MSC 47G99

C_0-ОПЕРАТОРНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ И КОРРЕКТНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ УРАВНЕНИЙ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

В.А. Костин, М.Н. Небольсина, Салим Бадран

Воронежский государственный университет,
Университетская пл. 1, Воронеж, 394006, Россия, e-mail: vlkostin@mail.ru,
marinanebolsina@yandex.ru

Аннотация. В работе устанавливается корректная разрешимость операторных уравнений вида $\sum_{m=0}^{n} a_m A^m u = f$, где A-генератор полугруппы класса C_0 операторов, действующих в банаховом пространстве E, $f \in E$. Результаты применяются к задачам для дифференциальных уравнений с операторами дробного дифференцирования в пространствах функций непреобразуемых по Лапласу.

Ключевые слова: корректная разрешимость, генератор полугруппы класса C_0, гипервозрастающие и гиперубывающие весовые функции.

Введение

В настоящее время все более актуальными становятся приложения дифференциальных уравнений с дробными производными в механике, гидродинамике, теории тепломассопереноса, радиофизике и т.д. (см. [1]-[5]). Однако, как правило, проводимые при этом исследования касаются только вопросов существования решений соответствующих задач и их интегро-дифференциальных представлений. Вопрос же устойчивости этих решений по исходным данным, один из основных при установлении корректной разрешимости (см. [1]-[5]), в этих работах не обсуждается.

Как известно, понятие корректной постановки задач математической физики, было введено Ж. Адамаром в связи с определением наиболее «естественных» граничных условий для различных типов дифференциальных уравнений, что на языке функционального анализа означает следующее. Пусть U- и F-метрические пространства. Рассмотрим операторное уравнение

$$Au = f \ , \tag{1}$$

где $f \in F$, $u \in U$. Задача (1) называется *корректной*, если выполнены условия:

1) уравнение (1) разрешимо для любых $f \in F$ единственным образом;

2) оператор A^{-1}, определенный на всем F, является непрерывным, т.е. имеет место неравенство

$$\|A^{-1} f\|_U \leq M \|f\|_F \ , \tag{2}$$

где константа M не зависит от $f \in F$.

Важное место в классе корректных задач занимают задачи в которых U и F плотно вложены в некоторое банахово пространство B и неравенство (2) понимается в смысле $\|.\|_B$. Такие задачи будем называть *равномерно корректными*. Классические результаты в исследовании таких задач для дифференциальных уравнений в банаховых пространствах получены С.Г. Крейном. Здесь фундаментальную роль играет теория полугрупп преобразований, развитая в работах Э. Хилле, Р. Филлипса, К. Иосиды и др.

В настоящем сообщении устанавливается равномерно корректная разрешимость задач для дифференциальных уравнений с дробными производными. При этом применяемые здесь методы функционального анализа позволяют рассматривать случаи когда не возможно применение преобразования Лапласа, которое является основным в дробно-дифференциальных моделях.

§1. Корректная разрешимость C_0-полиномиальной задачи

Пусть E-банахово пространство и A-генератор полугруппы преобразований $U(t)$, $t \geq 0$ класса C_0, действующей в E и удовлетворяющей оценке

$$\|U(t)\| \leq Me^{-\omega t}. \tag{1.1}$$

Это значит, что область определения $\mathbb{D}(A)$ оператора A плотна в E, а область его значений $\mathbb{R}(A)$ совпадает со всем пространством E. Резольвентное множество этого оператора содержит комплексную полуплоскость $\operatorname{Re}\lambda > -\omega$ и для степеней резольвенты $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ выполнены оценки

$$\|R^m(\lambda, A)\| \leq \frac{M}{(Re\lambda + \omega)^m}\ , \tag{1.2}$$

$m = 1, 2, ..., M$ и ω из (1.1).

В соответствии с [7], для оператора A определены многочлены

$$P_n(A)u = \sum_{k=0}^{n} a_k A^k u\ , \tag{1.3}$$

$u \in \mathbb{D}(A^n)$, $a_k \in \mathbb{C}$, $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость. При этом $\mathbb{D}(A^n)$ плотно в E, и спектр оператора $P_n(A)$ совпадает с множеством $P_n(\Lambda(A))$, где $\Lambda(A)$ — спектр оператора A [7] с. 125. Многочлены $P_n(A)$ будем называть C_0-операторными многочленами (см.[10]).

