MSC 93C05

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО И ЖЕСТКОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ОДНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ ЛЕОНТЬЕВСКОГО ТИПА

А.В. Келлер, М.А. Сагадеева

ФГБОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет» (НИУ),
Челябинск, Россия, e-mail: alevtinak@inbox.ru, sam79@74.ru

Аннотация. В статье представлен алгоритм численного решения задач оптимального и жесткого управления для нестационарной вырожденной линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений — нестационарной системы леонтьевского типа — с начальным условием Шоуолтера-Сидорова. Нестационарность системы рассмотрена в виде произведения одной из матриц системы и скалярной функции, зависящей от времени. Показаны свойства функционалов качества и доказана сходимость по норме приближенных решений указанных задач.

Ключевые слова: оптимальное управление, жесткое управление, системы леонтьевского типа, нестационарная система уравнений, уравнения соболевского типа.

Введение. Пусть L и M — квадратные матрицы порядка n, причем $\det L = 0$, а M — (L,p)-регулярна (т.е. существует $\mu \in \mathbb{C}$ такая, что $\det(\mu L - M) \neq 0$, а ∞ является полюсом $(\mu L - M)^{-1}$ порядка $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$). Рассмотрим задачу Шоуолтера-Сидорова

$$[R^L_\alpha(M)]^{p+1}(x(0) - x_0) = 0 \tag{0.1}$$

для неоднородной линейной системы

$$L\dot{x}(t) = Mx(t) + y(t), \tag{0.2}$$

где $R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1}L$, $y : [0,\tau] \to \mathbb{R}^n$, $\tau \in \mathbb{R}_+$.

Системы вида (0.2) при условии $\det L = 0$ не имеют единого, принятого всеми, названия. Для них используются термины алгебро-дифференциальные системы [1], дифференциально-алгебраические системы [2], вырожденные системы обыкновенных дифференциальных уравнений [3]. Впервые системы вида (0.2) было предложено называть *системой лентьевского типа* (СЛТ) в [4], имея ввиду ее прототип — знаменитую балансовую модель В.В. Леонтьева «затраты – выпуск» [5]. Заметим, что системы леонтьевского типа, являясь частным случаем линейного уравнения соболевского типа [6], моделируют не только экономические, но и технические системы [7].

Численное решение задач для СЛТ в ряде исследований [3,4,8] находится при использовании методов теории вырожденных (полу)групп, созданной Г.А. Свиридюком [9] и развиваемой его учениками [10,11]. При численном исследовании задач для СЛТ использование начального условия Шоуолтера-Сидорова является значимым [8], так как позволяет снять ограничения согласования начальных данных, имеющиеся, например, при использовании начального условия Коши. Кроме того, в современных исследованиях в области уравнений соболевского типа начальное условие Шоуолтера-Сидорова рассматривается как более естественное при изучении различных прикладных задач [12].

Впервые задачу оптимального управления для линейных уравнений соболевского типа с начальным условием Коши поставили Г.А. Свиридюк и А.А. Ефремов [13]. Их работы стали отправной точкой для развития нового направления в области уравнений соболевского типа. Обзор результатов, полученных в рамках этого направления, представлен в [14].

Введем в рассмотрение функционал качества

$$J(u) = \alpha \sum_{q=0}^{1} \int_{0}^{\tau} \|z^{(q)}(t) - z_0^{(q)}(t)\|_{\mathfrak{Z}}^2 dt + (1-\alpha) \sum_{q=0}^{\theta} \int_{0}^{\tau} \left\langle N_q u^{(q)}(t), u^{(q)}(t) \right\rangle_{\mathfrak{U}} dt \,, \tag{0.3}$$

где $\alpha \in (0,1]$, $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{Z}$ — гильбертовы пространства, $z = Cx$, C и N_q — квадратные матрицы порядка n, $\theta = 0, 1, \ldots, p+1$, $\tau \in \mathbb{R}_+$. Результаты численного исследования задачи оптимального управления

$$J(v) = \min_{u \in \mathfrak{U}_\partial} J(u), \qquad \alpha \in (0,1) \tag{0.4}$$

и задачи жесткого управления

$$J(v) = \min_{u \in \mathfrak{U}_\partial} J(u), \qquad \alpha = 1 \tag{0.5}$$

для системы леонтьевского типа

$$L\dot{x}(t) = Mx(t) + f(t) + Bu(t) \,, \tag{0.6}$$

с начальным условием Шоуолтера-Сидорова (0.1) представлены в [15]. Здесь $\mathfrak{U}_\partial$ — некоторое выпуклое и компактное подмножество допустимых управлений в пространстве управлений $\mathfrak{U}$.

