, что $I^{2-\alpha}u(t) \in C^2((0,T], E)$, называется решением задачи (1) – (3), если она удовлетворяет уравнению (1) на интервале $(0,T)$ и краевым условиям (2), (3).*

Будем использовать следующие обозначения. Пусть I — единичный оператор,

$$E_{\mu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu k + 1)} \ (\mu > 0), \quad E_{\mu,\nu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu k + \nu)} \ (\mu > 0)$$

— функции Миттаг-Леффлера. Тогда

$$B_{11} = a_{11}I + b_{11}E_{\alpha}(T^{\alpha}A) + b_{12}T^{\alpha-\gamma}AE_{\alpha,1-\gamma+\alpha}(T^{\alpha}A)\,. \tag{4}$$

Если $0 < \beta \le 1$ и $0 < \gamma \le 1$ или $1 < \beta < \alpha$ и $0 < \gamma \le 1$, то

$$B_{12} = b_{11}TE_{\alpha,2}(T^{\alpha}A) + b_{12}T^{1-\gamma}E_{\alpha,2-\gamma}(T^{\alpha}A)\,. \tag{5}$$

Если $0 < \beta \le 1$ и $1 < \gamma < \alpha$ или $1 < \beta < \alpha$ и $1 < \gamma < \alpha$, то

$$B_{12} = b_{11}TE_{\alpha,2}(T^{\alpha}A) + b_{12}T^{\alpha+1-\gamma}E_{\alpha,2-\gamma+\alpha}(T^{\alpha}A)\,. \tag{6}$$

$$B_{21} = a_{21}I + b_{21}E_{\alpha}(T^{\alpha}A) + b_{22}T^{\alpha-\gamma}AE_{\alpha,1-\gamma+\alpha}(T^{\alpha}A)\,. \tag{7}$$

Если $0 < \beta \le 1$ и $0 < \gamma \le 1$ или $1 < \beta < \alpha$ и $0 < \gamma \le 1$, то

$$B_{22} = b_{21}TE_{\alpha,2}(T^{\alpha}A) + b_{22}T^{1-\gamma}E_{\alpha,2-\gamma}(T^{\alpha}A)\,. \tag{8}$$

Если $0 < \beta \le 1$ и $1 < \gamma < \alpha$ или $1 < \beta < \alpha$ и $1 < \gamma < \alpha$, то

$$B_{22} = b_{21}TE_{\alpha,2}(T^{\alpha}A) + b_{22}T^{\alpha+1-\gamma}AE_{\alpha,2-\gamma+\alpha}(T^{\alpha}A)\,. \tag{9}$$

Если $0 < \beta \le 1$ и $0 < \gamma \le 1$ или $1 < \beta < \alpha$ и $0 < \gamma \le 1$, то

$$\Phi(\lambda) = (a_{11}b_{21} - a_{21}b_{11})TE_{\alpha,2}(\lambda T^{\alpha}) + (a_{11}b_{22} - a_{21}b_{12})T^{1-\gamma}E_{\alpha,2-\gamma}(\lambda T^{\alpha}) +$$
$$+(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})T^{1-\gamma}E_{\alpha,2-\gamma}(\lambda T^{\alpha})E_{\alpha}(\lambda T^{\alpha})\,. \tag{10}$$

Если $0 < \beta \le 1$ и $1 < \gamma < \alpha$ или $1 < \beta < \alpha$ и $1 < \gamma < \alpha$, то

$$\Phi(\lambda) = (a_{11}b_{21} - a_{21}b_{11})TE_{\alpha,2}(\lambda T^{\alpha}) + (a_{11}b_{22} - a_{21}b_{12})T^{\alpha+1-\gamma}\lambda E_{\alpha,2-\gamma+\alpha}(\lambda T^{\alpha}) +$$
$$+(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})T^{\alpha-\gamma}\lambda E_{\alpha,1-\gamma+\alpha}(\lambda T^{\alpha})E_{\alpha}(\lambda T^{\alpha})\,. \tag{11}$$