Пользуясь подходом В.П. Маслова, примененного в [6] с.12 к операции $A = \dfrac{d}{dx}$, обозначим множество операторов вида (1.3) через $K[A]$, а через $K[x]$ обозначим множество полиномов над полем комплексных чисел $x \in \mathbb{C}$,

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k. \tag{1.4}$$

Также как и в [6] с.12 полином $P_n(x)$, отвечающий оператору $P_n(A)$, будем называть *символом оператора* $P_n(A)$.

Очевидно, что множества $K[x]$ и $K[A]$ изоморфны, при этом сумма полиномов $K[x]$ переходит в сумму операторов $K[A]$, а произведение в произведение. В силу этого изоморфизма каждому разложению

$$P_n(x) = a_n \prod_{i=1}^{m} (x - \alpha_i)^{k_i} \ , \qquad \sum_{i=1}^{n} k_i = m$$

соответствует представление

$$P_n(A) = a_n \prod_{i=1}^{m} (A - \alpha_i I)^{k_i}, \tag{1.5}$$

где α_i-корни полинома $P_n(x)$, k_i-их кратность, I-тождественный оператор.

Рассмотрим задачу отыскания решения уравнения

$$\mathbb{A}u = P_n(A)u = f \ , \tag{1.6}$$

где $u \in \mathbb{D}(A^n)$, $f \in E$. Здесь справедлива следующая

Теорема 1.1. *Если корни многочлена $P_n(x)$ принадлежат резольвентному множеству оператора A, то задача (1.6) равномерно корректна, ее решение представимо в виде*

$$u = \frac{1}{a_n} \prod_{i=1}^{m} R^{k_i}(\alpha_i, A) f \ , \tag{1.7}$$

где $R(\alpha_i, A)$ – значения резольвенты оператора A в точках α_i; и справедлива оценка

$$\|u\| \le \frac{M}{|a_n|} \prod_{i=1}^{m} (\mathrm{Re}\alpha_i + \omega)^{-k_i} \|f\| \ . \tag{1.8}$$

□ Существование и единственность решения задачи (1.6) следует из непосредственного применения оператора $\mathbb{A}$ к элементу u, представленным соотношением (1.7), и из того, что ядро резольвенты генератора полугруппы класса C_0 состоит из одного нуля.

Для доказательства неравенства (1.8) воспользуемся известным соотношением

$$R(\lambda, A)f = \int_0^\infty e^{-\lambda t} U(t) f dt \ , \qquad \mathrm{Re}\,\lambda > -\omega, \tag{1.9}$$

из которого следует более общее равенство

$$\prod_{i=1}^{p} R(\lambda_i, A) f = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty e^{-\sum_{i=1}^{p} \lambda_i t_i} U\Big(\sum_{i=1}^{p} t_i\Big) f dt_1 \dots dt_p \ . \tag{1.10}$$

Пользуясь (1.10), оценим

$$\Big\| \prod_{i=1}^{p} R(\lambda_i, A) f \Big\| \le \int_0^\infty \dots \int_0^\infty e^{-\sum_{i=1}^{p} \lambda_i t_i} \Big\| U(\sum_{i=1}^{p} t_i) \Big\| dt_1 \dots dt_p \ ,$$

$$\|f\| \leq \frac{M}{\prod_{i=1}^{p}(\operatorname{Re}\lambda_i + \omega)}\|f\|\,. \tag{1.11}$$

Наконец, из (1.7), оценки (1.11)), получаем (1.8) и доказательство теоремы. ■

Следствие 1.1. *Если корни α_i действительные, то оценка принимает вид*

$$\|u\| \leq \frac{M}{|P_n(-\omega)|}\|f\|\ . \tag{1.12}$$

В качестве другого следствия, рассмотрим задачу о разрешимости уравнения

$$P_n(A)u = Q_r(A)f, \tag{1.13}$$

где $Q_r(A) = \sum\limits_{j=0}^{r} b_j A^j$ — C_0-операторный многочлен степени $r < n$, $f \in \mathbb{D}(A^r)$.

