MSC 26A15

ПРИБЛИЖЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ВЫСОКОЙ ГЛАДКОСТИ ПРЯМОУГОЛЬНЫМИ СУММАМИ ФУРЬЕ

О.А. Новиков, О.Г. Ровенская

Донбасский государственный педагогический университет,
ул. Г. Батюка, 19, Славянск, 84116, Украина, e-mail: o.rovenskaya@mail.ru

Аннотация. Получены асимптотические формулы для верхних граней уклонений прямоугольных сумм Фурье на классах периодических функций многих переменных высокой гладкости. Эти соотношения в некоторых важных случаях обеспечивают решение известной задачи Колмогорова-Никольского для прямоугольных сумм Фурье и указанных классов функций.

Ключевые слова: (ψ, β)-производная, прямоугольные суммы Фурье, задача Колмогорова-Никольского.

1. Введение. Следуя работе [1] (см. также [2]), классы $\overline{\psi}$-интегралов периодических функций многих переменных, позволяющие учитывать по отдельности свойства обыкновенных и смешанных частных производных, будем задавать следующим образом.

Пусть R^m — евклидово пространство с елементами $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_m)$, $T^m = \prod\limits_{i=1}^{m} [-\pi; \pi]$ — m-мерный куб с ребром 2π,

$$N^m = \{\vec{x} \in R^m | x_i \in \mathbb{N},\ \ i = 1, 2, ..., m\},$$

$$N_*^m = \{\vec{x} \in R^m | x_i \in N_* = \mathbb{N} \cup \{0\},\ \ i = 1, 2, ..., m\},$$

$$N_i^m = \{\vec{x} \in R^m | x_i \in \mathbb{N},\ \ x_j \in N_*,\ \ i \neq j\},$$

$$E^m = \{\vec{x} \in R^m | x_i \in \{0; 1\},\ \ i = 1, 2, ..., m\}.$$

Через $L(T^m)$ обозначим множество 2π-периодических по каждой переменной суммируемых на кубе T^m функций $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_m)$.

Пусть $f \in L(T^m)$. Каждой паре точек $\vec{s} \in E^m$, $\vec{k} \in N_*^m$ поставим в соответствие величину

$$a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f) = \frac{1}{\pi^m} \int\limits_{T^m} f(\vec{x}) \prod_{i=1}^{m} \cos\left(k_i x_i - \frac{s_i \pi}{2}\right) dx_i\,.$$

Величины $a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f)$, $\vec{s} \in E^m$, $\vec{k} \in N_*^m$ являются коэффициентами Фурье функции $f \in L(T^m)$ [1].

Каждому вектору $\vec{k} \in N_*^m$ поставим в соответствие основную гармонику функции $f(\vec{x})$,

$$A_{\vec{k}}(f; \vec{x}) = \sum_{\vec{s} \in E^m} a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f) \prod_{i=1}^{m} \cos\left(k_i x_i - \frac{s_i \pi}{2}\right)$$

и гармонику, сопряженную по переменной x_i,

$$A_{\vec{k}}^{\vec{e_i}}(f;\vec{x}) = \sum_{\vec{s}\in E^m} a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f) \prod_{j\in\overline{m}\setminus\{i\}} \cos\left(k_j x_j - \frac{s_j\pi}{2}\right)\cos\left(k_i x_i - \frac{(s_i+1)\pi}{2}\right).$$

Следуя [1], ряд Фурье функции $f(\vec{x})$ определим следующим соотношением

$$S[f] = \sum_{\vec{k}\in N_*^m} \frac{1}{2^{q(\vec{k})}} A_{\vec{k}}(f;\vec{x}),$$

в котором $q(\vec{k})$ — количество нулевых координат вектора $\vec{k}$.

Пусть $G_{\vec{n}} = \prod\limits_{i=1}^{m}[1;n_i-1]$ — прямоугольный параллелепипед, соответствующий вектору $\vec{n}$. Прямоугольной частичной суммой ряда Фурье будем называть тригонометрический полином вида

$$S_{\vec{n}}(f;\vec{x}) = \sum_{\vec{k}\in G_{\vec{n}}} \frac{1}{2^{q(\vec{k})}} A_{\vec{k}}(f;\vec{x}).$$

Пусть $f\in L(T^m)$ и $\psi_{ij}(k)$, $\Psi_{ij}(k)$, $i=1,2,...,m$, $j=1,2$ — фиксированные наборы систем чисел, $k\in N_*$. Положим

$$\overline{\psi}_i(k) = \sqrt{\psi_{i1}^2(k)+\psi_{i2}^2(k)}, \quad \overline{\Psi}_i(k) = \sqrt{\Psi_{i1}^2(k)+\Psi_{i2}^2(k)}$$

и будем считать, что выполнены условия: $\overline{\psi}_i(k)\neq 0$, $\overline{\Psi}_i(k)\neq 0$, $k\in\mathbb{N}$, $\psi_{i1}(0)=1$, $\Psi_{i1}(0)=1$, $\psi_{i2}(0)=0$, $\Psi_{i2}(0)=0$, $i=1,2,...,m$.