В настоящей работе представлен алгоритм численного решения задач оптимального и жесткого управления для *нестационарной системы лентьевского типа* (НСЛТ) вида

$$L\dot{x}(t) = a(t)Mx(t) + f(t) + Bu(t) \,, \tag{0.7}$$

где $a : [0,\tau] \to \mathbb{R}_+$ — скалярная функция, описывающая изменение во времени параметров взаимовлияния состояний исследуемой системы.

Статья кроме введения и списка литературы состоит из трех частей. В первой строятся точные и приближенные решения задачи Шоуолтера-Сидорова (0.1) для НСЛТ (0.7), задачи оптимального управления (0.1), (0.3), (0.4), (0.7) и задачи жесткого управления (0.1), (0.3), (0.5), (0.7). Во второй части излагается алгоритм численного решения задач оптимального и жесткого управления. В третьей части доказываются свойства функционала качества (0.3), а также доказывается сходимость по норме приближенных решений, получаемых в результате применения алгоритма. Список литературы не претендует на полноту и отражает лишь личные пристрастия авторов.

1. Точные и приближенные решения задач

Пусть L и M — квадратные матрицы порядка n. Следуя [9], будем называть множества $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : \det(\mu L - M) \neq 0\}$ и $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$ соответственно *L-резольвентным множеством* и *L-спектром* матрицы M. Нетрудно показать [9], что либо $\rho^L(M) = \emptyset$, либо L-спектр матрицы M состоит из конечного множества точек. Кроме того, заметим, что множества $\rho^L(M)$ и $\sigma^L(M)$ не изменяются при переходе к другим базисам.

Для комплексной переменной $\mu \in \mathbb{C}$ определим матрично-значные функции $(\mu L - M)^{-1}$, $R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1}L$, $L^L_\mu(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ с областью определения $\rho^L(M)$ и будем их называть соответственно *L-резольвентой, правой* и *левой L-резольвентами* матрицы M.

Определение. *Матрица M называется L-регулярной, если $\rho^L(M) \neq \emptyset$ и (L,p)-регулярной, при p равном порядку полюса в ∞ для функции* $\det(\mu L - M)^{-1}$.

Замечание. Если бесконечность является устранимой особой точкой L-резольвентой матрицы M, то $p = 0$. Также заметим, что для квадратных матриц параметр p не может превосходить размерности пространства n.

В силу результатов [8] и [16] справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть матрица M (L,p)-регулярна и* $\det M \neq 0$. *Тогда для любых $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $y \in C^{p+1}([0,\tau];\mathbb{R}^n)$ существует единственное решение задачи Шоуолтера-Сидорова* (0.1) *для системы уравнений* (0.2), *имеющее вид*

$$x(y,t) = \lim_{k\to\infty} x_k(y,t) = \lim_{k\to\infty} \left[\left(\left(L - \frac{t}{k}M \right)^{-1} L \right)^k x_0 + \right.$$
$$+ \int_0^t \lim_{k\to\infty} \left(\left(L - \frac{t-s}{k}M \right)^{-1} L \right)^{k-1} \left(L - \frac{t-s}{k}M \right)^{-1} \left(kL^L_k(M) \right)^{p+1} y(s)ds + \tag{1.1}$$
$$\left. + \lim_{k\to\infty} \sum_{q=0}^{p} \left(M^{-1} \left(\left(kL^L_k(M) \right)^{p+1} - \mathbb{I}_n \right) L \right)^q M^{-1} \left(\mathbb{I}_n - \left(kL^L_k(M) \right)^{p+1} \right) y^{(q)}(t) \right].$$

Выражением (1.1) определены точное $x(y,t)$ и приближенное $x_k(y,t)$ решения задачи (0.1), (0.2).

Заметим, что условие $\det M \neq 0$ не снижает общности результата, так как если в системе $L\dot{x}(t) = Mx(t) + f(t)$ сделать замену переменных $x(t) = e^{\eta t}y(t)$, то в правой части получим матрицу $\widetilde{M} = M - \eta L$, такую что $\det \widetilde{M} \neq 0$.