В этом случае, применяя оператор $\mathbb{A}^{-1}$ в (1.13) получим представление решения

$$u = \mathbb{A}^{-1}f = \prod_{i=1}^{m} R^{k_i}(\lambda_i, A)Q_r(A)f\ . \tag{1.14}$$

Отсюда, пользуясь очевидным неравенством

$$\|AR(\lambda, A)\| \leq 1 + |\lambda|\cdot\|R(\lambda, A)\|\ , \tag{1.15}$$

получаем доказательство ограниченности оператора $\mathbb{A}^{-1}$.

2. Гипервозрастающие и гиперубывающие весовые функции

Обозначим через Φ_m^+ класс монотонно возрастающих при $t > 0$ функций $\rho_+(t) > 0$ и таких, что при некотором $m > 0$ выполняется соотношение

$$\rho_+'(t) - m\rho_+(t) \geq 0\ . \tag{2.1}$$

Так как из (2.1) при $t \to \infty$ следует оценка $\rho_+(t) \geq \rho_0\exp(mt)$ $(\rho_0 > 0)$, то классы таких весовых функций будем называть *гипервозрастающими*, а $\inf m$, при котором выполняется (2.1) будем называть *символом* гипервеса весовой функции $\rho_+(t)$. Например, для весов вида

$$\rho_+(t) \;=\; t\exp(\exp\, t), \qquad m = 1. \tag{2.2}$$

Заметим, что веса, как угодно сильно отличающиеся порядком роста при $t \to \infty$, могут иметь одинаковые символы.

Нетрудно видеть, что символы произведения весов складываются. Так, если m_1 порядок роста веса ρ_1, а m_2 – веса ρ_2, то для $\rho_+(t) = \rho_1(t)\cdot\rho_2(t)$ имеем соотношения

$$\rho_+'(t) = \rho_1'(t)\cdot\rho_2(t) + \rho_1(t)\cdot\rho_2'(t) \geq m_1\rho_1\cdot\rho_2 + m_2\rho_1\rho_2 = (m_1 + m_2)\rho_+\ .$$

Отсюда при $m+\lambda>0$ следуют оценки

$$(e^{\lambda t}\rho_+(t)\leq\frac{1}{m+\lambda}(e^{\lambda t}\cdot\rho_+(t))'\ ,\tag{2.3}$$

$$\int\limits_0^t e^{\lambda s}\cdot\rho_+(s)ds\leq\frac{e^{\lambda t}}{m+\lambda}\rho_+(t)\ .\tag{2.4}$$

Кроме того, по индукции устанавливается оценка для n-кратного интеграла, $n=1,2,\dots$,

$$J_+^n\rho_+(t)=\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^t(t-s)^{n-1}\rho_+(s)ds\leq\frac{\rho_+(t)}{m^n}\ .\tag{2.5}$$

Очевидно, что при соответствующем m классы Φ_m^+ содержат как угодно быстро растущие на бесконечности функции.

Классы Φ_m^-. Наряду с классами Φ_m^+, введём также сопряженные классы Φ_m^- весовых положительных функций $\rho_-(t)$, монотонно убывающих и таких, что для некоторого $m>0$ выполняется соотношение

$$\rho_-'(t)+m\rho_-(t)\leq 0\ .\tag{2.6}$$

Нетрудно видеть, что если $\rho_+\in\Phi_m^+$, то ${\rho_+}^{-1}=\rho_-\in\Phi_m^-$.

Таким образом, при $t\to\infty$ функция $\rho_-(t)$ могут убывать как угодно быстро. В связи с этим, мы их будем называть *гиперубывающими*. Заметим, что при $t\to 0$ они могут как угодно быстро расти. Например, веса $\rho_n(t)=t^{-n}\exp(-\exp(t))$ удовлетворяют условию (2.6) при $m=\min\limits_{t>0}(e^t+\frac{n}{t})$.

Число $\sup m$, при котором выполняется (2.6) будем называть *символом* гипервеса весовой функции $\rho_-(t)$.