Теорема 1. *Пусть A — ограниченный оператор в банаховом пространстве E и $\Phi(\lambda) \ne 0$ для любого λ принадлежащего спектру $\sigma(A)$ оператора A. Тогда для любых $u_1, u_2 \in E$ решение краевой задачи (1)-(3) существует, единственно и имеет вид*

$$u(t) = (B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21})^{-1}\left((E_{\alpha}(t^{\alpha}A)B_{22} - tE_{\alpha,2}(t^{\alpha}A)B_{21})u_1 - \right.$$

$$-(E_\alpha(t^\alpha A)B_{12} - tE_{\alpha,2}(t^\alpha A)B_{11})u_2)\ . \tag{12}$$

□ Пусть $u(t)$ – решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям $u(0) = v_0$, $u'(0) = v_1$. Тогда [5, с. 13]

$$u(t) = E_\alpha(t^\alpha A)v_0 + tE_{\alpha,2}(t^\alpha A)v_1, \quad t \in [0,T]. \tag{13}$$

Вычислим нужные нам дробные производные. Если $0 < \beta \le 1$, то

$$\partial^\beta u(t) = D^\beta\,(u(t) - u(0)) = D^\beta(E_\alpha(t^\alpha A)v_0 + tE_{\alpha,2}(t^\alpha A)v_1 - v_0) =$$

$$= t^{-\beta}E_{\alpha,1-\beta}(t^\alpha A)v_0 + t^{1-\beta}E_{\alpha,2-\beta}(t^\alpha A)v_1 - \frac{t^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)}v_0 =$$

$$= t^{-\beta}\left(\frac{1}{\Gamma(1-\beta)} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(t^\alpha A)^k}{\Gamma(\alpha(k-1)+1-\beta+\alpha)} - \frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\right)v_0 + t^{1-\beta}E_{\alpha,2-\beta}(t^\alpha A)v_1 =$$

$$= t^{\alpha-\beta}A\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(t^\alpha A)^k}{\Gamma(\alpha k+1-\beta+\alpha)}v_0 + t^{1-\beta}E_{\alpha,2-\beta}(t^\alpha A)v_1 =$$

$$= t^{\alpha-\beta}AE_{\alpha,1-\beta+\alpha}(t^\alpha A)v_0 + t^{1-\beta}E_{\alpha,2-\beta}(t^\alpha A)v_1\,.$$

Аналогично, для $0 < \gamma \le 1$ получим

$$\partial^\gamma u(t) = t^{\alpha-\gamma}AE_{\alpha,1-\gamma+\alpha}(t^\alpha A)v_0 + t^{1-\gamma}E_{\alpha,2-\gamma}(t^\alpha A)v_1\,.$$

Если $1 < \beta < \alpha$, то

$$\partial^\beta u(t) = D^\beta(u(t) - u(0) - tu(0)) = D^\beta(E_\alpha(t^\alpha A)v_0 + tE_{\alpha,2}(t^\alpha A)v_1 - v_0 - tv_1) =$$

$$= t^{-\beta}E_{\alpha,1-\beta}(t^\alpha A)v_0 + t^{1-\beta}E_{\alpha,2-\beta}(t^\alpha A)v_1 - \frac{t^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)}v_0 - \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2-\beta)}t^{1-\beta}v_1 =$$

$$= t^{\alpha-\beta}A\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(t^\alpha A)^k}{\Gamma(\alpha k+1-\beta+\alpha)}v_0 + t^{\alpha+1-\beta}A\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(t^\alpha A)^k}{\Gamma(\alpha k+2-\beta+\alpha)}v_1 =$$

$$= t^{\alpha-\beta}AE_{\alpha,1-\beta+\alpha}(t^\alpha A)v_0 + t^{\alpha+1-\beta}AE_{\alpha,2-\beta+\alpha}(t^\alpha A)v_1\,.$$

Аналогично, для $1 < \gamma < \alpha$

$$\partial^\gamma u(t) = t^{\alpha-\gamma}AE_{\alpha,1-\gamma+\alpha}(t^\alpha A)v_0 + t^{\alpha+1-\gamma}AE_{\alpha,2-\gamma+\alpha}(t^\alpha A)v_1\,.$$