В [17] доказана теорема о существовании единственного решения задачи Шоуолтера-Сидорова для нестационарного уравнения соболевского типа

$$L\dot{x}(t) = a(t)Mx(t) + y(t)\,, \tag{1.2}$$

при условии сильной (L,p)-секториальности оператора M. В силу того, что СЛТ являются конечномерным аналогом уравнений соболевского типа, приведем следующий результат без доказательства.

Теорема 2. *Пусть матрица M (L,p)-регулярна и $\det M \neq 0$. Тогда для любых $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $y \in C^{p+1}([0,\tau];\mathbb{R}^n)$ и $a \in C^{p+1}([0,\tau];\mathbb{R}_+)$, отделенной от нуля, существует единственное решение задачи Шоуолтера-Сидорова (0.1) для НСЛТ (1.2), имеющее вид*

$$x(y,t) = \lim_{k\to\infty} x_k(y,t) = \left[\lim_{k\to\infty}\left(\left(L - \frac{1}{k}M\int_0^t a(\zeta)d\zeta\right)^{-1} L\right)^k x_0 + \right.$$
$$+\int_0^t \lim_{k\to\infty}\left(\left(L-\frac{1}{k}M\int_s^t a(\zeta)d\zeta\right)^{-1} L\right)^k \left(L-\frac{1}{k}M\right)^{-1}\left(kL_k^L(M)\right)^p y(s)ds + \tag{1.3}$$
$$\left. + \lim_{k\to\infty}\sum_{q=0}^{p}\left(M^{-1}\left(\left(kL_k^L(M)\right)^{p+1} - \mathbb{I}_n\right)L\right)^q M^{-1}\left(\mathbb{I}_n - \left(kL_k^L(M)\right)^{p+1}\right)\left(\frac{1}{a(t)}\frac{d}{dt}\right)^q \frac{y(t)}{a(t)}\right],$$

причем выражение $\left(\frac{1}{a(t)}\frac{d}{dt}\right)^q$ в последнем слагаемом означает последовательное применение q раз соответствующего оператора.

Выражением (1.3) определены точное $x(y,t)$ и приближенное $x_k(y,t)$ решения задачи (0.1), (1.2).

Следуя результатам в [15], введем в рассмотрение пространства управления

$$\mathfrak{U} = H^{p+1}(\mathbb{R}^n) = \{u \in L_2(0,\tau;\mathbb{R}^n) : u^{(p+1)} \in L_2(0,\tau;\mathbb{R}^n)\,,\ p \in \{0\}\cup\mathbb{N}\}$$

и состояний

$$\mathfrak{X} = H^1(\mathbb{R}^n) = \{x \in L_2(0,\tau;\mathbb{R}^n) : \dot{x} \in L_2(0,\tau;\mathbb{R}^n)\}\,.$$

Решением задачи оптимального (жесткого) управления является пара $(v, x(v)) \in \mathfrak{U}_\partial \times \mathfrak{X}$, удовлетворяющая НСЛТ (0.7) с начальным условием (0.1), такая, что выполняется (0.4) ((0.5)), а функционал качества имеет вид (0.3). Отметим, что $\alpha \in (0,1]$ и $(1-\alpha)$ — весовые коэффициенты целей оптимального управления, заключающиеся в достижении плановых показателей наблюдаемой величины без скачкообразных изменений (первое слагаемое в (0.3)) и минимизации расходуемых для этого ресурсов управления (второе слагаемое в (0.3)).

В [17] в более общем случае доказана следующая

Теорема 3. *Пусть матрица M (L,p)-регулярна, $p \in \{0\}\cup\mathbb{N}$ и $\det M \neq 0$. Тогда при любых $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $f \in C^{p+1}([0,\tau];\mathbb{R}^n)$ и $a \in C^{p+1}([0,\tau];\mathbb{R}_+)$, отделенной от нуля, существует единственная пара $(v, x(v))$ такая, что $x(v)$ — сильное решение задачи Шоуолтера-Сидорова (0.1) для НСЛТ (0.7), а v — оптимальное управление задачи (0.3), (0.4), причем они связаны следующим образом*

