MSC 41A15

ПРИБЛИЖЕНИЕ РАЗРЫВНОЙ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ С НЕИЗВЕСТНЫМИ ЛИНИЯМИ РАЗРЫВА РАЗРЫВНЫМ АППРОКСИМАЦИОННЫМ СПЛАЙНОМ

О.Н. Литвин, Ю.И. Першина

Украинская инженерно-педагогическая академия,
ул. Университетская, 16, Харьков, 61003, Украина, e-mail: yulia_pershina@mail.ru

Аннотация. В статье построены и исследованы разрывные аппроксимационные сплайны для приближения разрывных функций. Разработан алгоритм восстановления разрывной функции, неизвестные разрывы которой неизвестны, с помощью приближения ее построенным разрывным аппроксимационным сплайном. Также разработан алгоритм оптимального определения сетки приближающего сплайна. Введено понятие ε-непрерывности функции двух переменных.

Ключевые слова: разрывная функция, разрывная аппроксимация функций, ε-непрерывность функции, прямоугольные элементы.

Введение. Задача приближения разрывных функций является одной из самых сложных задач вычислительной математики. Специалистам по вычислительной математике хорошо известны операторы приближения непрерывных и дифференцируемых функций с помощью полиномов и сплайнов [1-3]. Известны также работы по приближению непрерывных функций одной переменной кусочно-постоянными функциями [4], [5], в которых непрерывные и дифференцируемые функции приближаются сплайнами степени ноль.

Сложные объекты различного назначения имеют многокомпонентную структуру, составляющие которых различаются между собой механическими, физическими и другими характеристиками. Авторы работ [6-9] разработали новые математические модели процессов многокомпонентных тел; получили новые классы краевых задач с условиями сопряжения и разрывными решениями); для эллиптических задач 2-го и 4-го порядков получили соответствующие функционалы энергии, определенные на классах разрывных функций.

Среди многомерных объектов, которые необходимо исследовать, значительно большее их количество описывается разрывными функциями. Например, в компьютерной томографии при исследовании внутренней структуры тела полезно учитывать его неоднородность, то есть разную плотность в разных частях тела (кости, сердце, желудок, печень и т.д. имеют разную плотность, то есть плотность всего тела является функцией с разрывами первого рода на системе линий). То есть актуальной является разработка и исследование теории приближения разрывных функций с помощью разрывных сплайнов.

В указанных работах исследовалось приближение непрерывных функций с помощью непрерывных и разрывных сплайнов. Но общей теории таких приближений не существует. Также не существует общей теории приближения разрывных функций разрывными сплайнами. В настоящей работе авторы предлагают такую общую теорию построения разрывных сплайнов, множество которых, как частный случай, включает множество непрерывных и непрерывно-дифференцируемых до заданного порядка сплайнов, которые могут иметь разрывы первого рода или разрывные частные производные в заданных точках или на заданном множестве линий — границ элементов.

В работах [10-12] строятся и исследуются интерполяционные, аппроксимационные и интерлинационные разрывные сплайны для приближения разрывных функций от двух переменных с областью определения, которая разбивается на прямоугольные и треугольные элементы. Причем в этих работах считалось, что линии разрыва известны. В работе [13] авторы предложили метод восстановления разрывной функции одной переменной по известным значениям этой функции в точках заданной сетки, используя разрывный аппроксимационный сплайн, т.е. точки разрыва заданной функции наперед исследователю не были известны.

В данной работе авторы предлагают метод восстановления разрывной функции двух переменных по известным значениям этой функции в заданной сетке узлов, не лежащих на линиях разрыва. Для этого используется приближение разрывной функции двух переменных разрывным аппроксимационным сплайном на прямоугольных элементах.

1. Постановка задачи. Пусть задана разрывная функция двух переменных $f(x,y)$ в области $G=[0,1]\subset R^2$ и задано некоторое разбиение на прямоугольные элементы $\Pi_{i,j}=[x_i,x_{i+1}]\times[y_j,y_{j+1}]$, $0=x_0<x_1<\ldots<x_m=1$, $0=y_0<y_1<\ldots<y_n=1$. Исследователю известны значения этой функции в узлах заданной сетки; причем в каждой точке (x_i,y_j) задано четыре значения приближаемой функции

$$C_{i,j}^{+,+}=\lim_{(x,y)\to(x_i+0,y_j+0)}f(x,y)\,;\qquad C_{i,j}^{-,+}=\lim_{(x,y)\to(x_i-0,y_j+0)}f(x,y)\,;$$

$$C_{i,j}^{+,-}=\lim_{(x,y)\to(x_i+0,y_j-0)}f(x,y)\,;\qquad C_{i,j}^{-,-}=\lim_{(x,y)\to(x_i-0,y_j-0)}f(x,y)\,.$$

Целью работы является построение и исследование разрывного аппроксимационного сплайна по значениям разрывной функции в заданных точках и разработка алгоритма оптимального выбора узлов приближающего сплайна.

