MSC 20M18

ОБ ИДЕАЛАХ ПОЛУГРУППОВЫХ КОЛЕЦ ИНВЕРСНЫХ ПОЛУГРУПП

А.Г. Сокольский

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, 308007, г. Белгород, e-mail: sokolsky@bsu.edu.ru

Аннотация. Доказана так называемая «теорема о пересечении», с помощью которой получена характеризация радикала Джекобсона полугруппового кольца инверсной полугруппы в терминах наименьшей групповой конгруэнции.

Ключевые слова: полугрупповое кольцо, инверсная полугруппа.

Интерес к структурной теории групповых колец во многом обязан теории представлений групп. Полугрупповые кольца, являясь естественным обобщение групповых колец, также тесно связаны с теорией представлений полугрупп. Важным инструментом теории колец и, в частности, полугрупповых колец является радикал кольца. Специфика полугрупповых колец заключается в том, что описание их кольцевых свойств дается в терминах кольца коэффициентов и полугруппы. Теория групповых колец уже достаточно развита см., например, [1]. Для инверсных полугрупп существует техника весьма близкая к групповой. Это позволяет переносить многие групповые результаты на случай инверсных полугрупп. В данной заметке получена так называемая «теорема о пересечении», которая позволяет получить некоторую информацию о радикале Джекобсона полугруппового кольца инверсной полугруппы. Все необходимые сведения, касающиеся инверсных полугрупп и полугрупповых колец можно найти в [2].

Как обычно, через $J(R[S])$ обозначается радикал Джекобсона полугруппового кольца $R[S]$ полугруппы S над кольцом R, σ – наименьшая групповая конгруэнция на полугруппе S, ω – отношение порядка на инверсной полугруппе, для инверсной полугруппы S множество $D_S(N)$ определяется как прообраз группы $D_{S/\sigma}(N)$ при гомоморфизме $S \to S/\sigma$, т.е. $D_S(N)/\sigma = D_{S/\sigma}(N/\sigma)$, причем, если H – подгруппа группы G, то $D_G(H) = \{g \in G | [H : C_H(g)]\}$ для любой конгруэнции ρ на полугруппе S множество $I(\sigma, S, R) = \{\sum(r_i s - r_i t | r_i \in R, (s,t) \in \rho)\}$ является идеалом кольца $R[S]$.

Сначала докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. Пусть R — кольцо с единицей, S — инверсная полугруппа, $R[S]$ — полугрупповое кольцо. Тогда

$$I(\sigma, S, R) = \{\alpha \in R[S] | \exists e \in E, \alpha e = 0\}.$$

□ Любой элемент $\alpha \in I(\sigma, S, R)$ можно представить в виде

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} (r_i x_i - r_i y_i), \quad \text{где} \quad r_i \in R, (x_i, y_i) \in \sigma.$$

По определению наименьшей групповой конгруэнции σ найдутся элементы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ из E такие, что $x_i e_i = y_i e_i, i = 1, 2, \ldots, n$. Если в качестве e взять произведение $e_1 e_2, \ldots e_n$, то $\alpha e = 0$. Следовательно, имеет место включение «$\subseteq$». Пусть теперь $\alpha = r_1 x_1 + r_2 x_2 + \cdots + r_n x_n$, причем $\alpha e = 0$ для некоторого идемпотента $e \in E$. Тогда из равенства $r_1 x_1 e + r_2 x_2 e + \cdots + r_n x_n e = 0$ следует, что $\sum_{i=1}^{n} r_i = 0$. Если $\alpha e = 0$, то $r_1 x_2 e = -\sum r_{i_k} x i_k e$, где $i_k \in \{2, \ldots, n\}$. Это возможно лишь в том случае, когда $(x_1, x_{i_k}) \in \sigma$ и $r_1 + \sum r_{i_k} = 0$. Следовательно, $r_1 x_1 + \sum r_{i_k} x_{i_k} \in I(\sigma, S, R)$. Подобным образом поступим с остальными слагаемыми. Через конечное число шагов получим $\alpha \in I(\sigma, S, R)$. ■