Заметим, что символ возрастания функции $\rho_+(t)$ совпадает с символом убывания функции $\rho_-(t)=\rho_+(t)^{-1}$.

Весовые функции $\rho_-(t)$ обладают следующим очевидным свойством: $\rho_-(\infty)=0$ и для них при $\lambda+m>0$ выполняются оценки

$$J_-\rho_-(t)=\int\limits_t^\infty e^{-\lambda s}\rho_-(s)ds\leq\frac{\rho_-(t)\exp(\lambda t)}{m+\lambda}\ ,\tag{2.7}$$

$$J_-^n\rho_-(t)=\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_t^\infty(s-t)^{n-1}\rho_-(s)ds\leq\frac{\rho_-(s)}{m^n},\quad n=1,2,\dots\ .\tag{2.8}$$

Полумультипликативные гипервесовые функции. Важными подклассами гипервесовых функций Φ_m^+ и Φ_m^- являются функции связанные с полумультипликативными функциями рассмотренными в [11] и [12], с. 154, которые определяются как действительные, измеримые по Борелю функции на $\mathbb{R}^+$, удовлетворяющие условию *полумультипликативности*

$$0 \le \psi_-(t+s) \le \psi_-(t)\psi_-(s), \tag{2.9}$$

при всех

$$t, s \in \mathbb{R}^+ \qquad \psi_-(0) = 1 \ . \tag{2.10}$$

Так как мы будем рассматривать также и функции $\psi_+(t)$, удовлетворяющие условию обратному (2.9), то есть

$$\psi_+(t)\psi_+(s) \le \psi_+(t+s) \ , \tag{2.11}$$

то классы функций, удовлетворяющие (2.9), будем называть *левомультипликативными* и обозначать Ψ^-, а классы, удовлетворяющие условиям (2.10) и (2.11), — *правомультипликативными* и обозначать через Ψ^+.

Очевидно что из $\psi_+ \in \Psi^+$ следует ${\psi_+}^{-1} = \psi_- \in \Psi^-$ и наоборот, из $\psi_- \in \Psi^-$ следует $\psi_+ = {\psi_-}^{-1} \in \Psi^+$.

На связь классов Ψ^+, Ψ^-, Φ^+_m, Φ^-_m указывает следующая

Лемма 2.1. *Если $\psi_+(t)$ непрерывно дифференцируема и $\psi'_+(t) > 0$, то справедливо включение $\Psi^+ \subset \Phi^+_{\psi'(0)}$; если $\psi_-(t)$ непрерывно дифференцируема и $\psi_-(t) < 0$, то $\Psi^- \subset \Phi^-_{\psi'_-(0)}$.*

□ В случае класса Ψ^+ из (2.11) следует неравенство

$$\frac{\psi_+(t)[\psi_+(s) - 1]}{s} \le \frac{\psi_+(t+s) - \psi_+(t)}{s} \ . \tag{2.12}$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $s \to 0$, получаем выполнение условия

$$\psi'_+(0)\psi_+(t) \le \psi'_+(t) \ , \tag{2.13}$$

доказывающее справедливость леммы в случае классов ψ_+.

Доказательство для случая ψ^- следует из соотношения $\psi_-(t) = \psi_+(t)^{-1}$.

Теперь покажем, что классы Φ^+_m и Φ^-_m шире Ψ^+ и Ψ^-, соответственно. Для этого, наряду с функциями, заданными (2.2), рассмотрим функции вида

$$\psi_1(t) = \exp\left[\int_0^t \varphi(\xi)\,d\xi\right], \qquad \psi_2(t) = \psi_1(t) - 1\,, \tag{2.14}$$

где функция $\varphi(s)$ монотонно возрастает и удовлетворяет условию $\varphi(s) \ge m > 0$.

