MSC 11L05

О ДВОЙНЫХ СУММАХ ГАУССА, СООТВЕТСТВУЮЩИХ КЛАССАМ ИДЕАЛОВ МНИМОГО КВАДРАТИЧНОГО ПОЛЯ

У.М. Пачев, Р.А. Дохов

Кабардино-Балкарский государственный университет,
ул. Чернышевского 173, Нальчик, 360004, Россия, e-mail: urusbi@rambler.ru

Аннотация. В работе рассматриваются вычисления двойных сумм Гаусса

$$G_A(q,l)=\sum_{m_1=1}^{q}\sum_{m_2=1}^{q}e^{2\pi i\frac{lQ_A(m_1,m_2)}{q}},$$

соответствующих классам идеалов A мнимого квадратичного поля.

Ключевые слова: двойная сумма Гаусса, бинарная квадратичная форма, класс идеалов, мнимое квадратичное поле.

1. Введение. Вычислению сумм Гаусса разных видов посвящено большое число работ (см., например, [1-3]). Мы проведем вычисление сумм Гаусса, соответствующих классам идеалов мнимого квадратичного поля, имея ввиду дальнейшие их применения к вычислению одной суммы произведений $\sum\limits_{A\in Cl}\psi(A)\,G_A(q,l)$ характера ψ группы классов идеалов Cl_F мнимого квадратичного поля на двойные суммы Гаусса $G_A(q,l)$. При этом результаты вычисления как однократных так и двойных сумм Гаусса мы даем в явном виде от дискриминанта квадратного трехчлена или бинарной квадратичной формы. Хотя это непосредственно не относится к основной теме исследования, тем не менее в части, следующей за этим введением, мы даем новое применение однократных гауссовых сумм к доказательству квадратичного закона взаимности для символа Якоби.

В остальных двух частях нашей работы проводится вычисление двойных сумм Гаусса в случаях нечетного и четного модулей, причем во втором случае предварительно выделяются относительно дискриминанта δ_F три возможных случая:

$(\delta_F;2^\alpha)$=1 при $\alpha\geq 1$;
$(\delta_F;2^\alpha)$=4 при $\alpha\geq 2$;
$(\delta_F;2^\alpha)$=8 при $\alpha\geq 3$;
а остальные случаи должны быть оставлены вне рассмотрения.

Начнем с вычисления однократной суммы Гаусса вида

$$S(a,b,c;q)=\sum_{x=1}^{q}e^{2\pi i\frac{ax^2+bx+c}{q}},\qquad(1)$$

где $(a, q) = 1$. Такая сумма сводится к вычислению суммы $S(a, b) = S(a, b, 0; q)$, т.е. суммы

$$S(a, b) = \sum_{x=1}^{q} e^{2\pi i \frac{ax^2+bx}{q}}, \tag{2}$$

так как

$$S(a, b, c; q) = e^{2\pi i \frac{c}{q}} \cdot S(a, b; q) .$$

2. Леммы об однократных суммах Гаусса. Для вычисления гауссовых сумм сначала приведем ряд лемм, описывающих свойства этих сумм.

Лемма 1. *Если f — целочисленная квадратичная форма или многочлен второй степени с целыми коэффициентами от n переменных и $d\,|f$ и $d\,|q$, где d-числовой делитель f и q-положительное целое число, то*

$$S(f(x), q) = d^n S\left(\frac{f(x)}{d}; \frac{q}{d}\right) .$$

□ Доказательство см. [1]. ■

Лемма 1 будет использована при $n = 1; 2$.

Лемма 2. *Пусть $q = q_1 q_2, ..q_k$, где целые положительные числа $q_1, q_2, \ldots, q_k$ попарно взаимно просты п $Q_1 = q/q_1, ..., Q_k = q/q_k$. Тогда*

$$S(f(x), q) = \prod_{\alpha=1}^{k} S(Q_\alpha f, q_\alpha) .$$

□ Доказательство см. [1]. ■

Опираясь на леммы 2 и 6 (см. ниже), в качестве применения гауссовых сумм дадим новое доказательство квадратичного закона взаимности для символа Якоби.

Вместо суммы (1) будем вычислять сумму более общего вида

$$S(la, lb, lc; q) = \sum_{x=1}^{q} e^{2\pi i \frac{l\left(ax^2+bx+c\right)}{q}}, \tag{3}$$

где вначале предполагаем, что НОД$(2la; q) = 1$. При этом la, lb, lc — коэффициенты бинарной квадратичной формы $lQ_A(m_1, m_2)$, а значения для сумм (1) и (2) соответственно получаются при $l = 1$ и $c = 0$.

В следующей лемме дается выражение суммы (3) через обычную однократную сумму Гаусса.

