MSC 70H05

# О НИЛЬПОТЕНТНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ ОПЕРАЦИИ КОММУТИРОВАНИЯ МАТРИЦ

**Ю.П. Вирченко**

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru

**Аннотация.** Доказывается, что любой оператор $\mathsf{K}_{\mathcal{A}}$ в линейном пространстве $n\times n$-матриц над $\mathbb{C}$, порожденный коммутатором с фиксированной матрицей $\mathcal{A}$ скалярного типа не имеет нильпотентных элементов.

**Ключевые слова:** нильпотентность, коммутатор, матрица, уравнение Ляпунова.

Пусть $\mathfrak{L}$ – линейное пространство и $\mathsf{K}$ – линейный оператор в нем. Элемент $x \in \mathfrak{L}$ называется нильпотентным порядка $l \in \mathbb{N}$ для оператора $\mathsf{K}$, если $\mathsf{K}^l x = 0$, $\mathsf{K}^{l-1}x \neq 0$.

Зафиксируем число $n \in \mathbb{N}$. Пусть $\mathcal{A}$ – произвольная $n \times n$-матрица. Оператор $\mathsf{K}_{\mathcal{A}}$ в линейном пространстве $\mathfrak{M}_n = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ $n \times n$-матриц над $\mathbb{C}$, порождаемый этой матрицей посредством формулы $\mathsf{K}_{\mathcal{A}}\mathcal{X} = [\mathcal{A}, \mathcal{X}]$ назовем оператором коммутирования. $n \times n$-матрицу $\mathcal{A}$ назовем матрицей скалярного типа (см. [1]), если она посредством некоторого преобразования $\mathcal{U}\mathcal{A}\mathcal{U}^{-1}$ на основе невырожденной матрицы $\mathcal{U}$, $\det \mathcal{U} \neq 0$ приводится к диагональной матрице. При этом такая матрица допускает разложение $\mathcal{A} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathcal{P}_i$, где $\langle \alpha_i; i = 1 \div n\rangle$ – набор ее собственных чисел и $\langle \mathcal{P}_i; i = 1 \div n\rangle$ – соответствующий ему набор одномерных проекторов на собственные направления.

**Лемма.** *Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ - $n \times n$-матрицы скалярного типа*

$$\mathcal{A} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathcal{P}_i\,, \qquad \mathcal{B} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathcal{Q}_i$$

*с наборами собственных чисел $\langle \alpha_i; i = 1 \div n\rangle$, $\langle \beta_j; j = 1 \div n\rangle$ и соответствующими им наборами $n \times n$-матриц одномерного проектирования $\langle \mathcal{P}_i; i = 1 \div n\rangle$, $\langle \mathcal{Q}_j; j = 1 \div n\rangle$ такими, что $\mathcal{P}_i\mathcal{P}_j = \delta_{ij}\mathcal{P}_i$, $\mathcal{Q}_i\mathcal{Q}_j = \delta_{ij}\mathcal{Q}_j$, $i, j = 1 \div n$. Тогда для разрешимости относительно $n \times n$-матрицы $\mathcal{X}$ линейного матричного уравнения Ляпунова*

$$\mathcal{A}\mathcal{X} - \mathcal{X}\mathcal{B} = \mathcal{S} \tag{1}$$

*при фиксированной $n \times n$-матрице $\mathcal{S}$ необходимо и достаточно, чтобы $\mathcal{P}_i\mathcal{S}\mathcal{Q}_j = 0$ для любой пары $\langle i, j\rangle$, для которой имеет место $\alpha_i = \beta_j$. При этом все решения уравнения (1) выражаются формулой*

$$\mathcal{X} = \sum_{\langle i,j\rangle\,:\,\alpha_i \neq \beta_j} \frac{\mathcal{P}_i\mathcal{S}\mathcal{Q}_j}{\alpha_i - \beta_j} + \sum_{\langle i,j\rangle\,:\,\alpha_i = \beta_j} \gamma_{ij}\mathcal{P}_i\mathcal{Q}_j\,, \tag{2}$$

*где $\gamma_{ij}$ – произвольные числа.*

*В частности, для единственности решения уравнения (1) необходимо и достаточно, чтобы $\alpha_i \ne \beta_j$ для всех пар $\langle i,j\rangle$, $i,j = 1 \div n$.*

□ Умножая уравнение (1) слева на $\mathcal{P}_i$ и справа на $\mathcal{Q}_j$ при произвольных значениях $i,j = 1 \div n$, имеем

$$(\alpha_i - \beta_j)\mathcal{P}_i\mathcal{X}\mathcal{Q}_j = \mathcal{P}_i\mathcal{S}\mathcal{Q}_j\,, \tag{3}$$

так как $\mathcal{P}_i\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{P}_i = \alpha_i\mathcal{P}_i$, $\mathcal{Q}_j\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{Q}_j = \beta_j\mathcal{Q}_j$. Откуда следует утверждаемое в лемме необходимое условие для разрешимости уравнения (1). Для тех же пар $\langle i,j\rangle$, для которых выполняется $\alpha_i \ne \beta_j$, имеет место равенство

$$\mathcal{P}_i\mathcal{X}\mathcal{Q}_j = \frac{\mathcal{P}_i\mathcal{S}\mathcal{Q}_j}{\alpha_i - \beta_j}\,. \tag{4}$$