Покажем, что функции (2.14) удовлетворяют условию (2.11). Для этого оценим

$$\psi_1(t+s) = \exp\left[\int_0^{t+s} \varphi(\xi)\,d\xi\right] = \exp\left[\int_0^t \varphi(\xi)\,d\xi + \int_t^{t+s} \varphi(\xi)\,d\xi\right] =$$

$$= \exp\left[\int_0^t \varphi(\xi)\,d\xi + \int_0^s \varphi(\tau + t)\,d\tau\right] \ge$$

$$\geq \exp\left[\int_0^t \varphi(\xi)\,d\xi + \int_0^s \varphi(\tau)\,d\tau\right] = \psi_1(t)\cdot\psi_1(s). \tag{2.15}$$

Здесь мы воспользовались возрастанием функции $\varphi(s)$. Аналогичное неравенство для функции ψ_2 доказывается с помощью соотношения

$$\psi_2(t+s) = \psi_1(t+s) - 1 = [\psi_1(t)-1][\psi_1(s)-1] + \psi_1(t) + \psi_2(t) - 2 \geq$$

$$\geq [\psi_1(t)-1][\psi_1(s)-1] = \psi_2(t)\cdot\psi_2(s)\ .$$

Таким образом, $\psi_1 \in \Psi^+$, но $\psi_2 \overline{\in} \Psi^+$, так как $\psi_2(0) = 0$. Отсюда же следует, что и ${\psi_1}^{-1} \in \Psi^-$, но ${\psi_2}^{-1} \notin \Psi^-$. Кроме того, заметим, что и функции вида (2.2) также не принадлежат Ψ^+, в силу того, что для них не выполнено условие (2.11). Такое же замечание относится и к функциям вида $\psi_n(t) = t^{-n}\exp(-t)$. ■

В дальнейшем, мы будем использовать только весовые пространства Φ_m^+ и Φ_m^-.

3. Операторы дробного интегрирования и дифференцирования Римана-Лиувилля в пространствах $\mathfrak{C}_{\rho_\pm}$. На полуоси $t \in [0,\infty)$ будем рассматривать гипервесовые пространства $\mathfrak{C}_{\rho_+}$ и $\mathfrak{C}_{\rho_-}$ непрерывных функций $f(t)$, для которых конечны нормы

$$\|f\|_{\mathfrak{C}_{\rho_+}} = \sup_{t>0}\left|\frac{f(t)}{\rho_+(t)}\right|, \qquad \rho_+ \in \Phi_m^+;$$

$$\|f\|_{\mathfrak{C}_{\rho_-}} = \sup_{t>0}\left|\frac{f(t)}{\rho_-(t)}\right|, \qquad \rho_- \in \Phi_m^-.$$

Функции $f \in \mathfrak{C}_{\rho_+}(0)$ удовлетворяют условию $f(0) = 0$. Известно, что $\mathfrak{C}_{\rho_\pm}$ – банаховы пространства.

Рассмотрим операторы $\mathfrak{D}_+$ и $\mathfrak{D}_-$, заданные дифференциальными выражениями

$$l_+\varphi(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt}, \quad l_-\varphi(t) = -\frac{d\varphi(x)}{dt} \tag{3.1}$$

и областями определения:

$D(\mathfrak{D}_+)$ множество значений оператора $J_+\varphi = \int\limits_0^t \varphi(s)ds$ определенного на $\mathfrak{C}_{\rho_+}$.

$D(\mathfrak{D}_-)$ множество значений оператора $J_-\varphi = \int\limits_t^\infty \varphi(s)ds$ определенного на $\mathfrak{C}_{\rho_-}$.

Справедлива следующая

Теорема 3.1. *Операторы $-\mathfrak{D}_\pm$ является генераторами полугрупп $U(x,-\mathfrak{D}_\pm)$ класса C_0, для которых выполняется оценка*

$$\|U(x,\mathfrak{D}_\pm)\varphi\|_{\mathfrak{C}_{\rho_+}} \leq e^{-mx}\|\varphi\|_{\mathfrak{C}_{\rho_\pm}}, \tag{3.2}$$

где m – порядок роста или убывания соответствующего веса.