Лемма 3. *Пусть q — нечетное положительное число; l, a — целые числа, взаимно простые с q. Тогда*

$$S(la, lb, lc; q) = e^{-2\pi i \frac{(4a)^* lD}{q}} \cdot S(la; q) ,$$

где $(4a)^*$ — число обратное числу $4a$ по модулю q; $D = b^2 - 4ac$.

□ Имеем

$$S(la, lb, lc; q) = \sum_{x=1}^{q} e^{2\pi i \frac{(4la)^* \left\{4(l\,a)^2 x^2 + 4l^2 abx + 4l^2 ac\right\}}{q}}.$$

Так как $y = 2lax + lb$ вместе с x пробегает полную систему вычетов по модулю q, то

$$S(la, lb, lc; q) = \sum_{y=1}^{q} e^{2\pi i \frac{(4l\,a)^* \left(y^2 - l^2 D\right)}{q}} = e^{-2\pi i \frac{(4l\,a)^* l^2 D}{q}} \cdot \sum_{y=1}^{q} e^{2\pi i \frac{(4l\,a)^* \{(2lay)^2\}}{q}} =$$

$$= e^{-2\pi i \frac{(4\,a)^* lD}{q}} \cdot \sum_{y=1}^{q} e^{2\pi i \frac{lay^2}{q}} = e^{-2\pi i \frac{(4\,a)^* lD}{q}} \cdot S(la; q)\,. \quad ■$$

Лемма 4. *Пусть q – любое целое положительное число; l и a — целые числа, взаимно простые с q; b — четное число. Тогда*

$$S(la, lb, lc; q) = e^{-2\pi i \frac{a^* l \frac{D}{4}}{q}} \cdot S(la; q)\ , \text{где} \quad D = b^2 - 4ac\,.$$

□ Доказательство проводится аналогичными рассуждениями, использованными в случае леммы 3. Заметим, что лемма 4 содержит как частный случай результат из [1]. ■

Следующий случай, когда в сумме $S(la, lb, lc; q)$ число b нечетно, а q четно является наиболее сложным.

Лемма 5. *Пусть целые числа l, a, b, из которых b нечетно, взаимно просты с четным числом q. Тогда*

$$S(la, lb, lc; q) = \begin{cases} 0, & \text{если } q \equiv 0 \pmod 4\ ; \\ \frac{1}{2} e^{-2\pi i \frac{a^* \cdot lD}{4q}} \cdot S(la;\ 4q)\,, & \text{если } q \equiv 2 \pmod 4\ , \end{cases}$$

где $D = b^2 - 4ac$; a^* — число, обратное числу a по модулю $4q$.

□ В случае $q \equiv 0 \pmod 4$ формула доказывается с использованием леммы 2 и рассуждений статьи [4] (лемма 5) (элементарные выкладки, приводящие к этому равенству, мы опускаем).

Доказываем теперь формулу в случае $q \equiv 2 \pmod 4$, т.е. когда $q = 2 \cdot q_2$, где q_2 — нечетное число. Воспользуемся тем, что при $q \equiv 2 \pmod 4$ и b — четном справедлива формула (см. [1] гл.I, лемма 2)

$$S(a, b; q) = \frac{1}{2} e^{-2\pi i \frac{a^* b^2}{4q}} \cdot S(a; 4q)\ ,$$

где $a^* a \equiv 1 \pmod{4q}$. Тогда

$$S(la, lb, lc; q) = \sum_{x=1}^{q} e^{2\pi i \frac{l\left(ax^2 + bx + c\right)}{q}} = e^{2\pi i \frac{lc}{q}} \cdot S(la, lb; q) =$$

$$= e^{2\pi i \frac{lc}{q}} \cdot \frac{1}{2} e^{-2\pi i \frac{(la)^* l^2 b^2}{4q}} \cdot S\left(la; 4q\right) = \frac{1}{2} e^{-2\pi i \frac{\{(la)^* l^2 b^2 - 4lc\}}{4q}} \cdot S\left(la;\ 4q\right) =$$

$$= \frac{1}{2} e^{-2\pi i \frac{(a)^* \{lb^2 - l \cdot 4ac\}}{4q}} \cdot S\left(la;\ 4q\right) = \frac{1}{2} e^{-2\pi i \frac{a^* lD}{4q}} \cdot S\left(la;\ 4q\right). \ \blacksquare$$

Замечание. Результаты лемм 3-5 при $c = 0$ были получены Клостерманом [5]. Мы даем их в общем виде с указанием зависимости от дискриминанта D квадратичной формы.

Поскольку в леммах 3-5 формулы для $S\left(la, lb, lc; q\right)$ выражены через сумму Гаусса $S\left(a, q\right)$, то нам еще понадобится следующая лемма.