2. Построение разрывного аппроксимационного сплайна.

Определение. *Будем называть аппроксимационный билинейным сплайном в каждом элементе* $\Pi_{i,j}$ *сплайн вида*

$$Sp(x,y)=s_{ij}(x,y)=C_{i,j}^{+,+}\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\cdot\frac{y-y_{j+1}}{y_j-y_{j+1}}+$$

$$+\,C_{i+1,j}^{-,+}\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\cdot\frac{y-y_{j+1}}{y_j-y_{j+1}}+C_{i,j+1}^{+,+}\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\cdot\frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j}+\qquad(1)$$

$$+\,C_{i+1,j+1}^{-,-}\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\cdot\frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j}\,,\qquad i=\overline{1,m}\,,j=\overline{1,n}\,,$$

где коэффициенты $C^{+,+}_{i,j}, C^{-,+}_{i+1,j}, C^{+,-}_{i,j+1}, C^{-,-}_{i+1,j+1}$ *сплайна находятся методом наименьших квадратов из условия*

$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} (f(x,y) - Sp(x,y))^2 dxdy \to \min_C . \tag{2}$$

Теорема. *Для оператора приближения разрывной функции* $f(x,y) \in C^{(2,2)}(\Pi_{i,j})$ *разрывным аппроксимационным сплайном* $Sp(x,y)$ *вида (1), матрица коэффициентов которого находится методом наименьших квадратов (2), на каждом элементе разбиения* $\Pi_{i,j}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$ *справедлива следующая оценка:*

$$\|Sp(x,y)\| \le \max\{|f(x_i,y_j)|, |f(x_{i+1},y_j)|, |f(x_i,y_{j+1})|, |f(x_{i+1},y_{j+1})|\} +$$

$$+ \frac{1}{8}(x_{i+1}-x_i)^2\|f^{2,0}(x,y)\|_\infty + \frac{1}{8}(y_{j+1}-y_j)^2\|f^{0,2}(x,y)\|_\infty .$$

□ Решим минимизационную задачу:

$$P_{ij}(C) = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} (C^{+,+}_{i,j}\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\cdot\frac{y-y_{j+1}}{y_j-y_{j+1}} + C^{-,+}_{i+1,j}\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\cdot\frac{y-y_{j+1}}{y_j-y_{j+1}} +$$

$$+ C^{+,-}_{i,j+1}\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\cdot\frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j} + C^{-,-}_{i+1,j+1}\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\cdot\frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j} - f(x,y))^2dxdy \to \min_C .$$

Далее решаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P_{ij}(C)}{\partial C^{+,+}_{i,j}} = 0; \\ \dfrac{\partial P_{ij}(C)}{\partial C^{-,+}_{i+1,j}} = 0; \\ \dfrac{\partial P_{ij}(C)}{\partial C^{+,-}_{i,j+1}} = 0; \\ \dfrac{\partial P_{ij}(C)}{\partial C^{-,-}_{i+1,j+1}} = 0; \end{cases} \tag{3}$$

относительно неизвестных $C^{+,+}_{i,j}$, $C^{-,+}_{i+1,j}$, $C^{+,-}_{i,j+1}$, $C^{-,-}_{i+1,j+1}$.

В этой системе сделаем замену

$$C^{+,+}_{i,j} = f(x_i+0, y_j+0) + \delta_{i,j}\,;$$

$$C^{-,+}_{i+1,j} = f(x_{i+1}-0, y_j+0) + \delta_{i+1,j}\,;$$

$$C^{+,-}_{i,j+1} = f(x_i + 0, y_{j+1} - 0) + \delta_{i,j+1};$$

$$C^{-,-}_{i+1,j+1} = f(x_{i+1} - 0, y_{j+1} - 0) + \delta_{i+1,j+1}$$

и заменим $f(x, y)$ интерполяционным полиномом Лагранжа с остаточным членом $R(x, y)$.

