MSC 35L30

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С НЕКРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Ю.О. Яковлева

Самарский государственный технический университет,
ул. Молодогвардейская, 244, Самара, 443100, Россия, e-mail: julia.yakovleva@mail.ru

Аннотация. Для гиперболического дифференциального уравнения третьего порядка с некратными характеристиками рассмотрена задача Коши. Получено решение, являющееся аналогом формулы Даламбера. Исследуется задача Коши для системы гиперболических дифференциальных уравнений третьего порядка общего вида с некратными характеристиками. Решение указанной задачи построено в явном виде.

Ключевые слова: гиперболическое дифференциальное уравнение третьего порядка, некратные характеристики, задача Коши, формула Даламбера, система гиперболических дифференциальных уравнений третьего порядка общего вида.

Введение. Краевые задачи для гиперболических уравнений и систем гиперболических уравнений третьего порядка с некратными характеристиками в некоторых случаях удается решить без вспомогательных функций (функций Римана, Римана-Адамара). Н.И. Мусхелишвили в своей монографии [1] отметил, что общие решения, если их возможно найти, при целесообразном использовании оказываются часто чрезвычайно полезными, особенно в вопросах прикладного характера. Таким образом, если известно общее решение дифференциального уравнения или системы дифференциальных уравнений, то очень часто возможно получить решение поставленных краевых задач.

Теорема существования и единственности решения задачи Коши в вещественном пространстве для линейной системы гиперболических уравнений с аналитическими коэффициентами была впервые доказана в 1901 г. Хольмгреном [2]. Для линейной системы с произвольно гладкими, но неаналитическими коэффициентами и для системы гиперболических уравнений высшего порядка теорема существования и единственности решения задачи Коши была доказана Петровским И.Г. [3]. В настоящей статье приведено решение задачи Коши для гиперболического уравнения и системы гиперболических уравнений третьего порядка в явном виде и представлено в виде аналога формулы Даламбера, как это было сделано для волнового уравнения на плоскости.

1. Предварительные сведения. Известно [4], что для гиперболического уравнения второго порядка

$$a_0 u_{xx} + a_1 u_{xy} + a_2 u_{yy} = 0\,, \tag{1}$$

где a_0, a_1, $a_2 \neq 0$ — некоторые действительные постоянные, с характеристиками $y = \lambda_1 x$, $y = \lambda_2 x$ при $\lambda_1 + \lambda_2 = a_1/a_0$, $\lambda_1\lambda_2 = a_2/a_0$ решением задачи Коши, состоящей из уравнения (1) и условий

$$u\,(x,\,y)\,|_{y=0} = \alpha(x)\,, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{y=0} = \beta(x)\,, \tag{2}$$

где $n : x = 0$ – нормаль к прямой l, является функция:

$$\begin{gathered} u(x,y) = -\frac{\lambda_1^2}{\frac{a_2}{a_0}-\lambda_1^2}\left(\alpha(x-y/\lambda_1) + \frac{a_2}{a_0\lambda_1}\int\limits_0^{x-y/\lambda_1}\beta(t)dt\right) - \\ -\frac{\lambda_2^2}{\frac{a_2}{a_0}-\lambda_2^2}\left(\alpha(x-y/\lambda_2) + \frac{a_2}{a_0\lambda_2}\int\limits_0^{x-y/\lambda_2}\beta(t)dt\right). \end{gathered} \tag{3}$$

Пусть

$$F(x,y,\lambda_k) = \alpha(x-y/\lambda_k) + \frac{a_2}{a_0\lambda_k}\int\limits_0^{x-y/\lambda_k}\beta(t)dt\,, \quad k=1,2\,.$$

Тогда формула (3) представима в виде

$$u(x,y) = -\sum_{k=1}^{2}\frac{\lambda_k^2}{\frac{a_2}{a_0}-\lambda_k^2}F(x,y,\lambda_k)\,. \tag{4}$$

Полученную формулу (4) называют формулой Даламбера для уравнения второго порядка общего вида [4].

2. Задача Коши для гиперболического уравнения третьего порядка с некратными характеристиками. Рассмотрим гиперболическое дифференциальное уравнение третьего порядка в частных производных общего вида

$$a_0u_{xxx} + a_1u_{xxy} + a_2u_{xyy} + a_3u_{yyy} = 0\,, \tag{5}$$

где $a_0,\, a_1,\, a_2,\, a_3 \neq 0$ – некоторые действительные постоянные.

Уравнение

$$-a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 - a_2\lambda + a_3 = 0\,, \qquad \lambda \equiv \frac{dy}{dx} \tag{6}$$

является характеристическим для уравнения (5), а его интегралы – характеристиками.