Пусть ряд

$$\sum_{\vec{k}\in N_i^m} \frac{1}{2^{q(\vec{k})}\overline{\psi}_i^2(k_i)}\left[\psi_{i1}(k_i)A_{\vec{k}}(f;\vec{x}) - \psi_{i2}(k_i)A_{\vec{k}}^{\vec{e_i}}(f;\vec{x})\right]$$

является рядом Фурье некоторой функции из $L(T^m)$. Обозначим ее символом $f^{\overline{\psi}_i}(\vec{x}) = \dfrac{\partial^{\overline{\psi}_i} f(\vec{x})}{\partial x_i}$ и назовем $\overline{\psi}_i$-производной функции $f(\vec{x})$ по переменной x_i, $i=1,2,...,m$.

Пусть $\overline{m}=\{1,2,...,m\}$. Для фиксированного r-элементного множества $\mu(r)\subset\overline{m}$, $\mu(r)=\{i_1,i_2,...,i_r\}$, смешанной $\overline{\Psi}_\mu$-производной по переменным x_i, $i\in\mu(r)$, по аналогии с определением обыкновенной смешанной частной производной, будем называть функцию $f^{\overline{\Psi}_\mu}(\vec{x})$, которая задается соотношением

$$f^{\overline{\Psi}_\mu}(\vec{x}) = \frac{\partial^{\overline{\Psi}_{i_r}}\partial^{\overline{\Psi}_{i_{r-1}}}...\partial^{\overline{\Psi}_{i_1}} f(\vec{x})}{\partial x_{i_r}\partial x_{i_{r-1}}...\partial x_{i_1}}\,.$$

Для заданного набора функций ψ_{ij}, Ψ_{ij}, $i=1,2,...,m$, $j=1,2$, символом $C_\infty^{m\psi}$ обозначим множество непрерывных функций $f\in L(T^m)$, имеющих почти везде ограниченные $\overline{\Psi}_\mu$- и $\overline{\psi}_i$-производные:

$$\operatorname{ess\,sup}|f^{\overline{\Psi}_\mu}(\vec{x})|\le 1, \qquad \operatorname{ess\,sup}|f^{\overline{\psi}_i}(\vec{x})|\le 1, \qquad i=1,2,...,m, \qquad \mu\subset\overline{m}, \qquad \vec{x}\in T^m\,.$$

Если для наборов функций $\psi_{ij}(k)$ и $\Psi_{ij}(k)$, $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2$, определяющих класс $C_\infty^{m\bar\psi}$, существуют функции $\psi_i(k)$, $\Psi_i(k)$ и числа β_i, β_i^*, $i = 1, 2, ..., m$, такие, что

$$\psi_{i1}(k) = \psi_i(k)\cos\frac{\beta_i\pi}{2}\,, \qquad \psi_{i2}(k) = \psi_i(k)\sin\frac{\beta_i\pi}{2}\,,$$

$$\Psi_{i1}(k) = \Psi_i(k)\cos\frac{\beta_i^*\pi}{2}\,, \qquad \Psi_{i2}(k) = \Psi_i(k)\sin\frac{\beta_i^*\pi}{2}\,, \qquad i = 1, 2, ..., m,$$