Лемма 2. *Пусть R — кольцо с единицей, N — нормальная подгруппа инверсной полугруппы S, $R[S]$ — полугрупповое кольцо. Если $\alpha \in R[S] \setminus I(\sigma, S, R)$, то существует идемпотент $e \in E$ такой, что элемент αe является N-разложимым.*

□ Пусть $\alpha = r_1 g_1 + r_2 g_2 + \cdots + r_n g_n, r_i \in R, g_i \in S, i = 1, 2, \ldots, n$. Каждый элемент $g_i, i = 1, 2, \ldots, n$ содержится в некотором ω-классе полугруппы S по полугруппе N. Поэтому согласно лемме 1 из [3] найдется идемпотент $f \in S$ такой, что $\alpha f = r_1 h_1 s_1 + r_2 h_2 s_2 + \cdots + r_n h_n s_n$, где все s_i взяты из различных смежных ω-классов по подполугруппе N. Приведем подобные члены при $s_i, i = 1, 2, \ldots, n$. Коэффициенты при s_i обозначим через v_i. Очевидно, что $v_i \in R[N], i = 1, 2, \ldots, n$. Если $h_l h_j \in \mathrm{supp}(v_i)$ и $(h_l, h_j) \in \sigma$, то существует идемпотент $f_i \in E$ такой, что $h_l f_i = h_j f_i$. Следовательно, для каждого v_i существует элемент w_i такой, что в разложении элемента $u_i = v_i w_i$ все элементы из N принадлежат различным ω-классам полугруппы S по подполугруппе E. Поэтому в качестве e можно взять $f f_1 f_2 \ldots f_k w_1 w_2 \ldots w_k$. Из условия $\alpha \notin I(\sigma, S, R)$ следует, что $\alpha e \notin 0$. ■

Включение $\sigma \in \pi(N)$ гарантирует, что дальнейшее умножение элемента αe на идемпотенты из E не изменят числа слагаемых в его разложении. Нетрудно показать, что для любого идемпотента $e' \in E$, удовлетворяющего условиям предыдущей леммы, количество слагаемых в разложении элемента $\alpha e'$ будет равно числу слагаемых в разложении элемента αe. Это число слагаемых назовем длиной элемента.

Лемма 3. *Пусть R — область целостности с единицей, N — нормальная, замкнутая подполугруппа инверсной полугруппы S, α, β — ненулевые элементы полугруппового кольца $R[S]$ такие, что $\Gamma(\mathrm{supp}(\alpha)) \neq \Gamma(\mathrm{supp}(\beta))$ и каждое из множеств $\Gamma(\mathrm{supp}(\alpha))$, $\Gamma(\mathrm{supp}(\beta))$ не содержит одинаковых элементов. Предположим, что $\alpha x \beta - \beta x \alpha \in I(\sigma, S, R)$ для любого $x \in N$. Тогда $D_S(N) \neq E\omega$.*

□ Пусть $\mathrm{supp}(\alpha) = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$, $\mathrm{supp}(\beta) = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$. Согласно лемме из условия $\alpha x \beta - \beta x \alpha \in I(\sigma, S, R)$ следует, что $\alpha x \beta p = \beta x \alpha p$ для некоторого идемпотента $p \in S$. Предположим, что $g_1 \notin \Gamma(\mathrm{supp}(\beta))$. Тогда из последнего равенства следует существование конечного числа элементов $u_{ij} \in N, i, j \neq 1, v_{ij} \in N$ таких, что

$$u_{ij}^{-1}(g_i^{-1} g_1) u_{ij} = e_{ij}(h_j p p^{-1} h_1^{-1}) e_{ij}\,,$$

$$v_{ij}^{-1}(h_i^{-1} g_1) v_{ij} = e'_{ij} g_i p p^{-1} h_1^{-1} e_{ij}\,,$$

где e_{ij}, e'_{ij} — некоторые идемпотенты из E. Действительно, поскольку R — область

целостности, то из равенства $\alpha x\beta p = \beta x\alpha p$ следует либо (1) $g_1xh_1p = g_1xh_jp, i, j \neq 1$ либо (2) $g_1xh_1p = h_ixg_jp$,
для некоторых $i, j \leq n$.