После непосредственного вычисления интегральных членов система (3) приобретет вид

$$\frac{x_i - x_{i+1}}{3}\frac{y_j - y_{j+1}}{3}\delta_{i,j} + \frac{x_{i+1} - x_i}{6}\frac{y_{j+1} - y_j}{3}\delta_{i+1,j} + \frac{x_{i+1} - x_i}{3}\frac{y_{j+1} - y_j}{6}\delta_{i,j+1} +$$
$$+\frac{x_{i+1} - x_i}{6}\frac{y_{j+1} - y_j}{6}\delta_{i+1,j+1} = \int\limits_{x_i}^{x_{j+1}}\int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} R(x,y)\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}\frac{y - y_{j+1}}{y_j - y_{j+1}}dxdy;$$

$$\frac{x_{i+1} - x_i}{6}\frac{y_{j+1} - y_j}{3}\delta_{i,j} + \frac{x_{i+1} - x_i}{3}\frac{y_{j+1} - y_j}{3}\delta_{i+1,j} + \frac{x_{i+1} - x_i}{6}\frac{y_{j+1} - y_j}{6}\delta_{i,j+1} +$$
$$+\frac{x_{i+1} - x_i}{3}\frac{y_{j+1} - y_j}{6}\delta_{i+1,j+1} = \int\limits_{x_i}^{x_{j+1}}\int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} R(x,y)\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\frac{y - y_{j+1}}{y_j - y_{j+1}}dxdy;$$

$$\frac{x_{i+1} - x_i}{3}\frac{y_{j+1} - y_j}{6}\delta_{i,j} + \frac{x_{i+1} - x_i}{6}\frac{y_{j+1} - y_j}{6}\delta_{i+1,j} + \frac{x_i - x_{i+1}}{3}\frac{y_{j+1} - y_j}{3}\delta_{i,j+1} +$$
$$+\frac{x_{i+1} - x_i}{6}\frac{y_{j+1} - y_j}{3}\delta_{i+1,j+1} = \int\limits_{x_i}^{x_{j+1}}\int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} R(x,y)\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}\frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j}dxdy;$$

$$\frac{x_{i+1} - x_i}{6}\frac{y_{j+1} - y_j}{6}\delta_{i,j} + \frac{x_{i+1} - x_i}{3}\frac{y_{j+1} - y_j}{6}\delta_{i+1,j} + \frac{x_{i+1} - x_i}{6}\frac{y_{j+1} - y_j}{3}\delta_{i,j+1} +$$
$$+\frac{x_{i+1} - x_i}{3}\frac{y_{j+1} - y_j}{3}\delta_{i+1,j+1} = \int\limits_{x_i}^{x_{j+1}}\int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} R(x,y)\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j}dxdy\,.$$

Для анализа правых частей полученной системы воспользуемся формулой из работы [3]

$$\|R(x,y)\|_{C[x_k,x_{k+1}]} \le \frac{1}{8}(x_{i+1} - x_i)^2\|f^{(2,0)}(x,y)\|_\infty + \frac{1}{8}(y_{j+1} - y_j)^2\|f^{(0,2)}(x,y)\|_\infty\,.$$

Используя обозначение $\|\delta\| = \max(\delta_{i,j}, \delta_{i+1,j}, \delta_{i,j+1} + \delta_{i+1,j+1})$ и проведя упрощения, получим систему, состоящую из четырех одинаковых неравенств вида

$$\|\delta\| \le \frac{1}{8}(x_{i+1} - x_i)^2\|f^{(2,0)}(x,y)\|_\infty + \frac{1}{8}(y_{j+1} - y_j)^2\|f^{(0,2)}(x,y)\|_\infty\,.$$

Из этих неравенств и вытекает доказательство теоремы. ■

Следствие. *Если приближаемая функция $f(x,y)$ является кусочно-билинейной или кусочно постоянной функцией в каждом элементе разбиения с точками разрыва (x_i, y_j)*

в случае приближения ее кусочно-билинейным сплайном $Sp(x,y)$, определенным формулами (1) с неизвестными $C^{+,+}_{i,j}, C^{-,+}_{i+1,j}, C^{+,-}_{i,j+1}, C^{-,-}_{i+1,j+1}$, которые находяться из условия (2), то получаем точно приближаемую функцию, т.е. $Sp(x,y) = f(x,y)$, где $f(x,y) = const$ или $f(x,y) = A_0 + A_1x + A_2y + A_3xy, A_i = \text{const}, i = 1,2,3$.

Замечание. Если $C^{+,+}_{i,j} = C^{+,-}_{i,j} = C^{-,+}_{i,j} = C^{-,-}_{i,j}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$, то построенный разрывный аппроксимационный сплайн вида (1) является непрерывным линейным аппроксимационным сплайном.