Рассмотрим для определенности случай, когда $0 < \beta \le 1$ и $0 < \gamma \le 1$. Учитывая граничные условия (2) и (3), составим систему

$$\begin{cases} a_{11}v_0 + b_{11}E_\alpha(T^\alpha A)v_0 + b_{11}TE_{\alpha,2}(T^\alpha A)v_1 + b_{12}T^{\alpha-\gamma}AE_{\alpha,1-\gamma+\alpha}(T^\alpha A)v_0 + \\ \qquad\qquad + b_{12}T^{1-\gamma}E_{\alpha,2-\gamma}(T^\alpha A)v_1 = u_1, \\ a_{21}v_0 + b_{21}E_\alpha(T^\alpha A)v_0 + b_{21}TE_{\alpha,2}(T^\alpha A)v_1 + b_{22}T^{\alpha-\gamma}AE_{\alpha,1-\gamma+\alpha}(T^\alpha A)v_0 + \\ \qquad\qquad + b_{22}T^{1-\gamma}E_{\alpha,2-\gamma}(T^\alpha A)v_1 = u_2\,. \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (a_{11}I + b_{11}E_\alpha(T^\alpha A) + b_{12}T^{\alpha-\gamma}AE_{\alpha,1-\gamma+\alpha}(T^\alpha A))v_0 + (b_{11}TE_{\alpha,2}(T^\alpha A)+ \\ \qquad\qquad +b_{12}T^{1-\gamma}E_{\alpha,2-\gamma}(T^\alpha A))v_1 = u_1, \\ (a_{21}I + b_{21}E_\alpha(T^\alpha A) + b_{22}T^{\alpha-\gamma}AE_{\alpha,1-\gamma+\alpha}(T^\alpha A))v_0 + (b_{21}TE_{\alpha,2}(T^\alpha A)+ \\ \qquad\qquad +b_{22}T^{1-\gamma}E_{\alpha,2-\gamma}(T^\alpha A))v_1 = u_2\,. \end{cases} \tag{14}$$

С помощью операторов (4)-(9) запишем систему (14) в виде

$$\begin{cases} B_{11}v_0 + B_{12}v_1 = u_1\,, \\ B_{21}v_0 + B_{22}v_1 = u_2\,. \end{cases} \tag{15}$$

Будем считать, что в краевых условиях (2) и (3) коэффициенты таковы, что существует $(B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21})^{-1}$. Решая систему (15) методом исключения, получим

$$\begin{cases} B_{11}B_{22}v_0 + B_{12}B_{22}v_1 = B_{22}u_1, \\ -B_{12}B_{21}v_0 - B_{12}B_{22}v_1 = -B_{12}u_2, \end{cases}$$

откуда

$$(B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21})v_0 = B_{22}u_1 - B_{12}u_2,$$

$$v_0 = (B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21})^{-1}(B_{22}u_1 - B_{12}u_2). \tag{16}$$

Аналогично,

$$\begin{cases} -B_{11}B_{21}v_0 - B_{12}B_{21}v_1 = -B_{21}u_1, \\ B_{21}B_{11}v_0 + B_{22}B_{11}v_1 = B_{11}u_2, \end{cases}$$

откуда

$$(B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21})v_1 = B_{11}u_2 - B_{21}u_1,$$

$$v_1 = (B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21})^{-1}(B_{11}u_2 - B_{21}u_1). \tag{17}$$

Подставляя (16), (17) в решение (13), имеем

$$u(t) = E_\alpha(t^\alpha A)(B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21})^{-1}(B_{22}u_1 - B_{12}u_2)+$$

$$+tE_{\alpha,2}(t^\alpha A)(B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21})^{-1}(B_{11}u_2 - B_{21}u_1) =$$

$$= (B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21})^{-1}((E_\alpha(t^\alpha A)B_{22} - tE_{\alpha,2}(t^\alpha A)B_{21})u_1 -$$

$$-(E_\alpha(t^\alpha A)B_{12} - tE_{\alpha,2}(t^\alpha A)B_{11})u_2),$$

что и приводит к равенству (12).

Отметим теперь, что из условия $\Phi(\lambda) \neq 0$ для любого $\lambda \in \sigma(A)$ вытекает существование оператора $(B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21})^{-1}$, который с помощью контурного интеграла можно представить в виде (см. [6, с. 20])

$$(B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21})^{-1} = ((a_{11}b_{21} - a_{21}b_{11})TE_{\alpha,2}(T^\alpha A) + (a_{11}b_{22} - a_{21}b_{12})T^{1-\gamma}E_{\alpha,2-\gamma}(T^\alpha A)+$$

$$+(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})(T^{1-\gamma}E_{\alpha,2-\gamma}(T^\alpha A)E_\alpha(T^\alpha A))^{-1} = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{1}{\Phi(\lambda)}R(\lambda, A)d\lambda\,.$$

где $\Phi(\lambda)$ выражается формулой (10).