Рассмотрим случай (1):

$$g_1xh_1p = g_1xh_jp \Rightarrow (g_ix)^{-1}g_1xh_1p(h_1p)^{-1} = (g_ix)^{-1}h_jp(h_1p)^{-1} \Rightarrow$$

$$x^{-1}(g_i^{-1}g_1)x(h_1pp^{-1}h_1^{-1} = (x^{-1}g_i^{-1}g_ix)h_jpp^{-1}h_1^{-1} \Rightarrow$$

$$u_{ij}^{-1}(g_i^{-1}g_1)u_{ij} = e_{ij}(h_jpp^{-1}h_1^1)e_{ij},$$

где $e_{ij} = h_1p^{-1}ph_1^{-1}x^{-1}g_i^{-1}g_ix$, $u_{ij} = e_{ij}x$ (здесь x — любой фиксированный элемент из N, для которого верно равенство (1)). Подобным образом можно найти v_{ij}, e'_{ij}.

Применим этот прием для доказательства основного утверждения. Пусть y — произвольный элемент подполугруппы N, тогда из равенства $\alpha x\beta p = \beta x\alpha p$ следует $g_1xh_1p = g_1xh_jp, i, j \neq 1$ либо $g_1xh_1p = h_ixg_jp$, для некоторых $i, j \leq n$. Рассмотрим первый случай

$$g_1yh_1p = g_1yh_jp \Rightarrow (g_iy)^{-1}g_1yh_1p(h_1p)^{-1} = (g_iy)^{-1}h_jp(h_1p)^{-1} \Rightarrow$$

$$e_1y^{-1}(g_i^{-1}g_1)ye_1 = e_1(h_jp^{-1}h_1^{-1})e_1\,, e_1 = h_1p^{-1}ph_1^{-1}y^{-1}g_i^{-1}g_iy \in E\,,$$

$$\Rightarrow e_1e_{ij}y^{-1}(g_i{-}1g_1)ye_1e_{ij} = e_1e_{ij}(h_jpp^{-1}h_1^{-1})e_{ij}e_1 = u_{ij}^{-1}(g_i^{-1}g_1)u_{ij} \Rightarrow$$

$$e_2y_{-1}y^{-1}(g_i^{-1}g_1)ye_2 = u_{ij}(g_i^{-1}g_1)u_{ij}\,,$$

где $e_2 = e_1e_{ij}$. Из предыдущего равенства следует, что

$$(e_2y^{-1})^{-1}e_2y^{-1}(g_i^{-1}g_1)ye_2u_{ij}(g_i^{-1}g_1)^{-1}u_{ij}e_2y^{-1} =$$

$$= (e_2y^{-1})^{-1}u_{ij}^{-1}(g_i^{-1}g_1)^{-1}u_{ij}u_{ij}^{-1}(g_i^{-1}g_1)e_2y^{-1}\,.$$

Ясно, что в последнем равенстве справа стоит идемпотент из S, обозначим его через e_3, а идемпотент $(e_2y^{-1})e_2y^{-1}$ через e_4. Тогда получим

$$e_4(g_i^{-1}g_1)ye_2u_{ij}^{-1}(g_i^{-1}g_1)(ye_2u_{ij}^{-1})^{-1} = e_3 \in E$$

Учтем теперь, что

$$e_4(g_i^{-1}g_1)ye_2u_{ij}^{-1}(g_i^{-1}g_1)(ye_2u_{ij}^{-1})^{-1} \leqq g_i^{-1}g_1yu_{ij}^{-1}(g_i^{-1}g_1)^{-1}(yu_{ij}^{-1})^{-1}$$