3. Алгоритм восстановления разрывной функции. Пусть функция $f(x,y)$ является разрывной в области $G = [0;1] \times [0;1]$. Задано некоторое разбиение области G на прямоугольные элементы $\Pi_{i,j} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$, $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = 1$, $0 = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = 1$; ε — заданная точность приближения. Будем считать, что в качестве входных данных выступает матрица значений $C_{p,l}, p = \overline{1,n}, l = \overline{1,4}$ разрывной функции $f(x,y)$, где l — номер угла в p -ом прямоугольном элементе, начиная с левого нижнего угла (обход по часовой стрелке). Линии разрывов функции $f(x,y)$ неизвестны.

Задача заключается в:

1) восстановлении разрывной функции с помощью построенного выше разрывного линейного аппроксимационного сплайна;

2) оптимальном нахождении сетки приближающего сплайна (оптимальном разбиении области определения функции на прямоугольные элементы), в которой и находятся разрывы заданной функции.

Изложим алгоритм восстановления пошагово.

Шаг 1. Строим разрывный аппроксимационный сплайн на заданных узлах $(x_i, y_j), i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$ по формуле (1), который в каждом элементе разбиения может иметь разный аналитический вид $s_{ij}(x,y,C)$ с неизвестными $C_{k,l}, k = \overline{1, m \cdot n}, l = \overline{1,4}$.

Шаг 2. Находим матрицу C неизвестных коэффициентов сплайна из условия (2). После подстановки найденных коэффициентов в сплайн (1) получим разрывный сплайн, состоящий из функций $s_{ij}(x,y), i = \overline{1,m-1},\ j = \overline{1,n-1}$.

Шаг 3. На каждом прямоугольном элементе разбиения $\Pi_{i,j}, i = \overline{1,m-1}, j = \overline{1,n-1}$ вычисляем значения

$$J^*_{ij} = \max_{(x,y)\in\Pi_{i,j}} J_{ij}(x,y)\,,$$

$$J_{ij}(x,y) = |f(x,y) - s_{ij}(x,y)|\,.$$

Определение. *Если $|\lim\limits_{x\to x_q+0} f(x,y) - \lim\limits_{x\to x_q-0} f(x,y)| < \varepsilon, \forall y$, то функцию $f(x,y)$ будем называть ε-непрерывной на лпнии $x = x_q$, аналогично, если $|\lim\limits_{y\to y_s+0} f(x,y) - \lim\limits_{y\to y_s-0} f(x,y)| < \varepsilon, \forall x$ то функцию $f(x,y)$ будем называть ε-непрерывной на лппи $y = y_s$.*

Шаг 4. Если функция $f(x,y)$ является ε-непрерывной на линиях $x = x_q$ или $y = y_s$, то эти линии соответственно удаляем из заданной сетки.

Шаг 5. Со всех $J^*_{ij}, i = \overline{1,m-1}, j = \overline{1,n-1}$ выбираем максимальное значение $W = \max\limits_{1\le i\le m-1, 1\le j\le n-1} J^*_{ij}$ и в зависимости от того, какому прямоугольному элементу оно принадлежит, вводим в заданную сетку две новые линии. Например, если $W \in \Pi_{u,v}$, $u < m, v < n$, то вводим в рассмотрение линии $x = x^*, y = y^*$, где

$$x^* = x_u + \frac{x_{u+1} - x_u}{2}; \qquad y^* = y_v + \frac{y_{v+1} - y_v}{2} .$$

Шаг 6. На новой сетке снова строим аппроксимационный сплайн по формуле (1) и по формуле (2) находим матрицу неопределенных коэффициентов C. И дальше проверяем выполнение условия $\max\limits_{(x,y)\in G} |f(x,y) - Sp(x,y)| < \varepsilon$. Если это условие выполняется, то мы восстановили разрывную функцию $f(x,y)$ с точностью ε и получили оптимальный выбор сетки приближающего сплайна, среди линий которой и находятся разрывы заданной функции. Если указанное условие не выполняется, то возвращаемся к шагу 3.

Пример 1. Пусть в области $G = [0,1] \times [0,1]$ задана функция

$$f(x,y) = \begin{cases} 3, & 0 \le x \le 0.4; \\ 0, & 0.4 < x \le 1. \end{cases}$$

Таким образом, функция имеет один разрыв первого рода на линии $x = 0.4$. Выбираем сетку так, чтобы она не совпадала с линией разрыва заданной функции $x_1 = 0$, $x_2 = 0.5$, $x_3 = 1$; $y_1 = 0$, $y_2 = 0.5$, $y_3 = 1$. Строим разрывный аппроксимационный сплайн по формуле (1) и находим неизвестную матрицу C по формуле (2). Зададим точность приближения $\varepsilon = 0.01$.