то класс $C_\infty^{m\bar\psi}$ является классом (ψ, β)-дифференцируемых периодических функций многих переменных и обозначается $C_{\beta,\infty}^{m\psi}$ [2]. В этом случае для производных используют естественные обозначения $f_{\beta_i}^{\psi_i}(\vec x)$ и $f_{\beta_\mu}^{\Psi_\mu}(\vec x)$. Если $m = 2$ и, кроме того, для чисел $r > 0$, $s > 0$, $r_1 \geq r$, $s_1 \geq s$ выполнены условия $\Psi_1(k) = k^{-r}$, $\Psi_2(k) = k^{-s}$, $\psi_1(k) = k^{-r_1}$, $\psi_2(k) = k^{-s_1}$, $\beta_1 = r$, $\beta_1^* = s$, $\beta_2 = r_1$, $\beta_2^* = s_1$, то классы $C_{\beta,\infty}^{2\psi}$ совпадают с классами $W_{r_1,s_1}^{r,s}$. В работе [3] изучены вопросы приближения классов $W_{r_1,s_1}^{r,s}$ прямоугольными суммами Фурье

$$S_{\vec n}(f;\vec x) = S_{n_1,n_2}(f;\vec x) = \sum_{k_1=0}^{n_1-1}\sum_{k_2=0}^{n_2-1} 2^{-q(\vec k)} A_{\vec k}(f;\vec x).$$

Там же для верхних граней уклонений прямоугольных сумм Фурье $S_{\vec n}(f;\vec x)$, взятых по классам $W_{r_1,s_1}^{r,s}$, получено асимптотическое равенство при $n_i \to \infty$, $i = 1, 2$

$$\mathcal{E}(W_{r_1,s_1}^{r,s}; S_{\vec n}) = \sup_{f\in W_{r_1,s_1}^{r,s}} ||f(\vec x) - S_{\vec n}(f;x)||_C =$$

$$= \frac{4\ln n_1}{\pi^2 n_1^{r_1}} + \frac{4\ln n_2}{\pi^2 n_2^{s_1}} + O(1)\left(\frac{\ln n_1 \ln n_2}{n_1^r n_2^s} + \frac{1}{n_1^{r_1}} + \frac{1}{n_2^{s_1}}\right).$$

В случае, когда функции, задающие класс, определяются соотношениями $\psi_i(k) = q_i^k$, $q_i \in (0;1)$, $\Psi_i(k) = Q_i^k$, $Q_i \in (0;1)$, $i = 1, 2$, классы $C_{\beta,\infty}^{m\psi}$ обозначаются $C_{\beta,\infty}^{mq}$.

В работе [4] С.М. Никольский получил асимптотическую формулу для верхних граней уклонений сумм Фурье на классах аналитических функций одной переменной $C_{\beta,\infty}^{q}$

$$\mathcal{E}(C_{\beta,\infty}^{q}; S_n) = \sup_{f\in C_{\beta,\infty}^{q}} ||f(x) - S_n(f;x)||_C = \frac{8q^n}{\pi^2}K(q) + O(1)q^n n^{-1},$$

где

$$K(q) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1 - q^2\sin^2 t}}$$

— полный эллиптический интеграл первого рода. С.Б. Стечкин [15] этот результат получил другим способом, что позволило уточнить остаточный член последнего равенства.

В роботе [16] рассмотрены вопросы приближения классов функций многих переменных $C_{\beta,\infty}^{mq}$ прямоугольными суммами Фурье $S_{\vec n}(f;\vec x)$ и получена асимптотическая при $n_i \to \infty$, $i = 1, 2, ..., m$ формула

$$\mathcal{E}(C_{\beta,\infty}^{mq}; S_{\vec n}) = \sup_{f\in C_{\beta,\infty}^{mq}} ||f(\vec x) - S_{\vec n}(f;\vec x)||_C =$$

$$= \frac{8}{\pi^2}\sum_{i=1}^{m} q_i^{n_i}\mathrm{K}(q_i) + O(1)\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{q_i^{n_i}}{n_i(1-q_i)} + \sum_{r=2}^{m}\sum_{\mu(r)\subset\overline{m}}\prod_{j\in\mu(r)}\frac{Q_j^{n_j}}{1-Q_j}\right).$$

Обозначим символом D_q множество последовательностей $\psi(k)$, $k\in\mathbb{N}$, для которых выполняются соотношения

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = q,\;\; q\in(0;1).$$

Для верхних граней уклонений сумм Фурье на классах функций одной переменной $C^{\psi}_{\beta,\infty}$, $\psi(k)\in D_q$ в роботе [17] получена асимптотическая при $n\to\infty$ формула

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,\infty};S_n) = \psi(n)\left(\frac{8}{\pi^2}K(q) + O(1)(\frac{q}{n(1-q)} + \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2})\right),$$

где

$$\varepsilon_n = \sup_{k\geq n}\left|\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q\right|.$$

В настоящей работе получена асимптотическая при $n_i\to\infty$, $i=1,2,...,m$ формула, которая является многомерным аналогом последнего равенства для классов функций $C^{m\psi}_{\beta,\infty}$, $\psi_i(k)\in D_{q_i}$, $q_i\in(0;1)$, $\Psi_i(k)\ \in D_{Q_i}$, $Q_i\in(0;1)$, $i=1,2,...,m$.