Аналогично рассматриваются и следующие случаи:

$$1 < \beta < \alpha \quad \text{и} \quad 0 < \gamma \leq 1,$$

$$0 < \beta \leq 1 \quad \text{и} \quad 1 < \gamma < \alpha,$$

$$1 < \beta < \alpha \quad \text{и} \quad 1 < \gamma < \alpha.$$

Таким образом, если решение краевой задачи существует, то оно единственно и имеет вид (12). С другой стороны, задаваемая равенством (12) функция $u(t)$ определена при любых $u_1, u_2 \in E$ и, как нетрудно проверить, является решением рассматриваемой краевой задачи (1)-(3).

В заключение отметим, что условие разрешимости задачи (1) – (3) не зависит от β, поскольку, как легко видеть из (10), (11), функция $\Phi(\lambda)$ зависит только от α и γ, т.е., $\Phi(\lambda) = \Phi_{\alpha,\gamma}(\lambda)$. ■

Пример 1. В частном случае, если $a_{12} = a_{22} = b_{12} = b_{22} = 0$, получим задачу

$$\partial^\alpha u(t) = Au(t), \quad 0 < t < T, \tag{18}$$

$$a_{11}u(0) + b_{11}u(T) = u_1, \tag{19}$$

$$a_{21}u(0) + b_{21}u(T) = u_2\,. \tag{20}$$

Подставим $a_{12} = a_{22} = b_{12} = b_{22} = 0$ в (10). Тогда

$$\Phi(\lambda) = (a_{11}b_{21} - a_{21}b_{11})TE_{\alpha,2}(\lambda T^\alpha)\,.$$

Если для любого $\lambda \in \sigma(A)$ функция $\Phi^{-1}(\lambda) \neq 0$, т.е., если $a_{11}b_{21} - a_{21}b_{11} \neq 0$ и для любого $\lambda \in \sigma(A)$ функция $E_{\alpha,2}(\lambda T^\alpha) \neq 0$, то при любых $u_1,\ u_2 \in E$ решение краевой задачи (18)-(20) существует, единственно и имеет вид

$$u(t) = ((a_{11}b_{21} - a_{21}b_{11})TE_{\alpha,2}(T^\alpha A))^{-1}((E_\alpha(t^\alpha A)b_{21}TE_{\alpha,2}(T^\alpha A) -$$

$$-tE_{\alpha,2}(t^\alpha A)(a_{21}I + b_{21}E_\alpha(T^\alpha A))u_1 -$$

$$-(E_\alpha(t^\alpha A)b_{11}TE_{\alpha,2}(T^\alpha A) - tE_{\alpha,2}(t^\alpha A)(a_{11}I + b_{11}E_\alpha(T^\alpha A)))u_2)\ .$$

Пример 2. Рассмотрим ещё один частный случай граничной задачи (1)-(3)

$$\partial^\alpha u(t) = Au(t), \quad 0 < t < \pi, \tag{21}$$

$$u(0) = u_1, \tag{22}$$

$$u(\pi) = u_2, \tag{23}$$

Подставим $a_{12} = a_{21} = a_{22} = b_{11} = b_{12} = b_{22} = 0$ в (10). Тогда $\Phi(\lambda) = \pi E_{\alpha,2}(\lambda\pi^\alpha)$, и, если $E_{\alpha,2}(\lambda\pi^\alpha) \neq 0$ для любого $\lambda \in \sigma(A)$, то решение краевой задачи (21)-(23) существует, единственно и имеет вид

$$u(t) = E_\alpha(t^\alpha A)u_1 + tE_{\alpha,2}(t^\alpha A)(\pi E_{\alpha,2}(\pi^\alpha A))^{-1}(u_2 - E_\alpha(\pi^\alpha A)u_1) =$$

$$= (\pi E_{\alpha,2}(\pi^\alpha A))^{-1}((E_\alpha(t^\alpha A)\pi E_{\alpha,2}(\pi^\alpha A) - E_\alpha(\pi^\alpha A)tE_{\alpha,2}(t^\alpha A))u_1 + tE_{\alpha,2}(t^\alpha A)u_2)\ . \quad (24)$$

При $\alpha = 2$ формула (24) примет вид

$$u(t) = (\pi E_{2,2}(\pi^2 A))^{-1}((E_2(t^2 A)\pi E_{2,2}(\pi^2 A) - E_2(\pi^2 A)tE_{2,2}(t^2 A))u_1 + tE_{2,2}(t^2 A)u_2),$$

и происходит «стыковка» решений для уравнений дробного и целого порядков.

