MSC 58C35

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ГИПЕРРАСПРЕДЕЛЕНИЙ

В.А. Есин

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, г.Белгород, 308007, Россия, e-mail: esin@bsu.edu.ru

Аннотация. Найдены критерии интегрируемости специального гиперраспределения Δ_{p-1} на подмногообразии V_p евклидова пространства E_{p+2}.

Ключевые слова: подмногообразие, внешнее дифференцирование, гиперраспределение, аффинная связность.

К подмногообразию $V_p \subset E_{p+2}$ присоединим подвижной репер

$$R = (x, e_i, e_\alpha), \quad (i, j, k = 1, \dots, p;\ \alpha, \beta, \gamma = p+1, p+2)\,,$$

где орты e_i принадлежат касательному пространству $T_x(V_p)$ в точке $x \in V_p$, а векторы e_α образуют ортонормированный базис нормальной плоскости $N_2(x)$. Инфинитезимальные перемещения такого репера определяются уравнениями

$$dx = \omega^i e_i, \quad de_i = \omega_i^j e_j + \omega_i^\alpha e_\alpha, \quad de_\alpha = \omega_\alpha^i e_i + \omega_\alpha^\beta e_\beta.$$

Дифференцируя систему $\omega^\alpha = 0$ уравнений подмногообразия внешним образом и применяя лемму Картана, получим

$$\omega_i^\alpha = b_{ij}^\alpha \omega^j \qquad (b_{ij}^\alpha = b_{ji}^\alpha).$$

Здесь b_{ij}^α — второй основной тензор подмногообразия, $\gamma_{ij} = e_i e_j$ — компоненты метрического тензора, γ^{ij} — контравариантные компоненты этого тензора. При этом

$$d\gamma_{ij} = \gamma_{ik}\omega_j^k + \gamma_{jk}\omega_i^k, \quad d\gamma^{ij} = -\gamma^{ik}\omega_k^j - \gamma^{jk}\omega_k^i\ .$$

Дифференцирование тождеств $e_i e_\alpha = 0$ и $e_\alpha e_\beta = \delta_{\alpha\beta}$ приводит к соотношениям

$$\omega_\alpha^k + \gamma^{ki}\omega_i^\alpha = 0, \quad \omega_\alpha^\beta + \omega_\beta^\alpha = 0.$$

Рассмотрим на $V_p \subset E_{p+2}$ гиперраспределение Δ_{p-1}. В дальнейшем подвижной репер $R = (x, e_i, e_\alpha)$ выбираем таким образом, чтобы $e_a \in \Delta_{p-1}(x)$, а e_p ортогонально $\Delta_{p-1}(x)$ $a, b = 1, \dots, p-1$). В этом случае условием интегрируемости распределения Δ_{p-1} является интегрируемость уравнения $\omega^p = 0$.

Поскольку

$$D\omega^p = \omega^a \Lambda \omega_a^b = \omega^a \Lambda \gamma_{ab}^p \omega^b = \gamma_{ab}^p \omega^a \Lambda \omega^b,$$

(здесь γ_{ab}^k — коэффициенты аффинной связности) то это условие равносильно симметричности тензора γ_{ab}^p.

Определим на $V_p \subset E_{p+2}$ поле линейного оператора $F(f^i_j)$, полагая

$$Ft = \nabla_t e_p = \nabla_{t^i e_i} e_p = t^i \nabla_{e_i} e_p = t^i \gamma^k_{pi} e_k = f^k_i t^i e_k.$$

Рассмотрим ограничение этого оператора на Δ_{p-1}, то есть оператор

$$f(f^a_b), \quad (f^a_b = \gamma^a_{pb}).$$

Дифференцируя тождества $e_a e_p = 0$, получаем

$$\gamma^p_{ac} + \gamma^b_{pc}\gamma_{ab} = 0,$$

то есть

$$\gamma^p_{ac} = -f^b_c \gamma_{ab}.$$

Из последних равенств заключаем, что справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Гиперраспределение Δ_{p-1} вполне интегрируемо тогда и только тогда, когда оператор $f(f^a_b)$ симметричен.*

В работе [3] показано, что гиперраспределение Δ_{p-1} инвариантно связано со сферическим изображением $\breve{V}_p$ нашего подмногообразия. Поле двумерных нормалей к $\breve{V}_p$ индуцирует на V_p аффинную связность $\breve{\nabla}$. Там же показано, что эта связность $\breve{\nabla}$ будет эквиаффинной тогда и только тогда, когда гиперраспределение Δ_{p-1} будет вполне интегрируемым. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Для подмногообразия $V_p \subset E_{p+2}$ следующие утверждения равносильны:*

1. *Гиперраспределение Δ_{p-1} вполне интегрируемо.*
2. *Связность $\breve{\nabla}$ эквиаффинна.*
3. *Оператор $f(f^a_b)$ симметричен.*

Литература

1. Базылев В.Т. Геометрия дифференцируемых многообразий / М.: Высшая школа, 1989. – 222 с.
2. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии, Т.1 / М.: Наука, 1981. – 344 с.
3. Есин В.А. К геометрии распределений на $V_p \subset E_{p+2}$ // Кишинев: Тезисы 9 Всесоюзной геометрической конференции, 1988. – С.112-113.

ON THE CLASS OF HYPERDISTRIBUTIONS

V.A. Esin

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: esin@bsu.edu.ru

Abstract. It is found the integrability criterium of the special hyperdistribution Δ_{p-1} on the submanifold V_p in euclidian space E_{p+2}.

Key words: submanifold, exterior differentiation, hyperdistribution, affine connection.