MSC 17B63

О НЕКОТОРЫХ АЛГЕБРАХ ПУАССОНА С ЭКСТРЕМАЛЬНЫМИ СВОЙСТВАМИ

С.М. Рацеев

Ульяновский государственный университет,
ул. Льва Толстого, 42, Ульяновск, 432017, Россия, e-mail: RatseevSM@mail.ru

Аннотация. Приводятся некоторые многообразия алгебр Пуассона с экстремальными свойствами, а также описывается наименьшее многообразие алгебр Пуассона, в котором не выполнено ни одно лиево стандартное тождество.

Ключевые слова: алгебра Пуассона, многообразие алгебр, рост многообразия.

На протяжении всей работы, если это специально не оговорено, предполагается, что основное поле имеет нулевую характеристику. Алгебра $A = A(+, \cdot, \{,\}, K)$ над полем K называется алгеброй Пуассона, если $A(+, \cdot, K)$ — ассоциативная коммутативная алгебра с единицей, $A(+, \{,\}, K)$ — алгебра Ли с операцией умножения $\{,\}$, которая называется скобкой Пуассона, и выполняется правило Лейбница:

$$\{a \cdot b, c\} = a \cdot \{b, c\} + \{a, c\} \cdot b, \qquad a, b, c \in A\,.$$

Алгебры Пуассона возникают в различных разделах алгебры, дифференциальной геометрии, топологии, современной теоретической физики (см., например [1]) и т.д.

Пусть $L(X)$ — свободная алгебра Ли с умножением $[,]$, где $X = \{x_1, x_2, ...\}$ — счетное множество свободных образующих. Пусть также $F(X)$ — свободная алгебра Пуассона. Обозначим через P_n пространство в $F(X)$, состоящее из всех полилинейных элементов степени n от переменных $x_1, ..., x_n$, а через P_n^L пространство полилинейных элементов степени n в свободной алгебре Ли $L(X)$.

Обозначим через $L_{\geq 2}(X)$ подалгебру в свободной алгебре Ли $L(X)$, каждый элемент которой является линейной комбинацией мономов степени ≥ 2.

Пусть V — некоторое многообразие алгебр Пуассона, $Id(V)$ — идеал тождеств многообразия V. Обозначим

$$P_n(V) = P_n/(P_n \cap Id(V)),\, c_n(V) = \dim\, P_n(V)\,.$$

Соответственно, если V_L — некоторое многообразие алгебр Ли, то

$$P_n^L(V_L) = P_n^L/(P_n^L \cap Id(V_L)),\, c_n^L(V_L) = \dim\, P_n^L(V_L)\,.$$

Лемма [2]. *Пусть A_L — некоторая алгебра Ли с лиевым умножением $[,]$ над произвольным полем K. Рассмотрим векторное пространство $A = A_L \oplus K$, в котором определим операции $\cdot$ и $\{,\}$ следующим образом:*

$$\begin{gathered}(a + \alpha) \cdot (b + \beta) = (\beta a + \alpha b) + \alpha\beta, \\ \{a + \alpha, b + \beta\} = [a, b],\; a, b \in A_L,\; \alpha, \beta \in K.\end{gathered} \tag{1}$$

Тогда полученная алгебра $(A, +, \cdot, \{,\}, K)$ *будет являться алгеброй Пуассона.*

Если многообразие V имеет экспоненциальный рост, то введем в рассмотрение нижнюю и верхнюю экспоненты:

$$\underline{EXP}(V) = \varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(V)}, \qquad \overline{EXP}(V) = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(V)}.$$

Если имеет место равенство $\underline{EXP}(V) = \overline{EXP}(V)$, то будем обозначать $EXP(V)$.

Теорема 1 [3]. *Пусть* V_L *— некоторое многообразие алгебр Ли над произвольным полем* K*, определенное системой тождеств* $\{f_i = 0 \mid f_i \in L_{\geq 2}(X),\ i \in I\}$. *Пусть также* V *— многообразие алгебр Пуассона, определенное тождествами* $f_i = 0$, $i \in I$, *и* $\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0$. *Тогда будут верны следующие утверждения.*

1. $Id(V_L) = Id(V) \cap L_{\geq 2}(X)$.