$$x(v) = \lim_{k\to\infty} x_k(f + Bv, t)\,. \tag{1.4}$$

Целью жесткого управления является только достижение плановых показателей без скачкообразных изменений, т.е. $\alpha = 1$ в (0.3). Существование единственного решения задачи жесткого управления следует из справедливости теоремы 3.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы* 3, *тогда при любых* $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $f \in C^{p+1}([0,\tau];\mathbb{R}^n)$ *и* $a \in C^{p+1}([0,\tau];\mathbb{R}_+)$, *отделенной от нуля, существует единственное пара* $(v, x(v))$ *такая, что* $x(v)$ — *сильное решение задачи* (0.1), (0.7), *а* v — *оптимальное управление задачи* (0.3), (0.5), *причем связаны они формулой* (1.4).

В [8, 15] предложен численный метод решения задач оптимального и жесткого управления для СЛТ (0.6). Суть его сводится к следующему: пространство управлений $\mathfrak{U}$ заменяется на конечномерное пространство $\mathfrak{U}^\ell = H_\ell^{p+1}(\mathbb{R}^n)$ вектор-многочленов вида $u^\ell = u^\ell(t)$

$$u^\ell(t) = \mathrm{col}\left(\sum_{j=0}^{\ell} c_{1j}t^j, \sum_{j=0}^{\ell} c_{2j}t^j, \ldots \sum_{j=0}^{\ell} c_{nj}t^j\right). \tag{1.5}$$

Учитывая вид (0.3), необходимо чтобы $\ell > p$. Подставляя u^ℓ вместо u в (0.3) и (0.7) и рассматривая задачу оптимального управления

$$J(v^\ell) = \min_{u^\ell \in \mathfrak{U}_\partial^\ell} J(u^\ell), \qquad \alpha \in (0,1)\,,$$

получим решение (v^ℓ, x^ℓ), причем

$$x^\ell = x(v^\ell, t) = \lim_{k\to\infty} x_k(f + Bv^\ell, t)\,.$$

Здесь и далее $\mathfrak{U}_\partial^\ell = \mathfrak{U}_\partial \cap \mathfrak{U}^\ell$.

Аналогично поступаем, рассматривая задачу жесткого управления

$$J(v^\ell) = \min_{u^\ell \in \mathfrak{U}_\partial^\ell} J(u^\ell), \qquad \alpha = 1\,.$$

Приближенное решение задачи оптимального управления (0.1), (0.3), (0.4), (0.7) обозначим парой (v_k^ℓ, x_k^ℓ), v_k^ℓ — точка минимума функционала

$$J_k(u^\ell) = \alpha \sum_{q=0}^{1} \int_0^\tau \|Cx_k^{(q)}(f + Bu^\ell, t) - Cx_0^{(q)}(t)\|^2 dt + (1-\alpha)\sum_{q=0}^{\theta} \int_0^\tau \left\langle N_q (u^\ell)^{(q)}(t), (u^\ell)^{(q)}(t)\right\rangle dt\,, \tag{1.6}$$

т.е.

$$J(v_k^\ell) = \min_{u^\ell \in \mathfrak{U}_\partial^\ell} J_k(u^\ell), \qquad \alpha \in (0,1)\,. \tag{1.7}$$

Если вместо (1.7) рассматривать задачу

$$J(v_k^\ell) = \min_{u^\ell \in \mathfrak{U}_\partial^\ell} J_k(u^\ell)\,, \qquad \alpha = 1\,,$$

то будем получать приближенное решение задачи жесткого управления.

2. Алгоритм численного решения задач

При изложении алгоритма будем для определенности рассматривать задачу оптимального управления, т.к. алгоритм решения задачи жесткого управления будет тем же, и отличаться только значением величины α.

Алгоритм нахождения приближенного решения задачи оптимального управления сводится к восьми этапам.

Этап 1. Вычисление $\det M$ и проверка на отличие его от нуля с заданной степенью точности ε_1. Если $|\det M| < \varepsilon_1$ необходимо произвести замену $y = e^{\lambda t}x$ и продолжить реализацию алгоритма.

Этап 2. Вычисление порядка полюса $p = n - q$, где $q = \deg\det(\mu L - M)$.