Лемма 6. *Пусть q — целое положительное число; a — целое число, взаимно простое с q. Тогда*

$$S\left(a; q\right) = \begin{cases} \left(\dfrac{a}{q}\right) \ i^{\left(\frac{q-1}{2}\right)^2} \sqrt{q}\,, & \text{если } q \equiv 1 \pmod 2\,, \\ \left(\dfrac{q}{a}\right) \ \left(1 + i^a\right) \sqrt{q}\,, & \text{если } q \equiv 0 \pmod 4\,, \\ 0, \quad \text{если } q \equiv 2 \pmod 4\,, \end{cases}$$

где $\left(\dfrac{a}{q}\right)$, $\left(\dfrac{q}{a}\right)$ — *символы Якоби.*

□ Доказательство см. [1]. ■

3. Вычисление двойных сумм Гаусса в случае нечетного модуля. Перейдем теперь к вычислению двойной суммы Гаусса

$$G_A\left(q, l\right) = \sum_{m_1=1}^{q} \sum_{m_2=1}^{q} e^{2\pi i \frac{lQ_A(m_1, m_2)}{q}} \tag{4}$$

в случае $(q, D) = 1$, где D — дискриминант квадратичного поля $F = Q(\sqrt{d})$.

Лемма 7. *Пусть q — нечетное положительное число; l, a — целые числа, взаимно простые с q. Тогда, если $(\delta_F, q) = 1$, то*

$$G_A\left(q, l\right) = \left(\frac{-\delta_F}{q}\right) (-1)^{\frac{q-1}{2}} \cdot q,$$

где A — класс идеалов поля F дискриминанта δ_F.

□ В силу лемм 3 и 6 в случае нечетного q будем иметь

$$G_A\left(q, l\right) = \sum_{y=1}^{q} S\left(la, lby, lcy^2; q\right) = \sum_{y=1}^{q} e^{-2\pi i \frac{(4la)^* l^2 D y^2}{q}} \cdot S\left(la; q\right) =$$

$$= \sum_{y=1}^{q} e^{-2\pi i \frac{lDay^2}{q}} \cdot S\left(la; q\right) = S\left(-laD; q\right) \cdot S\left(la; q\right) =$$

$$= \left(\frac{-laD}{q}\right) \ i^{\left(\frac{q-1}{2}\right)^2} \sqrt{q} \cdot \left(\frac{la}{q}\right) \ i^{\left(\frac{q-1}{2}\right)^2} \sqrt{q} = \left(\frac{-\delta_F}{q}\right) \ (-1)^{\frac{q-1}{2}} \cdot q \, . \ \blacksquare$$

Так как в силу леммы 7 сумма $G_A\,(q,l)$ не зависит класса идеала , то по свойству характеров получаем, что

$$\sum_{A \in Cl_F} \psi\,(A)\, G_A\,(q,l) = 0.$$

Лемма 8. *Пусть* $f = ax^2 + bxy + cy^2$ *— примитивная форма и* M *— любое целое число. Тогда* f *представляет целое число, взаимно простое с* M.

□ Доказательство см. [6], гл.14, лемма 2.1. ■

Лемма 9. *Форма* $f = ax^2 + bxy + cy^2$ *собственно представляет только те числа, которые встречаются среди первых коэффициентов, эквивалентных ей форм.*

□ Доказательство см. [7]; гл VI, п.4. ■

Леммы 8 и 9 в совокупности позволяют сводить рассмотрения двойных сумм Гаусса $G_A\,(q,l)$ к случаю, когда первый коэффициент квадратичной формы $Q_A\,(m_1, m_2)$ взаимно прост с модулем q.

Теорема 1. *Пусть* q *— нечетное положительное число;* l, a *— целые числа, взаимно простые с* q *и* δ_F *– дискриминант квадратичного поля* $F = Q(\sqrt{d})$. *Тогда*

1) Если $q \not| \delta_F$, *то*

$$G_A\,(q,l) = \left(\frac{la}{d}\right) \cdot \left(\frac{-D'}{q'}\right) \ i^S \sqrt{d} \cdot q \, ,$$

где $d = \text{НОД}\,(\delta_F, q)$,

$$s = \begin{cases} 0, & q, \ q' \equiv 1 \pmod{4} \\ 1, & q \cdot q' \equiv -1 \pmod{4} \\ 2, & q, \ q' \equiv -1 \pmod{4} \ , \end{cases}$$

$$D' = \frac{D}{d}, \quad q' = \frac{q}{d}; \quad \left(\frac{\cdot}{d}\right), \quad \left(\frac{\cdot}{q'}\right)$$

— символы Якоби.