2. Основной результат. Основным результатом работы является следующее утверждение.

Теорема. *Пусть* $\psi_i(x)\in D_{q_i}$, $\Psi_i(x)\in D_{Q_i}$, $q_i\in(0;1)$, $Q_i\in(0;1)$, β_i, $\beta_i^*\in\mathbb{R}$, $i=1,2,...,m$. *Тогда при* $n_i\to\infty$, $i=1,2,...,m$ *имеет место асимптотическая формула*

$$\mathcal{E}(C^{m\psi}_{\beta,\infty};S_{\vec{n}}) = \sup_{f\in C^{m\psi}_{\beta,\infty}}||f(\vec{x}) - S_{\vec{n}}(f;\vec{x})||_C = \frac{8}{\pi^2}\sum_{i=1}^{m}\psi_i(n_i)K(q_i)+$$

$$+\,O(1)\left[\sum_{i=1}^{m}\frac{\psi_i(n_i)q_i}{(1-q_i)n_i} + \sum_{i=1}^{m}\frac{\psi_i(n_i)\varepsilon_{n_i}(\psi_i)}{(1-q_i)^2} + \sum_{r=2}^{m}\sum_{\mu(r)\subset\overline{m}}\sum_{\xi\subset\mu(r)}\prod_{s\in\mu}\frac{\Psi_s(n_s)}{1-Q_s}\prod_{j\in\xi}\frac{\varepsilon_{n_j}(\Psi_j)}{1-Q_j}\right], \quad (1)$$

где

$$K(q) = \int_0^{\pi/2}\frac{dt}{\sqrt{1-q^2\sin^2 t}}$$

— полный эллиптический интеграл первого рода,

$$\varepsilon_m(\psi) = \sup_{k\geq m}\left|\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q\right|,\quad q = \lim_{k\to\infty}\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)}\;, \quad (2)$$

$O(1)$ *— величина, равномерно ограниченная относительно* n_i, q_i, Q_i, β_i, β_i^*, $i=1,2,...,m$.

□ Используя результат работы [18], показывается, что

$$\rho_{\vec{n}}(f;\vec{x}) \overset{\mathrm{df}}{=} f(\vec{x}) - S_{\vec{n}}(f;\vec{x}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_{\beta_i}^{\psi_i}(\vec{x} + t_i\vec{e}_i) \sum_{k=n_i}^{\infty} \psi_i(k_i) \cos\left(k_i t_i + \frac{\beta_i \pi}{2}\right) dt_i +$$

$$+ \sum_{r=2}^{m} (-1)^{r+1} \sum_{\mu(r)\subset\overline{m}} \frac{1}{\pi^r} \int_{T^r} f_{\beta_\mu}^{\Psi_\mu}\left(\vec{x} + \sum_{j\in\mu(r)} t_j\vec{e}_j\right) \times$$

$$\times \prod_{j\in\mu(r)} \sum_{\nu_j=n_j}^{\infty} \Psi_{\nu_j}(\nu_j) \cos\left(\nu_j t_j + \frac{\beta_j^* \pi}{2}\right) dt_j\,.$$

Далее понадобится вспомогательное утверждение [17].

Лемма. *Пусть $\psi(k) \in D_q$, $q \in (0;1)$. Тогда для любой последовательности чисел γ_k, $k = 1, 2, \ldots$ имеет место равенство*

$$\sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) \cos(kt - \gamma_k) = \psi(n) \left[q^{-n} \sum_{k=n}^{\infty} q^k \cos(kt - \gamma_k) + r_n(t,\psi) \right],$$

в котором

$$r_n(t,\psi) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\prod_{l=0}^{i-1} \frac{\psi(n+l+1)}{\psi(n+l)} - q^i \right) \cos((n+i)t - \gamma_{n+i})\,.$$

Кроме того, начиная с некоторого n_0,

$$|r_n(t,\psi)| \le \frac{\varepsilon_n(\psi)}{(1 - q - \varepsilon_n(\psi))(1-q)}\,,$$

где $\varepsilon_n(\psi)$ определено (2).