Пусть характеристическое уравнение (6) имеет три различных корня $\lambda_1,\,\lambda_2,\,\lambda_3 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1,\,\lambda_2,\,\lambda_3 \neq 0$, тогда $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = \frac{a_1}{a_0}$, $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \frac{a_3}{a_0}$. Семейства линий

$$y - \lambda_1 x + C_1, \qquad y - \lambda_2 x + C_2, \qquad y - \lambda_3 x + C_3$$

являются характеристиками уравнения (5).

Как известно [5, 6], общее решение уравнение (5) из класса трижды непрерывно дифференцируемых функций $C^3(\mathbb{R}^2)$ представляется в виде суммы

$$u(x,y) = f(y-\lambda_1 x + C_1) + g(y-\lambda_2 x + C_2) + h(y-\lambda_3 x + C_3)\,.$$

Без ограничений общности можно считать, что общее решение уравнения (5) имеет вид:

$$u(x,y) = f(y-\lambda_1 x) + g(y-\lambda_2 x) + h(y-\lambda_3 x)\,. \tag{7}$$

Задача Коши. Найти решение $u\,(x,\,y)$ уравнения (5) в плоскости, удовлетворяющее условиям на нехарактеристической линии $l : y = 0$:

$$\begin{aligned} &u\,(x,\,y)\,|_{y=0} = \alpha(x)\,, \quad x\in\mathbb{R},\\ &\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{y=0} = \beta(x)\,, \quad x\in\mathbb{R},\\ &\left.\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\right|_{y=0} = \gamma(x)\,, \quad x\in\mathbb{R}, \end{aligned} \tag{8}$$

где $n : x = 0$ – нормаль к прямой l.

Ограничения на нехарактеристическую линию уравнения третьего порядка такие же, как и для уравнения второго порядка. Эта линия не может дважды пересекать любую характеристику из любого другого семейства [4, 7].

Определяя функции f, g, h таким образом, чтобы удовлетворялись начальные условия (8):

$$\begin{aligned} f(-\lambda_1 x) + g(-\lambda_2 x) + h(-\lambda_3 x) &= \alpha(x)\,,\\ f'(-\lambda_1 x) + g'(-\lambda_2 x) + h'(-\lambda_3 x) &= \beta(x)\,,\\ f''(-\lambda_1 x) + g''(-\lambda_2 x) + h''(-\lambda_3 x) &= \gamma(x)\,, \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 f''(-\lambda_1 x) + \lambda_2^2 g''(-\lambda_2 x) + \lambda_3^2 h''(-\lambda_3 x) &= \alpha''(x)\,,\\ -\lambda_1 f''(-\lambda_1 x) - \lambda_2 g''(-\lambda_2 x) - \lambda_3 h''(-\lambda_3 x) &= \beta'(x)\,,\\ f''(-\lambda_1 x) + g''(-\lambda_2 x) + h''(-\lambda_3 x) &= \gamma(x)\,. \end{aligned} \tag{9}$$

Из (9) следует, что

$$\begin{aligned} f''(-\lambda_1 x) &= \big[(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)\big]^{-1}\left(\alpha''(x) + (\lambda_2+\lambda_3)\beta'(x) + \lambda_2\lambda_3\gamma(x)\right),\\ g''(-\lambda_2 x) &= -\big[(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_3)\big]^{-1}\left(\alpha''(x) + (\lambda_1+\lambda_3)\beta'(x) + \lambda_1\lambda_3\gamma(x)\right),\\ h''(-\lambda_3 x) &= \big[(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)\big]^{-1}\left(\alpha''(x) + (\lambda_1+\lambda_2)\beta'(x) + \lambda_1\lambda_2\gamma(x)\right). \end{aligned} \tag{10}$$

После интегрирования равенств (10) получим:

$$f(y-\lambda_1 x) = f(0) - \lambda_1 f'(0)\left(x - \frac{1}{\lambda_1}y\right) +$$
$$+\frac{\lambda_1^2}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}\left(\alpha\left(x-\frac{1}{\lambda_1}y\right) - \alpha(0) - \alpha'(0)\left(x-\frac{1}{\lambda_1}y\right)\right) +$$
$$+\frac{\lambda_1^2}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}\left((\lambda_2+\lambda_3)\int\limits_0^{x-\frac{y}{\lambda_1}}\beta(t)dt - (\lambda_2+\lambda_3)\beta(0)\left(x-\frac{1}{\lambda_1}y\right)\right)+$$
$$+\frac{\lambda_1^2}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}\lambda_2\lambda_3\int\limits_0^{x-\frac{y}{\lambda_1}}\gamma(t)\left(x-\frac{1}{\lambda_1}y-t\right)dt\,,$$