Этап 3. Определение значения K, начиная с которого можно вычислять приближенные решения: $K = \max\{k_1, k_2\}$, где значения k_1, k_2 определяются по формулам

$$k_1 = \frac{1}{d}\sum_{i=0}^{q}|d_i| + 1\,, \qquad k_2 = \frac{1}{dp^p}\sum_{i=0}^{q}|d_i|(p+1)^{n-1} + 1\,,$$

где $d = \max\left\{1,\ \sum\limits_{i=0}^{q}|d_i|\right\}$, а d_i – коэффициенты полинома $\det(\mu L - M)$ и d_q — его старший ненулевой коэффициент.

Этап 4. Задавая τ и количество узлов квадратурной формулы Гаусса осуществляется расчет весов w_j и узлов s_j.

Для $J_k(u^\ell)$ окончательно получим

$$\begin{aligned} J_k(u^\ell) = \frac{\tau}{2}\sum_{j=0}^{2\eta}\Bigg[&\alpha\|Cx_k(u^\ell,\tau_j) - Cx_0(\tau_j)\|^2 + \alpha\|Cx'_k(u^\ell,\tau_j) - Cx'_0(\tau_j)\|^2 + \\ &+(1-\alpha)\sum_{q=0}^{\theta}\left\langle N_q(u^\ell)^{(q)}(\tau_j), (u^\ell)^{(q)}(\tau_j)\right\rangle\Bigg]w_j\,, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $\tau_j = \dfrac{\tau}{2} + \dfrac{\tau}{2}s_j$.

Этап 5. Рассчитываются $a(\tau_j)$, и затем кэшируются.

Этап 6. При нулевых значениях c_{ij} из (1.5) вычисляются $x_k(0,t)$ и $J_k(0)$.

Этап 7. Решается задача (1.6), (1.7) относительно c_{ij} как задача выпуклого программирования, где ограничения обусловлены $\mathfrak{U}_\partial$.

В основе алгоритма лежит метод покоординатного спуска с памятью. Данный метод с одной стороны приводит к большому количеству итераций, с другой стороны позволяет эффективно проводить распараллеливание процессов.

При достижении установленной погрешности вычисления ε функционала качества (2.1), расчет прекращается. В результате получаем значения c^*_{ij}, которые позволяют определить

$$v^\ell(t) = \mathrm{col}\left(\sum_{j=0}^{\ell}c^*_{1j}t^j, \sum_{j=0}^{\ell}c^*_{2j}t^j, \dots \sum_{j=0}^{\ell}c^*_{nj}t^j\right).$$

Этап 8. Используя формулу (1.3), определяется $x_k^\ell = x_k(f + Bv_k^\ell, t)$.

Приведенный алгоритм реализован в программе на языке C++.

3. Сходимость приближенных решений задач

Учитывая общность постановок исследуемых задач, достаточно показать сходимость приближенных решений задачи оптимального управления для НСЛТ.

Лемма 1. *Пусть матрица M — (L,p)-регулярна, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ и $\det M \neq 0$, а множество $\mathfrak{U}_\partial \subset \mathfrak{U}$ — компактно и выпукло, тогда функционал (0.3) является сильно выпуклым на $\mathfrak{U}_\partial$, т.е. для любых u_1, $u_2 \in \mathfrak{U}_\partial$ существует $T > 0$, что для любого $\gamma \in [0,1]$ выполняется неравенство*

$$J(\gamma u_1 + (1-\gamma)u_2) \leq \gamma J(u_1) + (1-\gamma)J(u_2) - \gamma(1-\gamma)T\|u_1 - u_2\|^2 .$$

□ Доказательство леммы основывается на тождественных преобразованиях, непрерывности $J(u)$, выпуклости и компактности $\mathfrak{U}_\partial$ при оценке T. ■

Лемма 2. *Пусть матрица M — (L,p)-регулярна, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $\det M \neq 0$, функция $a \in C^{p+1}([0,T];\mathbb{R}_+))$ отделена от нуля. Тогда пара (x^ℓ, v^ℓ) минимизирует значение функционала (0.3) на компактном и выпуклом множестве $\mathfrak{U}_\partial \subset \mathfrak{U}$ п $(x^\ell, v^\ell) \to (x,v)$ при $\ell \to \infty$. При этом $J(v^\ell) \to J(v)$ и существует $T > 0$, для которого выполняется неравенство $T\|v^\ell - v\|^2 \leq J(v^\ell) - J(v)$.*

□ Сначала докажем утверждение теоремы для последовательности $\{v^\ell\}$.