Тогда

$$[g_i^{-1}g_1, yu_{ij}^{-1}] \in E\omega$$

Это означает, что $yu_{ij}^{-1} \in C^N_{g_i^{-1}g_1} \subseteq C^N_{g_i^{-1}g_1}\omega$, т.е. $y \in (C^N_{g_i^{-1}g_1}u_{ij})_\omega$. Аналогично во втором случае можно показать, что $y \in (C^N_{h_i^{-1}g_1}v_{ij})_\omega$. Таким образом полная инверсная подполугруппа N покрывается конечным числом правых ω-классов по подполугруппам $C^N_{g_i^{-1}g_1}$ и $C^N_{h_i^{-1}g_1}$. Тогда по лемме 5 из [3] среди них найдется хотя бы одна, имеющая конечный

ω-индекс в N, т.е. при некотором i либо $g_i^{-1}g_1$, либо $h_i^{-1}g_1$ содержится в $D_S(N)$. Предположим, что $g_i^{-1}g_1 \in E\omega$ для некоторого i. Тогда существует идемпотент $e' \in E$ такой, что $e' \leq g_i^{-1}g_1$. Согласно лемме 1 из [3] $e' = e'g_i^{-1}g_1$, следовательно, $e'g_1e' = e'g_ie'$, откуда $(e'g_1, e'g_i) \in \sigma$ и по лемме 7.11 из [2] отсюда следует, что $(g_1, g_i) \in \sigma$, что противоречит условию. Аналогично показывается, что $h_i^{-1}g_1 \notin E\omega$. ■

Доказательство следующей теоремы «о пересечении» полностью совпадает с доказательством теоремы из [3] для полугруппы, являющейся полурешеткой групп, только вместо леммы 9 из [3], нужно применить лемму настоящей работы.

Теорема 4. *Пусть R — область целостности с единицей, N — нормальная, замкнутая подполугруппа инверсной полугруппы S. Если $D_S(N) = E\omega$, I — ненулевой идеал полугруппового кольца $R[N], I \nsubseteq I(\sigma, S, R)$ то $I \cap R[N] \neq 0$*

В качестве приложений этой теоремы приведем теорему, в которой получена некоторая информация о строении радикала Джекобсона полугруппового кольца инверсной полугруппы.

Теорема 5. *Пусть R — область целостности с единицей, N — нормальная замкнутая подполугруппа инверсной полугруппы S, причем $D_S(N) = E\omega$. Если полугрупповое кольцо $R[N]$ полупросто относительно радикала Джекобсона J, то $J(R[S]) \subset I(\sigma, S, R)$.*

□ Предположим, что $J(R[S]) \nsubseteq I(\sigma, S, R)$, тогда по теореме $J(R[S]) \cap R[N] \neq 0$. Заметим, что $J(R[S]) \cap R[N]$ является идеалом в кольце $R[N]$, причем $J(R[S]) \cap R[N] \subseteq R[N]$. По условию $J(R[N]) = 0$ и, следовательно, $J(R[S]) \cap R[N] = 0$, что противоречит теореме . Поэтому $J(R[S]) \subset I(\sigma, S, R)$. ■

Литература

1. Passman D.S. The algebraic structure of group rings / Pure Appl. Math. / New York: Wiley, 1977.
2. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. Том 1, 2 / М.: Мир, 1972.
3. Сокольский А.Г. О полугрупповых кольцах полурешеток групп / Изв. вузов. Матем. – 1989. – №8. – С.53–55.

ON IDEALS OF SEMIGROUP RINGS OF INVERSE SEMIGROUPS

A.G. Sokolsky

Belgorod State University,
Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: sokolsky@bsu.edu.ru

Abstract. The so-called intersection theorem is proved. On the basis of it it to obtain the characterization of Jacobson's radical of semigroup rings which is connected with inverse semigroups is obtained. It is done in term of the least group congruence.

Key words: semigroup ring, inverse semigroup.