2. Рассмотрим краевую задачу с дробными производными Римана-Лиувилля

$$D^\alpha \nu(t) = A\nu(t), \quad 0 < t < T, \quad (25)$$

и краевыми условиями общего вида

$$a_{11}I^{2-\alpha}\nu(0) + a_{12}D^{\alpha-1}\nu(0) + b_{11}D^\delta\nu(T) + b_{12}D^\gamma\nu(T) = \nu_1, \quad (26)$$

$$a_{21}I^{2-\alpha}\nu(0) + a_{22}D^{\alpha-1}\nu(0) + b_{21}D^\delta\nu(T) + b_{22}D^\gamma\nu(T) = \nu_2, \quad (27)$$

где $0 \le \delta < \gamma < \alpha$. В уравнении (25), по-прежнему, будем считать A ограниченным оператором в банаховом пространстве .

Определение 2. *Функция $\nu(t) \in C((0,T],E)$ такая, что $D^{\alpha-2}\nu(t) \in C([0,T],E)\bigcap C^2((0,T],E)$, $D^{\alpha-1}\nu(t) \in C([0,T],E)$, называется решением задачи (25)-(27), если она удовлетворяет уравнению (25) на интервале $(0,T)$ и краевым условиям (26), (27).*

Введем следующие обозначения:

$$B_{11} = a_{11}I + b_{11}T^{\alpha-2-\delta}E_{\alpha,\alpha-\delta-1}(T^\alpha A) + b_{12}T^{\alpha-2-\gamma}E_{\alpha,\alpha-1-\gamma}(T^\alpha A), \quad (28)$$

$$B_{12} = a_{12}I + b_{11}T^{\alpha-1-\delta}E_{\alpha,\alpha-\delta}(T^\alpha A) + b_{12}T^{\alpha-1-\gamma}E_{\alpha,\alpha-\gamma}(T^\alpha A), \quad (29)$$

$$B_{21} = a_{21}I + b_{21}T^{\alpha-2-\delta}E_{\alpha,\alpha-\delta-1}(T^\alpha A) + b_{22}T^{\alpha-2-\gamma}E_{\alpha,\alpha-1-\gamma}(T^\alpha A), \quad (30)$$

$$B_{22} = a_{22}I + b_{21}T^{\alpha-1-\delta}E_{\alpha,\alpha-\delta}(T^\alpha A) + b_{22}T^{\alpha-1-\gamma}E_{\alpha,\alpha-\gamma}(T^\alpha A), \quad (31)$$

$$\begin{gathered}\Phi(\lambda) = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})I + (a_{11}b_{21} - a_{21}b_{11})T^{\alpha-1-\delta}E_{\alpha,\alpha-\delta}(\lambda T^\alpha) + \\ +(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})T^{\alpha-1-\gamma}E_{\alpha,\alpha-\gamma}(\lambda T^\alpha) + (a_{22}b_{11} - a_{12}b_{21})T^{\alpha-2-\delta}E_{\alpha,\alpha-\delta-1}(\lambda T^\alpha) + \\ +(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})T^{2\alpha-3-\delta-\gamma}E_{\alpha,\alpha-\delta-1}(\lambda T^\alpha)E_{\alpha,\alpha-\gamma}(\lambda T^\alpha) + \\ +(a_{22}b_{12} - a_{12}b_{22})T^{\alpha-2-\gamma}E_{\alpha,\alpha-\gamma-1}(\lambda T^\alpha) + \\ +(b_{12}b_{21} - b_{11}b_{22})T^{2\alpha-3-\delta-\gamma}E_{\alpha,\alpha-\delta}(\lambda T^\alpha)E_{\alpha,\alpha-\gamma-1}(\lambda T^\alpha). \quad (32)\end{gathered}$$