Для этого возьмем последовательность $\{\mathfrak{U}^\ell\}_{\ell=1}^\infty$ конечномерных подпространств пространства $\mathfrak{U}$ такую, что $\mathfrak{U}^\ell \supset \mathfrak{U}^k$ при $\ell \leqslant k$, $\mathfrak{U}^\ell \cap \mathfrak{U}_\partial \neq \emptyset$ при всех $\ell \in \mathbb{N}$ и $\bigcup\limits_{\ell=1}^{\infty} \mathfrak{U}^\ell$ плотно в $\mathfrak{U}$. Например, все эти требования выполнены для вектор-функций из (1.5).

Из выпуклости и компактности множества $\mathfrak{U}_\partial$ следует существование последовательности $\{\mathfrak{U}_\partial^\ell\}$ конечномерных множеств, являющихся выпуклыми компактами $\mathfrak{U}_\partial^\ell \subset \mathfrak{U}$ и монотонно исчерпывающих $\mathfrak{U}_\partial$, т.е. $\overline{\mathfrak{U}_\partial^\ell} \subset \mathfrak{U}_\partial^{\ell+1}$ и $\overline{\bigcup\limits_{\ell=p+1}^{\infty} \mathfrak{U}_\partial^\ell} = \mathfrak{U}_\partial$. Следовательно, $J(v^{\ell+1}) \leq J(v^\ell)$, а значит, для последовательности $\{v^\ell\}$ существует предел $\lim\limits_{\ell\to\infty} J(v^\ell)$ равный $J(v)$ в силу непрерывности функционала (0.3).

Таким образом, показано, что последовательность $\{v^\ell\}$ является минимизирующей.

По теореме Мазура компактное и выпуклое множество является слабо компактным, т.е. $\mathfrak{U}_\partial$ – слабо компактно. Учитывая, что функционал (0.3) определен и ограничен на слабо компактном множестве, то по теореме Вейерштрасса минимизирующая последовательность $\{v^\ell\}$ слабо сходится к v.

Воспользуемся теоремой о сильно выпуклой и полунепрерывной снизу функции на выпуклом компактном множестве (или обобщением теоремы Вейерштрасса), в силу которой последовательность $\{v^\ell\}$ сходится при $\ell \to \infty$ к v по норме пространства $\mathfrak{U}$ так, что выполняется неравенство $T\|v^\ell - v\|^2 \leq J(v^\ell) - J(v)$.

Последовательность $\{x^\ell\} = \{x(v^\ell, t)\}$, определяемая (1.3) и (1.4), является минимизирующей и сходится к $x(v, t)$ по норме пространства $\mathfrak{X}$ при $\ell \to \infty$, в силу того, что зависимость $\{x(v^\ell, t)\}$, заданная формулой (1.3), является непрерывной по v^ℓ (подробнее см. в [17]). ■

Лемма 3. *Пусть матрица M — (L, p)-регулярна, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $\det M \neq 0$, функция $a \in C^{p+1}([0, T]; \mathbb{R}_+))$ отделена от нуля. Тогда пара (x_k^ℓ, v_k^ℓ) является минимизирующей значение функционала (1.6) на компактном и выпуклом множестве $\mathfrak{U}_\partial^\ell \subset \mathfrak{U}_\partial$ и пара $(x_k^\ell, v_k^\ell) \to (x^\ell, v^\ell)$ при $k \to \infty$ и фиксированном $\ell > p$ так, что $v_k^\ell \to v^\ell$ по норме $\mathfrak{U}^\ell$. Причем $J_k(v_k^\ell) \to J(v^\ell)$ и существует $T > 0$, для которого выполняется неравенство $T\|v_k^\ell - v^\ell\|^2 \leq J_k(v_k^\ell) - J(v^\ell)$.*

□ В силу того, что функционалы $J_k(u)$ и $J(u)$ являются непрерывными и ограниченными на $\mathfrak{U}_\partial^\ell$, справедливо неравенство

$$|\mathrm{inf} J_k(u) - \mathrm{inf} J(u)| \leq \mathrm{sup}|J_k(u) - J(u)|\,.$$

Следовательно, последовательность $\{v_k^\ell\}$ является минимизирующей при $k \to \infty$, сходится к v^ℓ так, что $J_k(v_k^\ell) \to J(v^\ell)$ при фиксированном $\ell > p$.