□ Доказательство проведём для $\mathfrak{D}_+$. Для этого рассмотрим интеграл.

$$J(\lambda)f(t) = \int\limits_0^t e^{\lambda(s-t)}f(s)ds. \tag{3.3}$$

В предположении $f \in \mathfrak{C}_{\rho_+}$ и $\lambda + m > 0$ оценим

$$|J(\lambda)f(t)| \leq \int\limits_0^t e^{\lambda(s-t)}|f(s)|ds \leq \|f\|_{\mathfrak{C}_{\rho_+}} \cdot e^{-\lambda t} \int\limits_0^t e^{\lambda s}\rho_+(s)ds.$$

Отсюда, пользуясь оценкой (2.4), после очевидных операций, получаем неравенство

$$\|J(\lambda)f\|_{\mathfrak{C}_{\rho_+}} \leq \frac{\|f\|_{\mathfrak{C}_{\rho_+}}}{\lambda + m} \,. \tag{3.4}$$

Таким образом, при $\lambda > -m$ операторы $R(\lambda)$ определены и ограничены на пространстве $\mathfrak{C}_{\rho_+}$.

Меняя порядок интегрирования, нетрудно установить, что для них выполняется резольвентное тождество

$$J(\lambda) - J(\mu) = (\mu - \lambda)J(\lambda)J(\mu) \,. \tag{3.5}$$

Следовательно (см. [8], с. 299), операторы $J(\lambda)$ являются псевдорезольвентами, имеющими общее нуль-подпространство $N(J)$ и общую область значений. Кроме того, нетрудно видеть, что нуль пространство $N(J)$ для $J_+f(t) = \int\limits_0^t f(s)ds$ состоит из одного нуля, то есть $N(J_+) = 0$.

Отсюда, по теореме 1, [8], с. 300, получаем, что псевдорезольвента $J(\lambda)$ является резольвентой оператора $-\mathfrak{D}_+$.

Наконец, оценка (3.4), в силу теоремы Хилле-Филлипса-Феллера-Миадеры-Иосиды [8], с. 343, [13], с. 261, показывает, что оператор $-\mathfrak{D}_+$ является генератором сильно непрерывной полугруппы $U(x, -\mathfrak{D}_+)$ класса C_0 с оценкой (3.2).

Случай $\mathfrak{D}_-$ рассматривается аналогично. ■

Из теоремы 3.1 следует

Теорема 3.2. *Для операторов $\mathfrak{D}_\pm$ определены дробные степени $\mathfrak{D}_\pm^\alpha$, $0 < \alpha < 1$ равенствами*

$$\mathfrak{D}_\pm^\alpha\varphi(t) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\int\limits_0^\infty \lambda^{\alpha-1}(\lambda I + \mathfrak{D}_\pm)^{-1}\mathfrak{D}_\pm\varphi(t)d\lambda \tag{4.6}$$

для $\varphi \in D(\mathfrak{D}_\pm)$.

□ Доказательство следует из формулы Балакришнана (см. [7], с. 358), записанной для $A = -\mathfrak{D}_\pm$, и оценки (2.3). ■

Далее, подставляя в (3.6) резольвенты

$$(\lambda I + \mathfrak{D}_+)^{-1})\varphi(t) = R(\lambda, -\mathfrak{D}_+)_\varphi = \int\limits_0^t e^{\lambda(s-t)}\varphi(s)ds$$

и

$$(\lambda I + \mathfrak{D}_-)^{-1})\varphi(t) = R(\lambda, -\mathfrak{D}_-)_\varphi = -\int\limits_t^\infty e^{\lambda(t-s)}\varphi(s)ds$$

получаем представление операторов $\mathfrak{D}_{\pm}^{\alpha}$ через дробные производные в форме Капуто (см. [1], с. 168)

$$\mathfrak{D}_{+}^{\alpha}\varphi(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_{0}^{t}(t-s)^{-\alpha}\varphi'(s)ds, \tag{3.7}$$

$$\mathfrak{D}_{-}^{\alpha}\varphi(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_{t}^{\infty}(t-s)^{-\alpha}\varphi'(s)ds\,, \tag{3.8}$$

Их можно записать и в форме Римана-Лиувилля

$$\mathfrak{D}_{+}^{\alpha}\varphi(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int\limits_{0}^{t}(t-s)^{-\alpha}\varphi(s)ds\,, \tag{3.9}$$

$$\mathfrak{D}_{-}^{\alpha}\varphi(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int\limits_{t}^{\infty}(t-s)^{-\alpha}\varphi(s)ds\,, \tag{3.10}$$