Теорема 2. *Пусть A — ограниченный оператор в банаховом пространстве E и $\Phi(\lambda) \neq 0$ для любого λ принадлежащего спектру $\sigma(A)$ оператора A . Тогда для любых $v_1, v_2 \in E$ решение краевой задачи (25)-(27) существует, единственно и имеет вид*

$$\begin{gathered}v(t) = (B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21})^{-1}((t^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}(t^\alpha A)B_{22} - t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha A)B_{21})v_1 + \\ +(t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha A)B_{11} - t^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}(t^\alpha A)B_{12})v_2)\ . \quad (33)\end{gathered}$$

□ Пусть $v(t)$ — решение уравнения (25), удовлетворяющее условиям $D^{\alpha-2}v(0)=w_0$, $D^{\alpha-1}v(0)=w_1$. Тогда (см. [1, с. 601], [5, с. 13])

$$v(t)=t^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}(t^{\alpha}A)w_0+t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(t^{\alpha}A)w_1, t\in[0,T]\,. \tag{34}$$

Вычислим нужные нам дробные производные. Имеем

$$I^{2-\alpha}v(t)=I^{2-\alpha}(t^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}(t^{\alpha}A)w_0+t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(t^{\alpha}A)w_1)=E_{\alpha}(t^{\alpha}A)w_0+tE_{\alpha,2}(t^{\alpha}A)w_1,$$

$$D^{\alpha-1}v(t)=D^{\alpha-1}(t^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}(t^{\alpha}A)w_0+t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(t^{\alpha}A)w_1)=$$

$$=t^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(t^{\alpha}A)^k}{\Gamma(\alpha k)}w_0+E_{\alpha}(t^{\alpha}A)w_1=t^{\alpha-1}AE_{\alpha,\alpha}(t^{\alpha}A)w_0+E_{\alpha}(t^{\alpha}A)w_1,$$

$$D^{\delta}v(t)=D^{\delta}(t^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}(t^{\alpha}A)w_0+t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(t^{\alpha}A)w_1=$$

$$=t^{\alpha-2-\delta}E_{\alpha,\alpha-\delta-1}(t^{\alpha}A)w_0+t^{\alpha-1-\delta}E_{\alpha,\alpha-\delta}(t^{\alpha}A)w_1,$$

$$D^{\gamma}v(t)=t^{\alpha-2-\gamma}E_{\alpha,\alpha-\gamma-1}(t^{\alpha}A)w_0+t^{\alpha-1-\gamma}E_{\alpha,\alpha-\gamma}(t^{\alpha}A)w_1\,.$$

Учитывая граничные условия (26) и (27), составим систему

$$\begin{cases} a_{11}w_0+a_{12}w_1+b_{11}(T^{\alpha-2-\delta}E_{\alpha,\alpha-\delta-1}(T^{\alpha}A)w_0+T^{\alpha-1-\delta}E_{\alpha,\alpha-\delta}(T^{\alpha}A)w_1)+\\ \qquad +b_{12}(T^{\alpha-2-\gamma}E_{\alpha,\alpha-\gamma-1}(T^{\alpha}A)w_0+T^{\alpha-1-\gamma}E_{\alpha,\alpha-\gamma}(T^{\alpha}A)w_1)=v_1,\\ a_{21}w_0+a_{22}w_1+b_{21}(T^{\alpha-2-\delta}E_{\alpha,\alpha-\delta-1}(T^{\alpha}A)w_0+T^{\alpha-1-\delta}E_{\alpha,\alpha-\delta}(T^{\alpha}A)w_1)+\\ \qquad +b_{22}(T^{\alpha-2-\gamma}E_{\alpha,\alpha-\gamma-1}(T^{\alpha}A)w_0+T^{\alpha-1-\gamma}E_{\alpha,\alpha-\gamma}(T^{\alpha}A)w_1)=v_2 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (a_{11}I+b_{11}T^{\alpha-2-\delta}E_{\alpha,\alpha-\delta-1}(T^{\alpha}A)+b_{12}T^{\alpha-2-\gamma}E_{\alpha,\alpha-\gamma-1}(T^{\alpha}A))w_0+\\ +(a_{12}I+b_{11}T^{\alpha-1-\delta}E_{\alpha,\alpha-\delta}(T^{\alpha}A)+b_{12}T^{\alpha-1-\gamma}E_{\alpha,\alpha-\gamma}(T^{\alpha}A))w_1=v_1,\\ (a_{21}I+b_{21}T^{\alpha-2-\delta}E_{\alpha,\alpha-\delta-1}(T^{\alpha}A)+b_{22}T^{\alpha-2-\gamma}E_{\alpha,\alpha-\gamma-1}(T^{\alpha}A))w_0+\\ +(a_{22}I+b_{11}T^{\alpha-1-\delta}E_{\alpha,\alpha-\delta}(T^{\alpha}A)+b_{22}T^{\alpha-1-\gamma}E_{\alpha,\alpha-\gamma}(T^{\alpha}A))w_1=v_2. \end{cases} \tag{35}$$