2) Если $q \,|\, \delta_F$, *то* $G_A\,(q,l) = \left(\frac{la}{d}\right) \cdot \ i^{\left(\frac{q-1}{2}\right)^2} q\sqrt{q}\,.$

□ 1) В силу условия

$$(la, \ q) = 1$$

и леммы 3 имеем

$$G_A\,(q,l) = \sum_{y=1}^{q} S\left(la, lby, lcy^2, q\right) = \sum_{y=1}^{q} e^{-2\pi \, i \frac{(4al)^* l^2 D y^2}{q}} \cdot S\,(la; q) =$$

$$= \sum_{y=1}^{q} e^{-2\pi\, i \frac{laDy^2}{q}} \cdot S\left(la; q\right).$$

Применяя теперь к первому сомножителю лемму 1 и, учитывая еще лемму 6, будем иметь

$$G_A\left(q, l\right) = d \sum_{y=1}^{q'} e^{-2\pi\, i \frac{laD'y^2}{q'}} \cdot S\left(la; q\right) = d \cdot S\left(-laD', q'\right) S\left(la; q\right) =$$

$$= d \cdot \left(\frac{la \cdot (-D')}{q'}\right) \cdot i^{\left(\frac{q'-1}{2}\right)^2} \sqrt{q'} \cdot \left(\frac{la}{q}\right) \cdot i^{\left(\frac{q-1}{2}\right)^2} \sqrt{q} =$$

$$= d \cdot \left(\frac{la}{q'}\right) \cdot \left(\frac{-D'}{q'}\right) \cdot \left(\frac{la}{q'}\right) \cdot \left(\frac{la}{d}\right) \cdot i^{\left(\frac{q-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{q'-1}{2}\right)^2} \sqrt{q'} \cdot \sqrt{q} =$$

$$= \left(\frac{-D'}{q'}\right) \cdot \left(\frac{la}{d}\right) \cdot i^{\left(\frac{q-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{q'-1}{2}\right)^2} \sqrt{d} \cdot q = \left(\frac{la}{d}\right) \cdot \left(\frac{-D'}{q'}\right) \cdot i^{S} \sqrt{d} \cdot q\,,$$

где, как легко проверить, показатель s определяется указанными равенствами.

2) Пусть теперь $q\,|\delta_F$ т.е. $q\,|D$. Тогда

$$G_A\left(q, l\right) = \sum_{y=1}^{q} e^{-2\pi\, i \frac{laDy^2}{q}} \cdot S\left(la; q\right) = \sum_{y=1}^{q} S\left(la; q\right) = qS\left(la; q\right) =$$

$$= \left(\frac{la}{q}\right) \cdot i^{\left(\frac{q-1}{2}\right)^2} q\sqrt{q}\,. \quad \blacksquare$$

Теорема 1 является дополнением к соответствующим результатам, относящимся только к случаю $(\delta_F, q) = 1$. Она будет использована при вычислении суммы (4) в случае, когда $(\delta_F, q) > 1$.

В заключении этой части нашей работы дадим новое применение однократных гауссовых сумм к доказательству квадратичного закона взаимности для символа Якоби.

Для нечетных положительных взаимно простых чисел q_1 и q_2 этот закон имеет вид

$$\left(\frac{q_1}{q_2}\right) \cdot \left(\frac{q_1}{q_2}\right) = \left(-i\right)^{\frac{q_1-1}{2} \cdot \frac{q_2-1}{2}},$$

где слева стоят символы Якоби. Воспользуемся леммой 2 при $n = 2$. Тогда для гауссовых сумм вида

$$S(ax^2; q) = \sum_{x=1}^{q} e^{2\pi\, i \frac{ax^2}{q}}$$

имеем

$$S(x^2; q_1 q_2) = S(q_1 x^2; q_2) S(q_2 x^2; q_1)\,.$$

Обозначая $q = q_1 \cdot q_2$, где НОД(q_1, q_2)=1, по лемме 2 получаем

$$S(x^2; q) = \left(\frac{q_2}{q_1}\right) \cdot \left(\frac{q_1}{q_2}\right) i^{\left(\frac{q_1-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{q_2-1}{2}\right)^2} \sqrt{q}\,.$$

Но по лемме 6 в случае $q = 1(\mathrm{mod}\,2)$ имеем

$$S(ax^2; q) = i^{\left(\frac{q-1}{2}\right)^2} \sqrt{q}\,.$$

Из этих двух равенств следует, что

$$\left(\frac{q_2}{q_1}\right) \cdot \left(\frac{q_1}{q_2}\right) i^{\left(\frac{q_1-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{q_2-1}{2}\right)^2} \sqrt{q} = i^{\left(\frac{q_1 q_2-1}{2}\right)^2} \sqrt{q}\,.$$