А так как по лемме 1 функционал $J_k(v)$ является сильно выпуклой и непрерывной функцией на выпуклом компактном множестве $\mathfrak{U}_\partial^\ell$, то по теореме о сильно выпуклой и полунепрерывной снизу функции на выпуклом замкнутом множестве последовательность $\{v_k^\ell\}$ сходится к v^ℓ по норме в $\mathfrak{U}$ и справедливо неравенство

$$T\|v_k^\ell - v^\ell\|^2 \leq J_k(v_k^\ell) - J(v^\ell)\,.$$

В силу непрерывной зависимости $x_k^\ell = x_k(f + Bv_k^\ell, t)$, задаваемой (1.4), последовательность $\{x_k^\ell\}$ является минимизирующей при $k \to \infty$ и сходится к x^ℓ при фиксированном $\ell > p$. ■

Теорема 4. *Пусть матрица M — (L, p)-регулярна, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $\det M \neq 0$, функция $a \in C^{p+1}([0, T]; \mathbb{R}_+))$ отделена от нуля. Пусть (x, v) — точное, а (x_k^ℓ, v_k^ℓ) — приближенное решение задачи оптимального управления (0.1), (0.3), (0.4), (0.7) на выпуклом компактном множестве $\mathfrak{U}_\partial \subset \mathfrak{U}$. Тогда для любых $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $f \in C^{p+1}([0, T]; \mathbb{R}^n)$ последовательность $\{v_k^\ell\}$ сходится к v по норме в $\mathfrak{U}$, а последовательность $\{x_k^\ell\}$ сходится к $x = x(v)$ по норме в $\mathfrak{X}$ при $k \to \infty$, $\ell \to \infty$ так, что $J_k(v_k^\ell) \to J(v)$, причем существует $T > 0$, для которого выполняется неравенство*

$$T\|v_k^\ell - v\|^2 \leq J_k(v_k^\ell) - J(v)\,.$$

□ Из двух предыдущих лемм и теоремы о повторных пределах существует

$$\lim_{\ell \to \infty} \lim_{k \to \infty} J_k(v_k^\ell) = J(v)\,,$$

причем $v_k^\ell \to v^\ell \to v$ и $x(v_k^\ell) \to x(v^\ell) \to x(v)\,.$

Неравенство справедливо, в силу

$$T\|v_k^\ell - v\|^2 = T\|v_k^\ell - v^\ell + v^\ell - v\|^2 \le T\|v_k^\ell - v^\ell\|^2 + T\|v^\ell - v\|^2 \le$$

$$\le J_k(v_k^\ell) - J(v^\ell) + J(v^\ell) - J(v) = J_k(v_k^\ell) - J(v)\,. \quad \blacksquare$$

Аналогично формулируется результат о сходимости приближенных решений задачи жесткого управления для НСЛТ.

Следствие 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 4. *Пусть* (x, v) — *точное, а* (x_k^ℓ, v_k^ℓ) — *приближенное решение задачи жесткого управления* (0.1), (0.3), (0.5), (0.7) *на выпуклом компактном множестве* $\mathfrak{U}_\partial \subset \mathfrak{U}$. *Тогда для любых* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *и* $f \in C^{p+1}([0,T];\mathbb{R}^n)$ *последовательность* $\{v_k^\ell\}$ *сходится к* v *по норме в* $\mathfrak{U}$, *а последовательность* $\{x_k^\ell\}$ *сходится к* $x = x(v)$ *по норме в* $\mathfrak{X}$ *при* $k \to \infty$, $\ell \to \infty$ *так, что* $J_k(v_k^\ell) \to J(v)$, *причем существует* $T > 0$, *для которого выполняется неравенство*

$$T\|v_k^\ell - v\|^2 \le J_k(v_k^\ell) - J(v)\,.$$

В заключение отметим, что представленный в данной статье алгоритм использован при проведении вычислительных экспериментов как на модельных, так и на реальных задачах. Полученные результаты могут быть использованы при построении и исследовании моделей леонтьевского типа для предприятия [15] и решении задач оптимального измерения [7].