Запишем систему (35) с помощью операторов (28) – (31) в виде

$$\begin{cases} B_{11}w_0+B_{12}w_1=v_1,\\ B_{21}w_0+B_{22}w_1=v_2. \end{cases} \tag{36}$$

Будем считать, что в краевых условиях (26) и (27) коэффициенты таковы, что существует $(B_{11}B_{22}-B_{12}B_{21})^{-1}$. Решая систему (36) методом исключения, получим

$$w_0=(B_{11}B_{22}-B_{12}B_{21})^{-1}(B_{22}v_1-B_{12}v_2). \tag{37}$$

$$w_1=(B_{11}B_{22}-B_{12}B_{21})^{-1}(B_{11}v_2-B_{21}v_1). \tag{38}$$

Подставляя (37), (38) в решение (34), имеем

$$v(t)=t^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}(t^{\alpha}A)(B_{11}B_{22}-B_{12}B_{21})^{-1}(B_{22}v_1-B_{12}v_2)+$$

$$+(t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha A)B_{21})(B_{11}B_{22}-B_{12}B_{21})^{-1}(B_{11}v_2-B_{21}v_1)v_1=$$
$$=(B_{11}B_{22}-B_{12}B_{21})^{-1}((t^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}(t^\alpha A)B_{22}-t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha A)B_{21})v_1+$$
$$+(t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha A)B_{11}-t^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}(t^\alpha A)B_{12})v_2),$$

что и приводит к равенству (33). ■

Отметим теперь, что из условия $\Phi(\lambda)\neq 0$ для любого $\lambda\in\sigma(A)$ вытекает существование оператора $(B_{11}B_{22}-B_{12}B_{21})^{-1}$, который с помощью контурного интеграла можно представить в виде (см. [6, с. 20])

$$(B_{11}B_{22}-B_{12}B_{21})^{-1}=((a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})I+(a_{11}b_{21}-a_{21}b_{11})T^{\alpha-1-\delta}E_{\alpha,\alpha-\delta}(\lambda T^\alpha)+$$
$$+(a_{11}b_{22}-a_{21}b_{12})T^{\alpha-1-\gamma}E_{\alpha,\alpha-\gamma}(\lambda T^\alpha)+(a_{22}b_{11}-a_{12}b_{21})T^{\alpha-2-\delta}E_{\alpha,\alpha-\delta-1}(\lambda T^\alpha)+$$
$$+(b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21})T^{2\alpha-3-\delta-\gamma}E_{\alpha,\alpha-\delta-1}(\lambda T^\alpha)E_{\alpha,\alpha-\gamma}(\lambda T^\alpha)+$$
$$+(a_{22}b_{12}-a_{12}b_{22})T^{\alpha-2-\gamma}E_{\alpha,\alpha-\gamma-1}(\lambda T^\alpha)+$$
$$+(b_{12}b_{21}-b_{11}b_{22})(T^{2\alpha-3-\delta-\gamma}E_{\alpha,\alpha-\beta}(\lambda T^\alpha)E_{\alpha,\alpha-\gamma-1}(\lambda T^\alpha))^{-1}=$$
$$=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{1}{\Phi(\lambda)}R(\lambda,A)d\lambda\,,$$

где $\Phi(\lambda)$ выражается формулой (32).