2. *Для любого* n *выполнено равенство*

$$c_n(V) = 1 + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \cdot \dim\, P_k^L(V_L)\,.$$

3. *Если существует* $EXP(V_L)$, *то* $EXP(V) = EXP(V_L) + 1$, *в частности, если найдутся такие действительные числа* $d \geq 0$, α *и* β, *что для всех достаточно больших* n *выполнено двойное неравенство*

$$n^\alpha d^n \leq c_n^L(V_L) \leq n^\beta d^n\,,$$

то найдутся такие γ *и* δ, *что для всех достаточно больших* n *будет выполнено такое двойное неравенство:*

$$n^\gamma (d+1)^n \leq c_n(V) \leq n^\delta (d+1)^n\,.$$

4. *Если поле* K *бесконечно и некоторая алгебра Лп* A_L *порождает многообразие* V_L, *то алгебра* $A = A_L \oplus K$ *с операциями* (1) *будет порождать многообразие* V.

5. *Пусть поле* K *бесконечно и* W *— некоторое собственное подмногообразие в* V. *Тогда идеал тождеств* $Id(W) \cap L_{\geq 2}(X)$ *определяет некоторое собственное подмногообразие в* V_L.

Теорема 2 [2]. *Пусть* V *— нетривиальное многообразие алгебр Пуассона над произвольным полем. Тогда*

(i) *либо* $c_n(V) \geq 2^{n-1}$ *для любого* n,

(ii) *либо найдется такой многочлен* $f(x)$ *степени* $N \geq 0$ *пз кольца* $\mathbb{Q}[x]$, *что для любого* $n \geq N$ *будет выполнено равенство* $c_n(V) = f(n)$.

На сегодняшний день известны всего пять многообразий алгебр Ли почти полиномиального роста. Для однородности записи обозначим их через V_0, V_1, V_2, V_3, V_4.

$V_0 = \mathrm{var}(\mathrm{sl}_2)$ — многообразие алгебр Ли, порожденное алгеброй матриц порядка 2 со следом 0. Это единственное известное многообразие алгебр Ли почти полиномиального роста, не являющееся разрешимым. Оно подробно исследовано в работах Ю.П. Размыслова [4, 15] и В. Дренски [16].

Многообразие алгебр Ли $V_1 = N_2A$ определяется таким тождеством (см. [17]):

$$[[x_1, x_2], [x_3, x_4], [x_5, x_6]] = 0\,.$$

Многообразие V_2 построено И.Б. Воличенко в работах [18, 19]. Оно порождается алгеброй Ли $A_L = \begin{pmatrix} G & G \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где G — бесконечномерная алгебра Грассмана, а 0 — нулевая алгебра. Это многообразие является наименьшим в классе многообразий алгебр Ли, в которых не выполняется ни одно лиево стандартное тождество.

Многообразия V_3 и V_4 построены С.П. Мищенко следующим образом [20]. Рассмотрим кольцо многочленов $R = K[t]$ от переменной t, трехмерную нильпотентную алгебру Гейзенберга N_3 с базисом $\{a, b, c\}$ и таблицей умножения $ba = c, ac = bc = 0$, и двумерную метабелеву (разрешимую ступени 2) алгебру M_2 с базисом $\{h, e\}$ и таблицей умножения $he = h$. Гомоморфизмы $\sigma : N_3 \to \mathrm{Der}\, R$ и $\phi : M_2 \to \mathrm{Der}\, R$ определяются так:

$$\sigma(e)f(t) = tf'(t),\, \sigma(a)f(t) = tf(t)\,;$$

$$\phi(a)f(t) = f'(t),\, \phi(b)f(t) = tf(t),\, \phi(c)f(t) = f(t)\,.$$

Полупрямые произведения алгебр $N_L = R \leftthreetimes N_3$, $M_L = R \leftthreetimes M_2$ порождают соответственно многообразия V_3 и V_4.