Результат был получен за 18 итераций. То есть на 18-й итерации разрывный сплайн $Sp(x,y)$ приблизил разрывную функцию $f(x,y)$ с точностью ε. При этом оптимально выбрали сетку $x_1 = 0$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 1$; $y_1 = 0$, $y_2 = 1$.

Пример 2. Пусть в той же области, что и в примере 1, задана функция

$$f(x,y) = \begin{cases} 3, & 0 \le x \le 0.4, 0 \le y \le 0.4; \\ 0, & 0.4 < x \le 1, 0.4 < x \le 1. \end{cases}$$

Выберем такую же сетку, как и в примере 1. Заданная функция имеет разрывы на линиях $x = 0.4$, $y = 0.4$. Построим аппроксимационный сплайн на заданной сетке и зададим такую же точность приближения. В результате получили оптимально выбранную сетку $x_1 = 0$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 1$; $y_1 = 0$, $y_2 = 0.4$, $y_3 = 1$.

Выводы. В работе предложен алгоритм восстановления разрывной функции, разрывы которой неизвестны, с помощью разрывного аппроксимационного сплайна. Разработан алгоритм оптимального определения сетки приближающего сплайна.

Авторы планируют разработать алгоритм восстановления разрывной функции, разрывы которой лежат на более сложных линиях. И применить разработаный алгоритм для восстановления фантома Шеппа-Логана, который используется в качестве теста в компьютерной томографии и моделирует внутреннее строение головного мозга человека.

Литература

1. Корнейчук Н.П. Сплайны в теории приближения / Москва: Наука, 1984. – 352 с.
2. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике / Москва: Наука, 1976. – 227 с.
3. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций / М.: Наука. 1980. – 352 с.
4. De Vore R.A. A method of grid optimization for finite element methods // Computer method in appl. Mechanics and engineering. – 1983. – 41. – P.29-45.
5. Литвин О.М. Интерлинация функций и некоторые ее применения / Харьков: Основа, 2002. – 544 с.(на украинском языке)
6. Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Анализ многокопмонентных распределенных систем и оптимальное управление / Киев: Наукова Думка, 2007. – 703 с.
7. Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Модели и методы решения задач в неоднородных средах / Киев: Наукова думка, 2001. – 606 с.
8. Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Оптимальное управление неоднородными распределенными системами / Киев: Наукова думка, 2003. – 506 с.
9. Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Системный анализ упругих и термоупругих неоднородных тел / Киев: Наукова думка, 2012. – 511 с.
10. Литвин О.М., Першина Ю.И. Построение кусочно-билинейных сплайнов для приближения функций с разрывами первого рода в узлах ректангуляции двумерной области // Таврический вестник информатики и математики: Симферополь. – 2011. – №1. – С.63-72.(на украинском языке)
11. Литвин О.Н., Першина Ю.И. Приближение разрывной функции двух переменных с помощью разрывных сплайнов двух переменных (прямоугольные элементы) // Компьютерная математика: Киев. – 2011. – №1. – С.96-105.
12. Литвин О.М., Першина Ю.И. Приближение разрывных функций двух переменных с разрывами первого рода на линиях триангуляции двумерной области // Управляющие системы и машины: Киев. – 2011. – №5. – С.34-47.
13. Литвин О.М., Першина Ю.И. Приближение разрывной функции разрывным сплайном, когда узлы сплайна не совпадают с разрывами функции // Институт проблем математики и механики. Труды ИПММ НАН Украины: Донецк. – 2012. – 24. – С.157-165.(на украинском языке)

APPROXIMATION OF TWO VARIABLES DISCONTINUOUS FUNCTION WITH UNKNOWN RUPTURE LINES BY DISCONTINUOUS APPROXIMATE SPLINE

O.N. Lytvyn, Y.I. Pershina

Ukrainian Engineering Pedagogical Academy
Universitetskaya St., 16, Kharkiv, 61003, Ukraine, e-mail: yulia_pershina@mail.ru

Abstract. Discontinuous approximate splines are constructed and investigated for the approximation of discontinuous functions. The restoration algorithm for discontinuous function with unknown ruptures is developed. It is done by means of their approximation by constructed discontinuous approximate spline which is constructed. The algorithm of optimal building of the approximate spline grid is developed also. The concept ε-continuity of two variables function is proposed.

Key words: discontinuous function, discontinuous approximation of functions, ε-continuity, rectangular elements.