Тогда

$$\left(\frac{q_2}{q_1}\right) \cdot \left(\frac{q_1}{q_2}\right) = i^{\left(\frac{q_1 q_2-1}{2}\right)^2 - \left(\frac{q_1-1}{2}\right)^2 - \left(\frac{q_2-1}{2}\right)^2} = i^{\frac{(q_1 q_2)^2 - (q_1+q_2-1)^2}{4}} = i^{\frac{(q_1 q_2 + q_1 + q_2 - 1)(q_1 q_2 - q_1 - q_2 + 1)}{4}}\,.$$

Обозначая теперь $q_1 = 2k + 1, q_2 = 2l + 1$, из последнего равенства получаем

$$\left(\frac{q_2}{q_1}\right) \cdot \left(\frac{q_1}{q_2}\right) = (-1)^{kl} = (-1)^{\frac{q_1-1}{2} \cdot \frac{q_2-1}{2}}\,.$$

4. Вычисление двойных сумм Гаусса в случае четного модуля. Сначала будем рассматривать двойную сумму Гаусса

$$G_A\left(2^\alpha, l\right) = \sum_{m_1, m_2=1}^{2^\alpha} e^{2\pi i \frac{l Q_A(m_1, m_2)}{2^\alpha}}$$

в случае $q = 2^\alpha$ и при этом $(l,\ 2) = 1$.

Как сумма $G_A\left(2^\alpha, l\right)$, так и бинарная примитивная квадратичная форма

$$Q_A\left(m_1, m_2\right) = am^2 + bmn + cn^2\,, \quad (a, b, c) = 1$$

соответствуют классу идеалов мнимого квадратичного поля $F = Q\left(\sqrt{d}\right)$ дискриминанта δ_F, где d — целое отрицательное число, свободное от квадратов. Как известно, дискриминант δ_F определяется равенством

$$\delta_F = \begin{cases} d, & d \equiv 1 \pmod 4\,, \\ 4d, & d \equiv 2; 3 \pmod 4\,. \end{cases}$$

Для квадратичной формы $Q_A\left(m_1, m_2\right)$ дискриминант D определяется равенством $D = b^2 - 4ac$, и значит, $D \equiv 0;\ 1 \pmod 4$.

Мы будем опять рассматривать соответствие между классами идеалов поля F и бинарными квадратичными формами $Q_A\left(m_1, m_2\right)$, при котором $\delta_F = D$. Наши рассмотрения будут сводиться к следующим случаям:

1) $(\delta_F, 2^\alpha) = 1$, $\alpha \geq 1$ и значит, b — нечетное и $D \equiv 1 \pmod{4}$;
2) $(\delta_F, 2^\alpha) = 4$, $\alpha \geq 2$ если $D \equiv 12 \pmod{16}$;
3) $(\delta_F, 2^\alpha) = 8$, $\alpha \geq 3$ если $D \equiv 8 \pmod{16}$.

Сравнения для D в случаях 2) и 3) равносильны тому, что $D = 4d$ при $d \equiv 2; 3 \pmod{4}$. В случае $(\delta_F, 2) = 2$ и значит, $\delta_F \equiv 0 (\mathrm{mod} 4)$

Для вычисления суммы Гаусса $G'_A(2^\alpha, l)$ в случае $(\delta_F, 2^\alpha) = 1$ нам понадобится следующая лемма о сумме вида

$$S\left(\varphi, 2^t\right) = \sum_{x,y=1}^{2^\alpha} e^{2\pi i \frac{2a'x^2 + 2a''xy + 2a'''y^2}{2^\alpha}}, \quad \text{где} \quad \varphi = 2a'x^2 + 2a''xy + 2a''' \quad \text{и} \quad a''' \quad \text{нечетно.}$$

Лемма 10. *Пусть $\varphi(t) = 2a'x^2 + 2a''xy + 2a'''y^2$, где a', a'', a''' — целые числа и a'' нечетно; $d = 4a'a''' - a''^2$, t — целое положительное число.*

Тогда

$$S\left(\varphi;\ 2^t\right) = \left\{(-1)^{\frac{d^2-1}{8}} \cdot 2\right\}^{t+1}.$$

□ Доказательство см. [4], гл.I, лемма 3. ■

Лемма 11. *Если a, b, c, l – целые числа, из которых b и l нечетные, то $G_A(2^\alpha;\ l) = (-1)^{\frac{D^2-1}{8}\alpha} \cdot 2^\alpha$, $D = b^2 - 4ac$ при любом $\alpha \geq 1$.*

□ По лемме 1 имеем

$$S(lf; 2^\alpha) = \sum_{x,y=1}^{2^\alpha} e^{2\pi i \frac{l\left(2ax^2 + 2bxy + 2cy^2\right)}{2^\alpha}} = 4 \sum_{x,y=1}^{2^{\alpha-1}} e^{2\pi i \frac{l\left(ax^2 + bxy + cy^2\right)}{2^{\alpha-1}}}.$$