в случае (3.9) в силу равенства $\varphi(0)=0$, а в случае (3.10) – в силу соотношений

$$\int\limits_{t}^{\infty}(s-t)^{-\alpha}\varphi'(s)ds=\int\limits_{0}^{\infty}\tau^{-\alpha}\varphi'_{\tau}(\tau+t)d\tau=$$

$$=\int\limits_{0}^{\infty}\tau^{-\alpha}\varphi'_{t}(\tau+t)d\tau=\frac{d}{dt}\int\limits_{0}^{\infty}\tau^{-\alpha}\varphi(\tau+t)d\tau=\frac{d}{dt}\int\limits_{t}^{\infty}(s-t)^{-\alpha}\varphi(s)ds\,.$$

Заметим, что отрицательные дробные степени $\mathfrak{D}_{+}^{-\alpha}$ операторов $\mathfrak{D}_{\pm}$ в силу [13], с. 275, определены соотношением

$$\mathfrak{D}_{\pm}^{-\alpha}\varphi=\frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\lambda^{-\alpha}R(\lambda,-\mathfrak{D}_{\pm})\varphi d\lambda\,,\qquad 0<\alpha<1\,. \tag{3.11}$$

Операторы $\mathfrak{D}_{\pm}$ являются генераторами C_0-полугруппы. Отсюда, пользуясь неравенством (3.4), получаем оценку

$$\|\mathfrak{D}_{\pm}^{-\alpha}\varphi\|_{\rho_{\pm}}\le\frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^{\alpha}(\lambda+m)}\|\varphi\|_{\rho_{\pm}}=\frac{1}{m^{\alpha}}\|\varphi\|_{\rho_{\pm}}\,. \tag{3.12}$$

показывающую ограниченность операторов $\mathfrak{D}_{\pm}^{-\alpha}$ в пространствах $\mathfrak{C}_{\rho_{\pm}}$, соответственно.

Далее, подставляя в (3.11) значение резольвент $R(\lambda,-\mathfrak{D}_{\pm})$, также как и в случае (3.9), (3.10), получаем для $\mathfrak{D}_{\pm}^{-\alpha}$ представления в виде дробных интегралов Римана-Лиувилля

$$\mathfrak{D}_{+}^{-\alpha}\varphi=I_{+}^{\alpha}\varphi=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{0}^{t}(t-s)^{\alpha-1}\varphi(s)ds\,, \tag{3.13)}$$

$$\mathfrak{D}_{-}^{-\alpha}\varphi = -I_{-}^{\alpha}\varphi = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{t}^{\infty}(s-t)^{\alpha-1}\varphi(s)ds\,. \tag{3.14)}$$

Важным фактом, следующим из (3.12)-(3.14) является

Следствие 3.1. *Пространство $\mathfrak{C}_{\rho_\pm}$ является инвариантными относительно оиерации дробного интегрирования Римана-Лиувилля.*

Как известно см. [9], с.92 для пространств $\mathfrak{C}_{\rho_\pm}$ со степенными весами $\rho(t) = (1+t)^\gamma$ этот факт не имеет места.

4. Дифференциальные уравнения рационального порядка.

Применим результаты разд. 1-3 к задаче нахождения функции $u(x)$, $x \in (0,\infty)$, имеющей все производные порядка $m\gamma$, $0 < \gamma < 1$, $m = 0, 1, ..., n$ и удовлетворяющей уравнению

$$\sum_{m=0}^{n} a_m \mathfrak{D}_{\pm}^{m\gamma} u(x) = f(x)\,, \qquad a_n \neq 0\,. \tag{4.1}$$

где $f \in \mathfrak{C}_{\rho_\pm}$.