$$g(y-\lambda_2 x) = g(0) - \lambda_2 g'(0)\left(x - \frac{1}{\lambda_2}y\right) -$$
$$-\frac{\lambda_2^2}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_3)}\left(\alpha\left(x-\frac{1}{\lambda_2}y\right) - \alpha(0) - \alpha'(0)\left(x-\frac{1}{\lambda_2}y\right)\right) -$$
$$-\frac{\lambda_2^2}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_3)}\left((\lambda_1+\lambda_3)\int\limits_0^{x-\frac{y}{\lambda_2}}\beta(t)dt - (\lambda_1+\lambda_3)\beta(0)\left(x-\frac{1}{\lambda_2}y\right)\right)-$$
$$-\frac{\lambda_2^2}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_3)}\lambda_1\lambda_3\int\limits_0^{x-\frac{y}{\lambda_2}}\gamma(t)\left(x-\frac{1}{\lambda_2}y-t\right)dt,$$

$$h(y-\lambda_3 x) = h(0) - \lambda_3 h'(0)\left(x - \frac{1}{\lambda_3}y\right) -$$
$$-\frac{\lambda_3^2}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)}\left(\alpha(0) + \alpha'(0)\left(x-\frac{1}{\lambda_3}y\right) - \alpha\left(x-\frac{1}{\lambda_3}y\right)\right) +$$
$$+\frac{\lambda_3^2}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)}\left((\lambda_1+\lambda_2)\int\limits_0^{x-\frac{y}{\lambda_3}}\beta(t)dt - (\lambda_1+\lambda_2)\beta(0)\left(x-\frac{1}{\lambda_3}y\right)\right)+$$
$$+\frac{\lambda_3^2}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)}\lambda_1\lambda_2\int\limits_0^{x-\frac{y}{\lambda_3}}\gamma(t)\left(x-\frac{1}{\lambda_3}y-t\right)dt\,. \qquad (11)$$

Подставляя в (7) найденные значения функций f, g, h (11), после некоторых преобразований, получим:

$$u(x,y) = \frac{\lambda_1^3}{\lambda_1^3 - \lambda_1^2(\frac{a_1}{a_0}-\lambda_1) + \frac{a_3}{a_0}}\left(\alpha(x-\frac{y}{\lambda_1}) + \frac{a_1-\lambda_1 a_0}{a_0}\int\limits_0^{x-\frac{y}{\lambda_1}}\beta(t)dt\right)+$$

$$+\frac{\lambda_1^3}{\lambda_1^3-\lambda_1^2(\frac{a_1}{a_0}-\lambda_1)+\frac{a_3}{a_0}}\left(\frac{a_3}{a_0\lambda_1}\int\limits_0^{x-\frac{y}{\lambda_1}}\gamma(t)\left(x-\frac{1}{\lambda_1}y-t\right)dt\right)+$$

$$+\frac{\lambda_2^3}{\lambda_2^3-\lambda_2^2(\frac{a_1}{a_0}-\lambda_2)+\frac{a_3}{a_0}}\left(\alpha(x-\frac{y}{\lambda_2})+\frac{a_1-\lambda_2 a_0}{a_0}\int\limits_0^{x-\frac{y}{\lambda_2}}\beta(t)dt\right)+$$

$$+\frac{\lambda_2^3}{\lambda_2^3-\lambda_2^2(\frac{a_1}{a_0}-\lambda_2)+\frac{a_3}{a_0}}\left(\frac{a_3}{a_0\lambda_2}\int\limits_0^{x-\frac{y}{\lambda_2}}\gamma(t)\left(x-\frac{1}{\lambda_2}y-t\right)dt\right)+$$

$$+\frac{\lambda_3^3}{\lambda_3^3-\lambda_3^2(\frac{a_1}{a_0}-\lambda_3)+\frac{a_3}{a_0}}\left(\alpha(x-\frac{y}{\lambda_3})+\frac{a_1-\lambda_3 a_0}{a_0}\int\limits_0^{x-\frac{y}{\lambda_3}}\beta(t)dt\right)+$$

$$+\frac{\lambda_3^3}{\lambda_3^3-\lambda_3^2(\frac{a_1}{a_0}-\lambda_3)+\frac{a_3}{a_0}}\left(\frac{a_3}{a_0\lambda_3}\int\limits_0^{x-\frac{y}{\lambda_3}}\gamma(t)\left(x-\frac{1}{\lambda_3}y-t\right)dt\right). \qquad (12)$$