Положим

$$\mathcal{P}_i\mathcal{X}\mathcal{Q}_j = \gamma_{ij}\mathcal{P}_i\mathcal{Q}_j \tag{5}$$

с произвольными числами $\gamma_{ij}$ для тех пар $\langle i,j\rangle$, для которых $\alpha_i = \beta_j$, что допускается равенством (3). Пользуясь тем, что $\sum_{i=1}^n \mathcal{P}_i = \sum_{j=1}^n \mathcal{Q}_j = \mathbf{1}$, определим с помощью (3) сумму

$$\mathcal{X} = \sum_{i,j=1}^n \mathcal{P}_i\mathcal{X}\mathcal{Q}_j\,,$$

которая совпадает с (2). ■

**Следствие.** *Пусть матрица $\mathcal{A}$ имеет скалярный тип $\mathcal{A} = \sum_{i=1}^n \alpha_i\mathcal{P}_i$ с набором собственных чисел $\langle \alpha_i; i = 1\div n\rangle$ и соответствующим ему набором $n\times n$-матриц одномерного проектирования $\langle \mathcal{P}_i; i = 1 \div n\rangle$. Для того, чтобы линейное матричное уравнение*

$$\mathcal{A}\mathcal{X} - \mathcal{X}\mathcal{A} = \mathcal{S} \tag{6}$$

*относительно $n \times n$-матрицы $\mathcal{X}$ имело решение при фиксированной $n \times n$-матрице $\mathcal{S}$ необходимо и достаточно, чтобы $\mathcal{P}_i\mathcal{S}\mathcal{P}_j = 0$ для всех пар $\langle i,j\rangle$ среди всевозможных значений $i,j = 1 \div n$, для которых выполняется $\alpha_i = \alpha_j$.*

Докажем следующее утверждение.

**Теорема.** *Пусть матрица $\mathcal{A} \in \mathfrak{M}_n$ имеет скалярный тип. Тогда, если для соответствующего ей оператора $\mathsf{K}_{\mathcal{A}}$ выполняется $\mathsf{K}^l_{\mathcal{A}}\mathcal{X} = 0$, $l > 1$, $l \in \mathbb{N}$, то $\mathcal{X} \in \operatorname{Ker}\mathsf{K}_{\mathcal{A}}$, то есть этот оператор не имеет нильпотентных элементов.*

□ Пусть матрица $\mathcal{S} \in \mathfrak{M}_n$ такова, что $[\mathcal{S},\mathcal{A}] = 0$. Заменим матрицу $\mathcal{S}$ в этом коммутаторе ее разложением по набору одномерных операторов, порождаемых полным набором одномерных проекторов $\langle \mathcal{P}_k; k = 1 \div n\rangle$,

$$\mathcal{S} = \sum_{i,j=1}^n \mathcal{P}_i\mathcal{S}\mathcal{P}_j\,.$$

В результате, получаем

$$[\mathcal{A},\mathcal{S}] = \sum_{i,j=1}^{n}[\sum_{j=1}^{n}\alpha_k\mathcal{P}_k, \mathcal{P}_i\mathcal{S}\mathcal{P}_j] = \sum_{i,j=1}^{n}(\alpha_i-\alpha_j)\mathcal{P}_i\mathcal{S}\mathcal{P}_j\,.$$

Откуда, для тех пар $\langle i,j\rangle$, для которых $\alpha_i \ne \alpha_j$ должно выполняться $\mathcal{P}_i\mathcal{S}\mathcal{P}_j = 0$.

Положим теперь $\mathcal{S} = \mathsf{K}_{\mathcal{A}}\mathcal{X}$. Тогда, для матрицы $\mathcal{X}$ выполняется $\mathsf{K}^2_{\mathcal{A}}\mathcal{X} = 0$ и, на основании доказанного, из этого равенства следует, что $\mathcal{P}_i\,(\mathcal{S})\,\mathcal{P}_j = 0$ для всех пар $\langle i,j\rangle$, для которых $\alpha_i \ne \alpha_j$. С другой стороны, это означает, что существует решение $\mathcal{X}$ уравнения (6), что возможно только, если имеет место $\mathcal{P}_i\mathcal{S}\mathcal{P}_j = 0$ для всех пар $\langle i,j\rangle$, для которых $\alpha_i = \alpha_j$. Объединяя оба указанных свойства матрицы $\mathcal{S}$, получаем, что она равна

$$\mathcal{S} = \sum_{i,j=1}^{n}\mathcal{P}_i\mathcal{S}\mathcal{P}_j = 0\,,$$

то есть $\mathsf{K}_{\mathcal{A}}\mathcal{X} = 0$. ■

## Литература


1. Глазман И.М., Любич Ю.И. Конечномерный линейный анализ / М.: Наука, 1969.
2. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / М.: Наука, 1966.


## ON NILPOTENT ELEMENTS OF MATRIX COMMUTATION OPERATION

**Yu.P. Virchenko**

Belgorod State University,
Studencheskaya St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail:virch@bsu.edu.ru

**Abstract.** It is proved that any operator $\mathsf{K}_H$ in the linear space of $N \times N$-matrices over $\mathbb{C}$ generated by the commutator with the fixed matrix $\mathcal{H}$ having the scalar type does not have nilpotent elements.

**Key words:** nilpotentness, commutator, matrix, Lyapunov's equation.