Используя утверждение леммы, имеем

$$\rho_{\vec{n}}(f;\vec{x}) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_{\beta_i}^{\psi_i}(\vec{x} + t_i\vec{e}_i) \left[\psi_i(n_i) q_i^{-n_i} \sum_{k=n_i}^{\infty} q_i^{k_i} \cos\left(k_i t_i + \frac{\beta_i \pi}{2}\right) + \psi_i(n_i) r_{n_i}(t_i, \psi_i) \right] dt_i +$$

$$+ \sum_{r=2}^{m} (-1)^{r+1} \sum_{\mu(r)\subset\overline{m}} \frac{1}{\pi^r} \int_{T^r} f_{\beta_\mu}^{\Psi_\mu}\left(\vec{x} + \sum_{j\in\mu(r)} t_j\vec{e}_j\right) \times$$

$$\times \prod_{j\in\mu(r)} \left[\Psi_j(n_j) Q_j^{-n_j} \sum_{\nu_j=n_j}^{\infty} Q_j^{\nu_j} \cos\left(\nu_j t_j + \frac{\beta_j^* \pi}{2}\right) + \Psi_j(n_j) r_{n_j}(t_j, \Psi_j) \right] dt_j.$$

Поскольку имеет место равенство

$$\prod_{j\in\mu(r)} (a_j - b_j) = \sum_{\varsigma\subset\mu(r)} \prod_{p\in\mu\setminus\varsigma} a_p \prod_{j\in\varsigma} (-b_j),$$

то

$$\rho_{\vec{n}}(f;\vec{x}) = \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{m}\psi_i(n_i)q_i^{-n_i}\int_{-\pi}^{\pi} f_{\beta_i}^{\psi_i}(\vec{x}+t_i\vec{e}_i)\sum_{k=n_i}^{\infty}q_i^{k_i}\cos(k_it_i+\frac{\beta_i\pi}{2})dt_i+$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{m}\psi_i(n_i)\int_{-\pi}^{\pi} f_{\beta_i}^{\psi_i}(\vec{x}+t_i\vec{e}_i)r_{n_i}(t_i,\psi_i)dt_i +$$

$$+\sum_{r=2}^{m}(-1)^{r+1}\sum_{\mu(r)\subset\overline{m}}\frac{1}{\pi^r}\int_{T^r} f_{\beta_\mu}^{\Psi_\mu}\Big(\vec{x}+\sum_{j\in\mu(r)}t_j\vec{e}_j\Big)\times$$

$$\times\sum_{\xi\subset\mu(r)}\prod_{s\in\mu\setminus\xi}\Psi_s(n_s)Q_s^{-n_s}\sum_{\nu_s=n_s}^{\infty}Q_s^{\nu_s}\cos\Big(\nu_st_s+\frac{\beta_s^*\pi}{2}\Big)dt_s\cdot\prod_{j\in\xi}\Psi_j(n_j)r_{n_j}(t_j,\Psi_j)dt_j.$$

Выполняя элементарные преобразования [19, с. 123], находим

$$\sum_{k=n}^{\infty}q^k\cos\left(kt+\frac{\beta\pi}{2}\right) =$$

$$= q^n\left(\sum_{k=0}^{\infty}q^k\cos kt\cos(nt+\frac{\beta\pi}{2}) - \sum_{k=0}^{\infty}q^k\sin kt\sin\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{q^n}{1-2q\cos t+q^2}\left((1-q\cos t)\cos\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}\right) - q\sin t\sin\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{q^n}{\sqrt{1-2q\cos t+q^2}}\cos\left(nt+\frac{\beta\pi}{2}+\operatorname{arctg}\frac{q\sin t}{1-q\cos t}\right).$$

Тогда

$$\rho_{\vec{n}}(f;\vec{x}) = \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{m}\frac{\psi_i(n_i)}{q_i^{n_i}}\int_{-\pi}^{\pi} f_{\beta_i}^{\psi_i}(\vec{x}+t_i\vec{e}_i)h_{q_i,n_i}^{\beta_i}(t_i)dt_i +$$

$$+O(1)\left[\sum_{i=1}^{m}\frac{\psi_i(n_i)\varepsilon_{n_i}(\psi_i)}{(1-q_i)^2}+\sum_{r=2}^{m}\sum_{\mu(r)\subset\overline{m}}\sum_{\xi\subset\mu(r)}\prod_{s\in\mu}\frac{\Psi_s(n_s)}{1-Q_s}\prod_{j\in\xi}\frac{\varepsilon_{n_j}(\Psi_j)}{1-Q_j}\right], \tag{3}$$