Нетрудно видеть, что следствием теоремы 1.1 является

Теорема 4.1. *Задача (4.1) равномерно корректно разрешима в пространствах $\mathfrak{C}_{\rho_\pm}$, соответственно. Ее решение имеет вид*

$$u(x) = \frac{1}{a_n}\sum_{i=0}^{n} R^{k_i}(\alpha_i, \mathfrak{D}_{\pm}^{\gamma}) f(x), \tag{4.2}$$

и сираведливо неравенство

$$\|u\|_{\rho_\pm} \leq \frac{M}{m^\gamma \prod_{i=1}^{n}(\operatorname{Re}\alpha_i + m)^{k_i}}\|f\|_{\rho_\pm}\,, \tag{4.3}$$

где α_i – корни многочлена $P_n(\alpha) = \sum_{m=0}^{n} a_m \alpha^m$, k_i – их кратности, m – символ веса ρ_+ или ρ_-, соответственно.

Замечание 4.1. Уравнение (4.1) в случае производных Капутто рассматривается в [1] с. 222, когда $f(x)$ преобразуема по Лапласу, при этом приводится представление решения

$$u(x) = \int_0^x G(x-s) f(s) ds\,, \tag{4.4}$$

где $G(s)$ – соответствующая функция Грина.

Таким образом, оценка (4.3) показывает ограниченность интегрального оператора (4.4) в пространствах $\mathfrak{C}_{\rho_+}$.

Отметим, что для $\mathfrak{D}_{-}^{\gamma}$ разрешимость задачи (4.1) вообще ранее не рассматривалась.

Литература

1. Учайкин В.В. Методы дробных производных / Ульяновск: Изд. «Логос», 2002. – 512 с.
2. Потапов А.А. Фракталы в радиофизике и радиолокации // М.: Логос, 2002. – 664 с.
3. Бабенко Ю.И. Методы дробного интегродифференцирования в прикладных задачах теории тепломассообмена // СПб.: НПО «Профессионал», 2009. – 584 с.
4. Бабенко Ю.И. Тепломассообмен: Методы расчета тепловых и диффузных потоков / Л.: Химия, 1986. – 144 с.
5. Mainardi F. The time fractional diffusion equation / Изв. ВУЗов, Радиофизика. – 1995. – 87;1-2.
6. Маслов В.П. Операторные методы // М. :Наука, 1973. 544 с.
7. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / М.: Наука, 1967. – 464 с.
8. Иосида К. Функциональный анализ: Учебник / пер. с англ. В.М,Волосова. М.: Мир, 1967. – 624 с.
9. Самко С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. Минск: Наука и техника, 1987. – 687 с.
10. Костин В.А., Небольсина М.Н. О корректной разрешимости краевых задач для уравнения второго порядка // ДАН. – 2009. – 428;1. – С.20-22.
11. Гельфанд И.М. Об абсолютно сходящихся тригонометрических рядах и интегралах // Матем. сборник. – 1941. – 9(51). – С.51-66.
12. Хилле Э. Функциональный анализ и полугруппы / Э. Хилле, Р.Филлипс. М.: Издательство иностранной литературы, 1962. – 829 с.
13. Забрейко П.П. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций / М.А. Красносльский, П.П. Забрейко, Е.И. Пустыльник, П.Е. Соболевский. М. Наука, 1966. – 499 с.
14. Костин Д.В. К решению задачи о распространении сигналов во фрактальных средах в классах функций не преобразуемых по Лапласу / Д.В. Костин, В.А. Костин, А.В. Костин. Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна 2012. Материалы международной конференции, Воронеж, С.109-111.

C_0-OPERATOR POLYNOMIALS AND CORRECT SOLVABILITY OF EQUATIONS WITH FRACTIONAL DERIVATIVES

V.A. Kostin, M.N. Nebolsina, Salim Badran

Voronezh State University

Universitetskaya Sq., 1, Voronezh, 394006, Russia, e-mail: vlkostin@mail.ru, marinanebolsina@yandex.ru

Abstract. Correct solvability of operator equations of the $\sum_{m=0}^{n} a_m A^m u = f$ type where A is the semi-group generator of the class C_0 which contains operators acting in the Banach space of E, $f \in E$ is established. Results are applied to problems of differential equations with operators of fractional differentiation in spaces of functions not transformed according to Laplace.

Key words: correct solvability, semi-group's generator of the class C_0, hyper increasing and hyper decreasing weight functions.