Литература

1. Бояринцев Ю.Е. Алгебро-дифференциальные системы: методы решения и исследования / Ю.Е. Бояринцев, В.Ф. Чистяков – Новосибирск: Наука, 1998. – 224 с.
2. Булатов М.В. Об одном численном методе решения дифференциально-алгебраических уравнений / М.В. Булатов, В.Ф. Чистяков // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2002. – Т. 42. – 4. – С. 459–470.
3. Бурлачко И.В. Алгоритм решения задачи Коши для вырожденных линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами / И.В. Бурлачко, Г.А. Свиридюк // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2003. – Т. 43. – 11. – С. 1677–1683.
4. Свиридюк Г.А. Численное решение систем уравнений леонтьевского типа / Г.А. Свиридюк, С.В. Брычев // Известия вузов. Математика. – 2003. – 8. – С. 46–52.
5. Леонтьев В.В. Межотраслевая экономика / В.В. Леонтьев – М.: Экономика, 1997. – 315 с.
6. Свешников А.Г. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А.Г. Свешников, А.Б. Альшин, М.О. Корпусов, Ю.Д. Плетнер – М.: Физматлит, 2007. – 736 с.
7. Шестаков А.Л., Свиридюк Г.А. Новый подход к измерению динамически искаженных сигналов // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2010. – 16 (192). – С. 116–120.
8. Келлер А.В. Системы леонтьевского типа: классы задач с начальным условием Шоултера-Сидорова и численные решения / А.В. Келлер // Известия Иркутсткого государственного университета. Серия: Математика. – 2010. – 2. – С. 30–43.
9. Sviridyuk G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov – Utrecht, Boston: VSP, 2003. – 216 p.

10. Сукачева Т.Г. Нестационарная линеаризованная модель движения несжимаемой вызкоупругой жидкости высокого порядка / Т.Г. Сукачева // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2009. – 17 (150). – С. 86–93.
11. Замышляева А.А. Начально-конечная задача для уравнения Буссинеска-Лява / А.А. Замышляева, А.В. Юзеева // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2010. – 16 (192). – С. 23–31.
12. Свиридюк Г.А. Задача Шоуолтера – Сидорова как феномен уравнений соболевского типа / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Известия Иркутсткого государственного университета. Серия: Математика. – 2010. – Т. 3. – 1. – С. 104–125.
13. Свиридюк Г.А. Оптимальное управление линейными уравнениями типа Соболева с относительно p-секториальными операторами / Г.А. Свиридюк, А.А. Ефремов // Дифференциальные уравнения. – 1995. – Т. 31. – 11. – С. 1912–1919.
14. Манакова Н.А. Задачи оптимального управления для полулинейных уравнений соболевского типа / Н.А. Манакова. – Челябинск: Издат. центр ЮУрГУ, 2012. – 88 с.
15. Келлер А.В. Об алгоритме решения задач оптимального и жесткого управления / А.В.Келлер // Программные продукты и системы. – 2011. – 3. – С. 42.
16. Сагадеева М.А. Аппроксимации Хилле-Уиддера-Поста операторов вырожденных C_0-полугрупп / М.А. Сагадеева, А.Н. Шулепов // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2013. – Т. 6. – 2. – С. 133–137.
17. Сагадеева М.А. Оптимальное управление решениями нестационарных уравнений соболевского типа специального вида в относительно секториальном случае / М.А. Сагадеева, А.Д. Бадоян // Вестник МаГУ. Математика. – 2013. – 16 (192). – С. 135–139.

NUMERICAL SOLUTION OF OPTIMAL AND HARD CONTROL FOR NONSTATIONARY SYSTEM OF LEONTIEV's TYPE

A.V. Keller, M.A. Sagadeeva

"South Ural State University"(National Research University),
Chelyabinsk, Russia, e-mail: alevtinak@inbox.ru, sam79@74.ru

Abstract. The algorithm for numerical solution of optimal control and hard control for some nonstationary singular linear systems of ordinary differential equations (Leontiev's type nonstationary system) with the Showalter-Sidorov's initial condition is presented. The system nonstationarity is represented as the product of an system matrix and a scalar temporal function. It is shown some properties of the quality functional and also it is proved the norm convergence of approximate solutions of these problems.

Key words: optimal control, hard control, Leontiev's type system, nonstationary system of equations, Sobolev's type equations.