Тогда в силу леммы 10

$$G_A\left(2^{\alpha-1};\ l\right) = \frac{1}{4} S\left(l\,f;\ 2^\alpha\right) = \frac{1}{4}\left\{(-1)^{\frac{l^2d^2-1}{8}(\alpha+1)} \cdot 2^{\alpha+1}\right\} =$$

$$= (-1)^{\frac{l^2d^2-1}{8}(\alpha+1)} \cdot 2^{\alpha-1} = (-1)^{\frac{D^2-1}{8}\cdot(\alpha+1)} \cdot 2^{\alpha-1} = (-1)^{\frac{D^2-1}{8}\cdot(\alpha-1)} \cdot 2^{\alpha-1},$$

откуда

$$G_A(2^\alpha; l) = (-1)^{\frac{D^2-1}{8}\cdot\cdot\alpha} \cdot 2^\alpha. \quad ■$$

Так как в силу леммы 11 сумма $G_A(2^\alpha; l)$ в случае $(\delta_F, 2^\alpha) = 1$ не зависит от идеала A, то получаем, что по свойству характеров

$$\sum_{A \in Cl_F} \psi(A)\, G_A(2^\alpha; l) = 0.$$

Перейдем теперь к вычислению двойных сумм Гаусса при НОД$(\delta_F, 2^\alpha) > 1$. Начнем со случая НОД$(\delta_F, 2^\alpha) = 4$, т.е. когда $4\|D$ 0 при $\alpha \geq 2$. Тогда $2\|b$ и $D/4$ нечетно.

В силу следствия 1 замечания 1 статьи [5] можем предположить, что первый коэффициент квадратичной формы $Q_A(m_1, m_2)$ есть нечетное число. Тогда

$$G_A(2^\alpha; l) = S\left(l\left(ax^2 + bxy + cy^2\right); 2^\alpha\right) = \sum_{x,y=1}^{2^\alpha} e^{2\pi i \frac{l\left(ax^2+bxy+cy^2\right)}{2^\alpha}} =$$

$$= \sum_{x,y=1}^{2^\alpha} e^{2\pi i \frac{la^*\left\{\left(ax+\frac{b}{2}y\right)^2+\left(ac-\frac{b^2}{4}\right)y^2\right\}}{2^\alpha}} = \sum_{z,y=1}^{2^\alpha} e^{2\pi i \frac{la^*\left(z^2+\frac{|D|}{4}y^2\right)}{2^\alpha}} =$$

$$= \sum_{z=1}^{2^\alpha} e^{2\pi i \frac{la^* z^2}{2^\alpha}} \cdot \sum_{y=1}^{2^\alpha} e^{2\pi i \frac{la^* \frac{|D|}{4} y^2}{2^\alpha}} = S(la^*; 2^\alpha) \cdot S\left(\frac{la^*|D|}{4};\ 2^\alpha\right),$$

где $aa^* \equiv 1 \pmod{2^\alpha}$.

Применяя теперь лемму 6, получаем

$$G_A(2^\alpha; l) = \left(\frac{2}{la^*}\right)\left(1 + i^{la^*}\right)\sqrt{2^\alpha} \times \left(\frac{2^\alpha}{\frac{la^*|D|}{4}}\right) \cdot \left(1 + i^{\frac{la^*|D|}{4}}\right)\sqrt{2^\alpha} =$$

$$= \left(\frac{2^\alpha}{|D|:4}\right) \cdot \left(1 + i^{la}\right)\left(1 + i^{la\frac{|D|}{4}}\right) \cdot 2^\alpha = (-1)^{\frac{(|D|:4)^2-1}{8}\alpha} \cdot \left(1 + i^{la}\right) \cdot 2^\alpha \times$$

$$\times \begin{cases} 1 + i^{la} & |D|/4 \equiv 1 \pmod 4 \\ 1 - i^{la} & |D|/4 \equiv -1 \pmod 4 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} (-1)^{\frac{(|D|:4)^2-1}{8}\alpha} \cdot i^{la} \cdot 2^{\alpha+1} & \text{при } |D|/4 \equiv 1 \pmod 4 \\ (-1)^{\frac{(|D|:4)^2-1}{8}\alpha} \cdot 2^{\alpha+1} & \text{при } |D|/4 \equiv -1 \pmod 4 \end{cases}$$

Таким образом, нами доказана

Лемма 12. *Пусть* НОД$(\delta_F, 2^\alpha) = 4$ *и* l, a — *нечетные числа. Тогда*

$$G_A(2^\alpha; l) = \begin{cases} (-1)^{\frac{(|D|:4)^2-1}{8}\alpha} \cdot i^{la} \cdot 2^{\alpha+1} & \text{при } |D|/4 \equiv 1 \pmod 4 \\ (-1)^{\frac{(|D|:4)^2-1}{8}\alpha} \cdot 2^{\alpha+1} & \text{при } |D|/4 \equiv -1 \pmod 4 \end{cases}$$

где $D = \delta_F$, a – *первый коэффициент бинарной квадратичной формы, соответствующей идеалу* A.