Пусть

$$F(x,y,\lambda)=\alpha(x-\frac{y}{\lambda})+\frac{a_1-\lambda a_0}{a_0}\int\limits_0^{x-\frac{y}{\lambda}}\beta(t)dt+\frac{a_3}{a_0\lambda}\int\limits_0^{x-\frac{y}{\lambda}}\gamma(t)\left(x-\frac{1}{\lambda}y-t\right)dt,$$

тогда формула (12) представима в виде

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{3}\frac{\lambda_k^3}{\lambda_k^3-\lambda_k^2(\frac{a_1}{a_0}-\lambda_k)+\frac{a_3}{a_0}}F(x,y,\lambda_k) \qquad (13)$$

Полученная формула (13) аналогична формуле (4). Ее мы будем называть аналогом формулы Даламбера для гиперболического уравнения третьего порядка.

Непосредственной подстановкой можно проверить, что формула (13) удовлетворяет уравнению (5) и начально-краевым условиям (8).

3. Задача Коши для системы гиперболических уравнений третьего порядка общего вида. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка общего вида с двумя независимыми переменными $x, y \in \mathbb{R}$ на плоскости, не содержащую производные порядка меньше третьего

$$A^*U_{xxx}+B^*U_{xxy}+C^*U_{xyy}+D^*U_{yyy}=0, \qquad (14)$$

где $U(x,y)=(u^1(x,y),u^2(x,y))$ – искомая двухмерная вектор-функция и A^*, B^*, C^*, D^* — постоянные квадратные матрицы второго порядка.

Полагая, что D^* — невырожденная матрица, то система (14) редуцируется к следующему виду:

$$AU_{xxx} + BU_{xxy} + CU_{xyy} + U_{yyy} = 0. \tag{15}$$

Пусть матрицы A, B, C попарно коммутирующие [8,9], тогда, без ограничений общности, они имеют следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{22} + b_{12}\Big(\dfrac{a_{11}-a_{22}}{a_{12}}\Big) & b_{12} \\ b_{12}\dfrac{a_{21}}{a_{12}} & b_{22} \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21}\dfrac{a_{12}}{a_{21}} \\ c_{21} & c_{11} - c_{21}\left(\dfrac{a_{11}-a_{22}}{a_{21}}\right) \end{pmatrix}, \quad a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \in \mathbb{R},\ a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \neq 0\,, \quad i, j = 1,\ 2\,.$$

Пусть теперь a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 — различные собственные значения матриц A, B, C, соответственно. Тогда

$$b_i = b_{22} + \frac{b_{12}}{a_{12}}(a_i - a_{22}),$$
$$c_i = c_{11} + \frac{c_{21}}{a_{21}}(a_i - a_{11}).$$

Матрицы преобразования

$$T = \begin{pmatrix} \dfrac{b_1 b_{12}}{\delta_1}t_1 & t_2 \\ t_1 & \dfrac{a_{21}b_2b_{12}}{a_{12}\delta_2}t_2 \end{pmatrix},$$

$$T^{-1} = \frac{a_{12}\delta_1\delta_2}{(a_{21}b_1b_2b_{12}^2 - a_{12}\delta_1\delta_2)t_1t_2}\begin{pmatrix} \dfrac{a_{21}b_2b_{12}}{a_{12}\delta_2}t_2 & -t_2 \\ -t_1 & \dfrac{b_1b_{12}}{\delta_1}t_1 \end{pmatrix},$$

где

$$\det T \neq 0\,, \qquad t_1, t_2 \neq 0, \quad t_1,\ t_2 \in \mathbb{R}\,,$$

$$\delta_1 = \left(b_{22} + \frac{b_{12}}{a_{12}}(a_1 - a_{22})\right) b_{22} - d_B\,,$$

$$\delta_2 = \left(b_{22} + \frac{b_{12}}{a_{12}}(a_2 - a_{22})\right)\left(b_{22} + \frac{b_{12}}{a_{12}}(a_{11} - a_{22})\right) - d_B\,,$$

$$d_B = b_{22}^2 + b_{12}b_{22}\left(\frac{a_{11}-a_{22}}{a_{12}}\right) - b_{12}^2\frac{a_{21}}{a_{12}}\,,$$

одновременно приводят матрицы A, B, C к диагональной форме

$$T^{-1}AT = \Lambda_A\,, \quad T^{-1}BT = \Lambda_B\,, \quad T^{-1}CT = \Lambda_C\,.$$

$$\Lambda_A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}, \qquad \Lambda_B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}, \qquad \Lambda_C = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}.$$

Поскольку матрицы A, B, C коммутирующие, то тоже можно сказать и о матрицах Λ_A, Λ_B, Λ_C, полученных преобразованием подобия [10].