Обозначим через $\mathrm{sl}_2(K) \oplus K$, $A_L \oplus K$, $N_L \oplus K$ и $M_L \oplus K$ алгебры Пуассона с операциями (1), а через V_0^P, V_2^P, V_3^P и V_4^P — многообразия алгебр Пуассона, порожденные соответственно алгебрами $\mathrm{sl}_2(K) \oplus K$, $A_L \oplus K$, $N_L \oplus K$ и $M_L \oplus K$. Также обозначим через V_1^P многообразие алгебр Пуассона, порожденное тождествами

$$\{\{x_1, x_2\}, \{x_3, x_4\}, \{x_5, x_6\}\} = 0,\;\; \{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0.$$

Теорема 3. *Экспоненты многообразий V_i^P, $i = 0, ..., 4$, существуют, причем*

$$EXP(V_0^P) = 4,\;\; EXP(V_1^P) = 3,\;\; EXP(V_2^P) = 3,\;\; EXP(V_3^P) = 4,\;\; EXP(V_4^P) = 3.$$

Если V — некоторое собственное подмногообразие одного из многообразий V_i^P, $0 \le i \le 4$, то рост многообразия V либо ограничен полиномом, либо найдется такое β, что для любого n будет выполнено неравенство

$$2^{n-1} \le c_n(V) \le n^\beta 2^n. \tag{2}$$

□ Для экспонент рассмотренных выше многообразий алгебр Ли почти полиномиального роста выполнены следующие равенства: $EXP(V_0) = 3$ (см. [16]), $EXP(V_1) = 2$ (см. [17]), $EXP(V_2) = 2$ (см. [18, 19]), $EXP(V_3) = 3$ и $EXP(V_4) = 2$ (см. [20]). Поэтому значения экспонент многообразий V_i^P, $i = 0, ..., 4$, следуют из данных равенств и теоремы 1.

Пусть V — некоторое собственное подмногообразие одного из многообразий V_i^P, $i = 0, ..., 4$. Тогда идеал тождеств $Id(V) \cap L_{\ge 2}(X)$ определяет некоторое собственное подмногообразие в V_i, которое будет иметь рост не выше полиномиального. Поэтому, с учетом теорем 1 и 2, либо рост многообразия V будет ограничен полиномом, либо для него будет выполнено двойное неравенство (2). ■

Теорема 4. *V_2^P является наименьшим многообразием алгебр Пуассона, в котором не выполнено ни одно лиево стандартное тождество.*

□ Доказательство следует из работ [18, 19] и теоремы 1. ■

Литература

1. Борисов А.В., Мамаев И.С. Пуассоновы структуры и алгебры Ли в гамильтоновой механике / М.-Иж.: РХД, 1999.
2. Рацеев С.М. Коммутативные алгебры Лейбница-Пуассона полиномиального роста // Вестн. Сам. гос. ун-та. Естеств. сер. – 2012. – 94;№ 3/1. – С.54-65.
3. Рацеев С.М. О многообразии алгебр Пуассона с тождеством $\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0$ // Тольятти: Изд-во ТГУ. – Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов. Материалы III международной школы-конференции, посвящённой 75-летию Э.Б. Винберга (25-30 июня 2012 г.), 2012. – С.43-45.
4. Размыслов Ю.П. О конечной базируемости тождеств матричной алгебры второго порядка над полем характеристики нуль // Алгебра и логика. – 1973. – 12;1. – С.83-113.
5. Размыслов Ю.П. Конечная базируемость некоторых многообразий алгебр // Алгебра и логика. – 1974. – 13;6. – С.685-693.
6. Дренски В.С. Представления симметрической группы и многообразия линейных алгебр // Матем. сб. – 1981. – 115;1. – С.98-115.
7. Мищенко С.П. Многообразия алгебр Ли с двуступенно нильпотентным коммутантом // Весцi АН БССР: Сер. фiз. матем. наук. – 1987. – 6. – С.39-43.
8. Воличенко И.Б. Об одном многообразии алгебр Ли, связанном со стандартными тождествами // Весцi АН БССР: Сер. фiз. матем. наук. – 1980. – 1. – С.23-30.
9. Воличенко И.Б. Об одном многообразии алгебр Ли, связанном со стандартными тождествами // Весцi АН БССР: Сер. фiз. матем. наук. – 1980. – 2. – С.22-29.
10. Мищенко С.П. О многообразиях разрешимых алгебр Ли // ДАН СССР. – 1990. – 313;6. – С.1345-1348.

ON VARIETIES OF POISSON ALGEBRAS WITH EXTREMAL PROPERTIES

S.M. Ratseev

Ulyanovsk State University,
Lev Tolstoy St., 42, Ulyanovsk, 432017, Russia, e-mail: RatseevSM@mail.ru

Abstract. Varieties of Poisson algebras with extremal properties are studied. It is proposed the least variety of Poisson algebras where all Lie standard identities are not hold.

Key words: Poisson algebra, variety of algebras, growth of variety.