Таким образом, если решение краевой задачи существует, то оно единственно и имеет вид (33). С другой стороны, задаваемая равенством (33) функция $v(t)$ определена при любых $v_1,v_2\in E$ и, как нетрудно проверить, является решением рассматриваемой краевой задачи (25)-(27).

Заметим, что в отличие от задачи (1)-(3) условие разрешимости задачи (25)-(27) зависит и от δ и от γ, поскольку, как легко видеть из (32), $\Phi(\lambda)=\Phi_{\alpha,\delta,\gamma}(\lambda)$.

Пример 3. В частном случае, если $a_{12}=a_{22}=b_{12}=b_{22}=0$, получим задачу

$$\partial^\alpha u(t)=Au(t),\quad 0<t<T, \tag{39}$$

$$a_{11}I^{2-\alpha}v(0)+b_{11}D^\delta v(T)=v_1, \tag{40}$$

$$a_{21}I^{2-\alpha}v(0)+b_{21}D^\delta v(T)=v_2. \tag{41}$$

Подставим $a_{12}=a_{22}=b_{12}=b_{22}=0$ в (33). Тогда

$$\Phi(\lambda)=(a_{11}b_{21}-a_{21}b_{11})T^{\alpha-1-\delta}E_{\alpha,\alpha-\delta}(\lambda T^\alpha)\,.$$

Если для любого $\lambda\in\sigma(A)$ функция $\Phi^{-1}(\lambda)\neq 0$, т.е., если $a_{11}b_{21}-a_{21}b_{11}\neq 0$ и для любого $\lambda\in\sigma(A)$ функция $E_{\alpha,\alpha-\delta}(\lambda T^\alpha)\neq 0$, то для любых $u_1,\ u_2\in E$ решение краевой задачи (39) – (41) существует, единственно и имеет вид

$$v(t)=(B_{11}B_{22}-B_{12}B_{21})^{-1}\left((t^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}(t^\alpha A)b_{21}T^{\alpha-1-\delta}E_{\alpha,\alpha-\delta}(t^\alpha A)-\right.$$
$$-\,t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha A)(a_{21}I+b_{21}T^{\alpha-2-\delta}E_{\alpha,\alpha-\delta-1}(t^\alpha A))v_1+$$

$$+ t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha A)(a_{11}I + b_{11}T^{\alpha-2-\delta}E_{\alpha,\alpha-\delta-1}(t^\alpha A)) -$$
$$- t^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}(t^\alpha A)b_{11}T^{\alpha-1-\delta}E_{\alpha,\alpha-\delta}(t^\alpha A))v_2) \ . \qquad (42)$$

В заключение отметим, что при $\alpha = 2$, $\beta = \gamma = 1$, $\delta = 0$ равенства (12) и (33) совпадают, и происходит «стыковка» решений для уравнений дробного и целого порядков. В частности, если $a_{11} = b_{11} = a_{21} = b_{22} = 1$, $a_{12} = b_{12} = a_{22} = b_{21} = 0$, то

$$u(t) = v(t) = (E_2(T^2A) + E_2^2(T^2A) - TE_{2,2}(T^2A) - T^2AE_{2,2}^2(T^2A)^{-1}((E_2(t^2A)E_2(T^2A) -$$
$$- tE_{2,2}(t^2A)(I + TAE_{2,2}(T^2A))u_1 + (tE_{2,2}(t^2A)(I + E_2(T^2A)) - TE_2(t^2A)E_{2,2}(T^2A))u_2) \, .$$

Литература

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / Минск: Наука и техника, 1987.
2. Глушак А.В., Примак И.М. Краевые задачи для абстрактных дифференциальных уравнений с дробными производными / Научные ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика. – 2011. – №17(112). – Вып.24. – С.125-140.
3. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение / М.: Физматлит, 2003.
4. Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка / М.: Наука, 2005.
5. Bajlekova E. Fractional Evolution Equations in Banach Spaces / Ph. D. Thesis. Eindhoven University of Technology, 2001.
6. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / М.: Наука, 1970.

BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR ABSTRACT FRACTIONAL ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH A BOUNDED OPERATOR

I.M. Primak

Belgorod State University,
Studencheskaya St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: iilika@yandex.ru

Abstract. Conditions of unique solvability of boundary value problems are found for abstract differential equations of fractional order with a bounded operator.

Key words: boundary value problem, fractional derivative, unique solvability.