Замечание. В полученной формуле множитель $(-1)^{\frac{(|D|:4)^2-1}{8}\cdot\alpha}$ можно опустить в случае четного α, а в случае нечетного α этот множитель будет равен $(-1)^{\frac{(|D|:4)^2-1}{8}}$.

Лемма 13. *Пусть НОД*$(\delta_F, 2^\alpha) = 8$, l, a — *нечетные числа. Тогда*

$$G_A\left(2^\alpha;l\right)=\begin{cases} i^{la}\cdot 2^{\alpha+1}\sqrt{2}, & |D|/8\equiv 1 \pmod 4\\ 2^{\alpha+1}\sqrt{2}, & |D|/8\equiv -1 \pmod 4\end{cases}$$

□ Следуя доказательству леммы 12, имеем

$$G_A\left(2^\alpha;l\right)=S\left(la^*;2^\alpha\right)\cdot S\left(\frac{la^*\,|D|}{4};\ 2^\alpha\right).$$

Так как НОД$\left(\frac{|D|}{4},2^\alpha\right)=2$, то по лемме 1 получаем

$$G_A\left(2^\alpha;l\right)=S\left(la^*;2^\alpha\right)\cdot 2S\left(\frac{la^*\,|D|}{8};\ 2^{\alpha-1}\right),\quad \text{где}\quad \frac{la^*\,|D|}{8}\quad \text{нечетно.}$$

Применяя теперь лемму 6, будем иметь

$$G_A\left(2^\alpha;l\right)=\left(\frac{2^\alpha}{la^*}\right)\left(1+i^{la^*}\right)\sqrt{2^\alpha}\cdot 2\left(\frac{2^{\alpha-1}}{la^*\cdot\frac{|D|}{8}}\right)\cdot\left(1+i^{la^*\frac{|D|}{8}}\right)\sqrt{2^{\alpha-1}}=$$

$$=\left(\frac{2^{2\alpha-1}}{la^*}\right)\cdot\left(\frac{2^{\alpha-1}}{|D|\,:\,8}\right)\cdot\left(1+i^{la^*}\right)\left(1+i^{la^*\frac{|D|}{8}}\right)\cdot 2\sqrt{2^{2\alpha+1}}=$$

$$=(-1)^{\frac{(la^*)^2-1}{8}\cdot(2\alpha-1)}\cdot(-1)^{\frac{(|D|:8)^2-1}{8}\cdot(\alpha-1)}\cdot\left(1+i^{la}\right)\left(1+i^{la\frac{|D|}{8}}\right)\sqrt{2^{2\alpha+1}}=$$

$$=\begin{cases}\left(1+i^{la}\right)^2\sqrt{2^{2\alpha+1}}, & |D|/8\equiv 1 \pmod 4\\ \left(1+i^{la}\right)\left(1-i^{la}\right)\cdot\sqrt{2^{2\alpha+1}}, & |D|/8\equiv -1 \pmod 4\end{cases}=$$

$$=\begin{cases} i^{la}\cdot 2^{\alpha+1}\sqrt{2}, & |D|/8\equiv 1 \pmod 4,\\ 2^{\alpha+1}\sqrt{2}, & |D|/8\equiv -1 \pmod 4.\end{cases}\qquad\blacksquare$$

Наконец, рассмотрим сумму $G_A\left(q;l\right)$ в случае произвольного четного числа q. На лемме 12 основано доказательство следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть $q=2^\alpha\cdot q_1$ — целое положительное число; q_1 нечетно; D — дискриминант примитивной бинарной квадратичной формы $Q_A\left(m_1,m_2\right)$, соответствующей идеалу A квадратичного поля F дискриминанта $\delta_F=D$, причем $\frac{|D|}{4}\equiv\pm1 \pmod 4$. Тогда*

$$G_A\left(q;l\right)=\begin{cases}\gamma_d\left(q,l,D\right)i^{q_1la}\left(\frac{a}{d}\right) & \text{при}\ \ |D|/4\equiv 1 \pmod 4,\\ \gamma_d\left(q,l,D\right)\left(\frac{a}{d}\right) & \text{при}\ \ |D|/4\equiv -1 \pmod 4,\end{cases}$$

где

$$\gamma_d\left(q,l,D\right)=\left(\frac{2^\alpha}{d}\right)\cdot\left(\frac{|D|\,:\,d}{q_1}\right)\,i^S\cdot(-1)^{\frac{((D):4)^2-1}{8}\alpha}\cdot 2^{\alpha+1};\sqrt{d}$$

$d=$ НОД(q_1,D); a — первый коэффициент формы $Q_A\left(m_1,m_2\right)$.