где

$$h_{q_i,n_i}^{\beta_i}(t_i) = \sum_{k=n_i}^{\infty}q_i^{k_i}\cos\left(k_it_i+\frac{\beta_i\pi}{2}\right).$$

Так как $f(\vec{x})\in C_{\beta,\infty}^{m\psi}$, то

$$\mathcal{E}(C_{\beta,\infty}^{m\psi};S_{\vec{n}}) \le \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{m}\frac{\psi_i(n_i)}{q_i^{n_i}}\int_{-\pi}^{\pi}|h_{q_i,n_i}^{\beta_i}(t_i)|dt_i +$$

$$+ O(1)\Bigg[\sum_{i=1}^{m}\frac{\psi_i(n_i)\varepsilon_{n_i}(\psi_i)}{(1-q_i)^2} + \sum_{r=2}^{m}\sum_{\mu(r)\subset\overline{m}}\sum_{\xi\subset\mu(r)}\prod_{s\in\mu}\frac{\Psi_s(n_s)}{1-Q_s}\prod_{j\in\xi}\frac{\varepsilon_{n_j}(\Psi_j)}{1-Q_j}\Bigg]. \qquad (4)$$

Найдем функцию $f_0(\vec{x}) \in C^{m\psi}_{\beta,\infty}$, для которой имеет место соотношение

$$\rho_{\vec{n}}(f_0;\vec{0}) = \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{m}\frac{\psi_i(n_i)}{q_i^{n_i}}\int_{-\pi}^{\pi}|h^{\beta_i}_{q_i,n_i}(t_i)|dt_i +$$

$$+O(1)\Bigg[\sum_{i=1}^{m}\frac{\psi_i(n_i)q_i}{(1-q_i)n_i} + \sum_{i=1}^{m}\frac{\psi_i(n_i)\varepsilon_{n_i}(\psi_i)}{(1-q_i)^2} +$$

$$+ \sum_{r=2}^{m}\sum_{\mu(r)\subset\overline{m}}\sum_{\xi\subset\mu(r)}\prod_{s\in\mu}\frac{\Psi_s(n_s)}{1-Q_s}\prod_{j\in\xi}\frac{\varepsilon_{n_j}(\Psi_j)}{1-Q_j}\Bigg]. \qquad (5)$$

На основании соотношения (3), для каждой $f \in C^{m\psi}_{\beta,\infty}$ можно записать

$$\rho_{\vec{n}}(f;\vec{0}) = \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{m}\frac{\psi_i(n_i)}{q_i^{n_i}}\int_{-\pi}^{\pi}f^{\overline{\psi}_i}(\vec{0}+t_i\vec{e}_i)h^{\beta_i}_{q_i,n_i}(t_i)dt_i+$$

$$+ O(1)\Bigg[\sum_{i=1}^{m}\frac{\psi_i(n_i)\varepsilon_{n_i}(\psi_i)}{(1-q_i)^2} + \sum_{r=2}^{m}\sum_{\mu(r)\subset\overline{m}}\sum_{\xi\subset\mu(r)}\prod_{s\in\mu}\frac{\Psi_s(n_s)}{1-Q_s}\prod_{j\in\xi}\frac{\varepsilon_{n_j}(\Psi_j)}{1-Q_j}\Bigg]. \qquad (6)$$

Покажем, что каждую функцию sign $h^{\beta_i}_{n_i}(t_i)$, $i = 1, 2, ..., m$ можно изменить на периоде на множестве точек, мера которого не превышает $Kq_in_i^{-1}(1-q_i)^{-1}$, где K — некоторая постоянная, так, чтобы для полученных функций $y_i(t_i)$ выполнялось условие $\int_{-\pi}^{\pi} y_i(t_i)dt_i = 0$. Рассмотрим функцию

$$h^{\beta_i}_{n_i}(t_i) = \frac{q_i^{n_i}}{\sqrt{1-2q_i\cos t_i + q_i^2}}\cos\left(n_it_i + \frac{\beta_i\pi}{2} + \Phi(t_i)\right),$$

где

$$\Phi(t_i) = \operatorname{arctg}\frac{q_i\sin t_i}{1-q_i\cos t_i}\,.$$

На интервале $(0;\pi)$, на котором функция $\Phi(t_i)$ непрерывна и выполняется условие

$$0 \le \Phi(t_i) \le \frac{\pi}{2}\,. \qquad (7)$$

Кроме того, для $\forall t_i \in (0;\pi)$

$$|\Phi^{'}(t_i)| = \left|\frac{q_i\cos t_i - q_i^2}{1-2q_i\cos t_i + q_i^2}\right| \le \frac{q_i}{1-q_i}\,. \qquad (8)$$

Функция $h_{n_i}^{\beta_i}(t_i)$ на промежутке $(0;\pi)$ обращается в нуль и изменяет знак только в точках вида

$$t_{ik} = \frac{\frac{\pi}{2} + k\pi - \frac{\beta_i \pi}{2} - \Phi(t_{ik})}{n_i}\ , \quad k = 3, 4, ..., n_i - 1.$$

Найдем оценки длин промежутков $[t_{ik}; t_{i(k+1)}]$ и $[t_{i(k+1)}; t_{i(k+2)}]$.

$$t_{i(k+1)} - t_{ik} = \frac{\pi}{n_i} - \frac{\Phi(t_{ik+1}) - \Phi(t_{ik})}{n_i}\ ,$$

$$t_{i(k+2)} - t_{i(k+1)} = \frac{\pi}{n_i} - \frac{\Phi(t_{i(k+2)}) - \Phi(t_{i(k+1)})}{n_i}\ .$$

Учитывая (8), видим, что модуль разности $|(t_{i(k+2)} - t_{i(k+1)}) - (t_{i(k+1)} - t_{ik})|$ не превышает

$$\frac{|\Phi(t_{i(k+2)}) - \Phi(t_{i(k+1)})| + |\Phi(t_{i(k+1)}) - \Phi(t_{ik})|}{n_i} \le \frac{2q_i(t_{i(k+1)} - t_{ik})}{n_i(1 - q_i)}\ .$$

На основании (7) имеем

$$\frac{2k\pi - \beta_i\pi}{2n_i} \le t_{ik} \le \frac{\pi + 2k\pi - \beta_i\pi}{2n_i}\ ,$$

$$\frac{2k\pi + 2\pi - \beta_i\pi}{2n_i} \le t_{i(k+1)} \le \frac{3\pi + 2k\pi - \beta_i\pi}{2n_i}\ ,$$

$$\frac{\pi}{2n_i} \le t_{i(k+1)} - t_{ik} \le \frac{3\pi}{2n_i}\ . \tag{9}$$

Поэтому разность длин промежутков $[t_{ik}; t_{i(k+1)}]$ и $[t_{i(k+1)}; t_{i(k+2)}]$ не больше, чем $\dfrac{3q_i\pi}{2n_i^2(1 - q_i)}$. Функция $h_{n_i}^{\beta_i}(t_i)$ сохраняет знак на этих промежутках, причем правее и левее от $t_{i(k+1)}$ знаки разные. Таким образом, функцию sign $h_{n_i}^{\beta_i}(t_i)$ на промежутке $[t_{ik}; t_{i(k+2)}]$ можно переопределить на множестве, мера которого не превосходит $\dfrac{3q_i\pi}{2n_i^2(1 - q_i)}$ так, чтобы для полученной функции $y_i(t_i)$ среднее значение на периоде было равным нулю. На основании (9), количество промежутков, на которых функция $h_{n_i}^{\beta_i}(t_i)$ изменяет знак, не превосходит $4n_i$. Аналогичные рассуждения можно провести для промежутка $(-\pi; 0)$. Значит, функции, построенные на $(-\pi;\pi)$, имеют свойства

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} y_i(t_i)dt_i = 0$$

и отличаются от sign $h_{n_i}^{\beta_i}(t_i)$ на множествах, меры которых не превосходят $Kq_in_i^{-1}(1 - q_i)^{-1}$, $i = 1, 2, ..., m$.

Далее построим функции $\varphi_i(\vec{t}) = y_i(t_i)$, $\vec{t} \in T^m$ и функции $f_i(\vec{x})$ такие, что $(f_i)^{\overline{\psi}_i} = \varphi_i(\vec{x})$. Можно показать (см., напр., [16]), что функция

$$f_0(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{m} f_i(\vec{x})$$

удовлетворяет условию $(f_0)^{\overline{\psi}_i}(\vec{x}) = \varphi_i(\vec{x})$, $i = 1, 2, ..., m$. Поэтому $f_0(\vec{x}) \in C^{m\psi}_{\beta,\infty}$ и имеет место следующее соотношение