□ Пусть $f = Q_A(m_1, m_2)$ — примитивная бинарная квадратичная форма дискриминанта D. Тогда в силу теоремы 1 п.5 [4] получаем

$$G_A(q;l) = S(2^\alpha l\, f;\ q_1) \cdot S(q_1\ l\ f,\ 2^\alpha)\ .$$

Беря в теореме 1 вместо l число $2^\alpha l$, а в лемме 12 вместо l число $q_1 l$, будем иметь

$$G_A(q,l) = \left(\frac{2^\alpha la}{d}\right) \cdot \left(\frac{|D|\ :\ d}{q_1 : d}\right)\ i^S \cdot \sqrt{d} \cdot q_1 \times$$

$$\times \begin{cases} (-1)^{\frac{(|D|:4)^2-1}{8}} \cdot i^{q_1 la} \cdot 2^{\alpha+1} & \text{при } |D|/4 \equiv 1 \pmod 4 \\ (-1)^{\frac{(|D|:4)^2-1}{8}} \cdot 2^{\alpha+1} & \text{при } |D|/4 \equiv -1 \pmod 4 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \gamma_d(q,D,l) \cdot i^{q_1 la} \left(\frac{a}{d}\right) & \text{при } |D|/4 \equiv 1 \pmod 4\ , \\ \gamma_d(q,D,l) \cdot \left(\frac{a}{d}\right) & \text{при } |D|/4 \equiv -1 \pmod 4\ . \end{cases} \qquad \blacksquare$$

Проведя аналогичные рассуждения и, используя при этом лемму 13, получаем следующий результат.

Теорема 3. *Пусть $q = 2^\alpha q_1$ — целое положительное число, q_1 нечетно, D — дискриминант примитивной бинарной квадратичной формы $f = Q_A(m_1, m_2)$, соответствующей идеалу A квадратичного поля F дискриминанта $\delta_F = D$, причем $|D|/8 \equiv \pm 1 \pmod 4$. Тогда*

$$G_A(q;l) = \begin{cases} \gamma_d(q,D,l) \cdot i^{q_1 la} \left(\frac{a}{d}\right) & \text{при } |D|/8 \equiv 1 \pmod 4\ , \\ \gamma_d(q,D,l) \cdot \left(\frac{a}{d}\right) & \text{при } |D|/8 \equiv -1 \pmod 4\ , \end{cases}$$

где

$$\gamma_d(q,l,D) = \left(\frac{2^\alpha}{d}\right) \cdot \left(\frac{|D|\ :\ d}{q_1 : d}\right)\ i^S \cdot \sqrt{d} \cdot q_1 \cdot 2^{\alpha+1}\sqrt{2}\,;$$

$$d_1 = (D, q_1)\,.$$

Замечание. Теоремы 1-3 имеют применения в доказательстве обращения в нуль суммы $\sum\limits_{A \in Cl_F} \psi(A)\, G_A(q,l)$. С этой целью в них выделены сомножители, зависящие от первых коэффициентов бинарных квадратичных форм $Q_A(m_1, m_2)$, через которые определены двойные суммы Гаусса $G_A(q,l)$.

Литература

1. Малышев А.В. О представлении целых чисел положительными квадратичными формами // Труды математического института им. В.А. Стеклова АН СССР. – 1962. – 65.
2. Хассе Г. Лекции по теории чисел / М.: Иностранная литература, 1953.
3. Айерлэнд К., Роузен М. Классическое введение в современную теорию чисел / М.: Мир, 1987.
4. Гриценко С.А. О функциональном уравнении одного арифметического ряда Дирихле // Чебышеский сборник. Тула. – 2003. – 4, №2. – С.55-67.

5. Kloosterman H.D. On the representation of numbers in the form $ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$ // Acta Math. – 1926. – 49. – P.407-464.
6. Касселс Дж. Рациональные квадратичные формы / М.: Мир, 1982.
7. Дэвенпорт Г. Высшая арифметика / М.: Наука, 1965.

ABOUT GAUSS' DOUBLE SUMS CORRESPODING TO CLASSES OF IDEALS OF MAGINARY QUADRATIC FIELD

U.M. Pachev, R.A. Dohov

Kabardino-Balkar state University,
Chernishevsky Street 173, Nalchik, 360004, Russia, e-mail: urusbi@rambler.ru

Abstract. The work considers the calculation of Gauss's double sum

$$G_A(q,l) = \sum_{m_1=1}^{q} \sum_{m_2=1}^{q} e^{2\pi i \frac{lQ_A(m_1,m_2)}{q}},$$

corresponding to classes A of ideals of imaginary quadratic field.

Key words: Gauss's double sum, binary quadratic form, class of ideals, imaginary quadratic field.