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f_0)^{\overline{\psi}_i}(\vec{0} + t_i\vec{e}_i) h^{\beta_i}_{q_i,n_i}(t_i) dt_i = \int_{-\pi}^{\pi} |h^{\beta_i}_{q_i,n_i}(t_i)| dt_i + O(1) \cdot \frac{q_i^{n_i+1}}{n_i(1-q_i)} \,.$$

На основании (6) можно сделать вывод, что для найденной функции $f_0(\vec{x})$ имеет место соотношение (5). Объединяя (4) и (5), получаем

$$\mathcal{E}(C^{m\psi}_{\beta,\infty}; S_{\vec{n}}) = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{m} \frac{\psi_i(n_i)}{q_i^{n_i}} \int_{-\pi}^{\pi} |h^{\beta_i}_{q_i,n_i}(t_i)| dt_i \, +$$

$$+ \, O(1) \left[\sum_{i=1}^{m} \frac{\psi_i(n_i) q_i}{(1-q_i) n_i} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\psi_i(n_i) \varepsilon_{n_i}(\psi_i)}{(1-q_i)^2} + \sum_{r=2}^{m} \sum_{\mu(r) \subset \overline{m}} \sum_{\xi \subset \mu(r)} \prod_{s \in \mu} \frac{\Psi_s(n_s)}{1-Q_s} \prod_{j \in \xi} \frac{\varepsilon_{n_j}(\Psi_j)}{1-Q_j} \right].$$

Из результатов работы [4] следует, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} |h^{\beta_i}_{q_i,n_i}(t_i)| dt_i = \frac{8 q_i^{n_i}}{\pi} K(q_i) + O(1) \, \frac{q_i^{n_i}}{n_i} \,, \qquad i = 1, 2, ..., m \,.$$

Объединяя два последних равенства, получаем асимптотическую формулу (1). ■

Заключение. Отметим, что при выполнении условий

$$q_i = Q_i, \qquad i = 1, 2, ..., m \,,$$

асимптотическое соотношение (1) обеспечивает решение соответствующей задачи Колмогорова–Никольского [19, с. 57].

Литература

1. Степанец А.И., Пачулиа Н.Л. Кратные суммы Фурье на множествах (ψ, β)-дифференцируемых функций // Укр. мат. журн. – 1991. – 43, № 4. – С.545-555.
2. Ласурия Р.А. Кратные суммы Фурье на множествах $\overline{\psi}$-дифференцируемых функций // Укр. мат. журн. – 2003. – 55,№ 7. – С.911-918.
3. Степанец А.И. Приближение некоторых классов дифференцируемых периодических функций двух переменных суммами Фурье // Укр. мат. журн. – 1973. – 25,№ 5. – С.599-609.
4. Никольский С.М. Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1946. – 10, № 3. – С.207-256.

5. Стечкин С.Б. Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1980. – 45. – С. 126-151.
6. Рукасов В.И., Новиков О.А., Величко В.Е. [и др.] Приближение периодических функций высокой гладкости многих переменных прямоугольными суммами Фурье // Труды Ин-та прикладной математики и механики НАН Украины. – 2008. – 16. – С.163-170.
7. Степанец А.И., Сердюк А.С. Приближения суммами Фурье и наилучшие приближения на классах аналитических функций // Укр. мат. журн. – 2000. – 52,№ 3. – С.375-395.
8. Ровенская О.Г. Интегральные представления уклонений прямоугольных линейных средних рядов Фурье на классах $C^{m\overline{\psi}}$ // Научный вестник Черновицкого национального университета. Сер. Математика. – 2011. – 1,№ 3. – С.99-104.
9. Степанец А.И. Классификация и приближение периодических функций / К. : Наук. думка, 1987. – 268 с.

APPROXIMATION OF PERIODIC FUNCTIONS OF HIGH SMOOTHNESS BY RIGHT-ANGLED FOURIER SUMS

O.A. Novikov, O.G. Rovenska

Donbass State Pedagogical University,
G. Batyuk St., 19, Slavyansk, 84116, Ukraine, e-mail: o.rovenskaya@mail.ru

Abstract. Asymptotic equalities for upper bounds of deviations of right-angled Fourier sums on classes of high smoothness periodical functions wight many variables are obtained. These equalities guarantee the solvability of the Kolmogorov-Hikol'skii problem for right-angled Fourier sums on specified classes of functions.

Key words: (ψ, β)-derivative, right-angled Fourier sums, Kolmogorov-Nikol'skii's problem.