Задача Коши. Найти решение задачи Коши $U\,(x,\,y) \in C^3(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ системы уравнений (15), удовлетворяющее условиям на нехарактеристической линии $l: y = 0$:

$$\begin{gathered} \langle l_1, U\,(x,\,0)\rangle = \alpha^1(x), \qquad \langle l_2, U\,(x,\,0)\rangle = \alpha^2(x), \\ \left\langle l_1, \frac{\partial U}{\partial n}\,(x,0)\right\rangle = \beta^1(x), \qquad \left\langle l_2, \frac{\partial U}{\partial n}\,(x,0)\right\rangle = \beta^2(x), \\ \left\langle l_1, \frac{\partial^2 U}{\partial n^2}\,(x,0)\right\rangle = \gamma^1(x), \qquad \left\langle l_2, \frac{\partial^2 U}{\partial n^2}\,(x,0)\right\rangle = \gamma^2(x), \end{gathered} \tag{16}$$

где $n : x = 0$ — нормаль к прямой l, $\alpha^i(x)$, $\beta^i(y)$, $\gamma^i(x) \in C^3(\mathbb{R})$, $i = 1, 2$; $\langle a,b\rangle$ – скалярное произведение;

$$l_1 = \left(\frac{a_{21}b_2b_{12}\delta_1}{(a_{21}b_1b_2b_{12}^2 - a_{12}\delta_1\delta_2)t_1}, -\frac{a_{12}\delta_1\delta_2}{(a_{21}b_1b_2b_{12}^2 - a_{12}\delta_1\delta_2)t_1} \right),$$

$$l_2 = \left(-\frac{a_{12}\delta_1\delta_2}{(a_{21}b_1b_2b_{12}^2 - a_{12}\delta_1\delta_2)t_2}, \frac{a_{12}b_1b_{12}\delta_2}{(a_{21}b_1b_2b_{12}^2 - a_{12}\delta_1\delta_2)t_2} \right).$$

.

В системе (15) сделаем замену $U = TV$ и подействуем на нее T^{-1} слева. Следовательно, система (15) эквивалентна следующей:

$$\Lambda_A V_{xxx} + \Lambda_B V_{xxy} + \Lambda_C V_{xyy} + V_{yyy} = 0. \tag{17}$$

$$\begin{cases} a_1 v^1_{xxx} + b_1 v^1_{xxy} + c_1 v^1_{xyy} + v^1_{yyy} = 0, \\ a_2 v^2_{xxx} + b_2 v^2_{xxy} + c_2 v^2_{xyy} + v^2_{yyy} = 0. \end{cases}$$

Пусть каждое характеристическое уравнение этой системы (17) имеют три различных корня λ_1, λ_2, λ_3 и μ_1, μ_2, μ_3, соответственно. Если

$$F(x,y,s) = \alpha\left(x - \frac{y}{s}\right) + \frac{a_1 - sa_0}{a_0}\int\limits_0^{x-\frac{y}{s}} \beta(t)dt + \frac{a_3}{a_0 s}\int\limits_0^{x-\frac{y}{s}} \gamma(t)\left(x - \frac{y}{s} - t\right)dt,$$

то решением системы (17) является

$$
\begin{aligned}
v^1(x,y) &= \sum_{k=1}^{3} \frac{\lambda_k^3}{\lambda_k^3 - \lambda_k^2(\frac{b_1}{a_1} - \lambda_k) + \frac{1}{a_1}} F(x,y,\lambda_k),\\
v^2(x,y) &= \sum_{k=1}^{3} \frac{\mu_k^3}{\mu_k^3 - \mu_k^2(\frac{b_2}{a_2} - \mu_k) + \frac{1}{a_2}} F(x,y,\mu_k),
\end{aligned} \tag{18}
$$

Решение задачи Коши ищем в виде решения матричного уравнения $U = TV$. Непосредственной подстановкой, что вектор-функция $U(x,y) = (u^1(x,y), u^2(x,y))$, где

$$
\begin{aligned}
u^1(x,y) = \frac{b_1 b_{12}}{\delta_1} t_1 \sum_{k=1}^{3} \frac{\lambda_k^3}{\lambda_k^3 - \lambda_k^2(\frac{b_1}{a_1} - \lambda_k) + \frac{1}{a_1}} F(x,y,\lambda_k) +\\
+ t_2 \sum_{k=1}^{3} \frac{\mu_k^3}{\mu_k^3 - \mu_k^2(\frac{b_2}{a_2} - \mu_k) + \frac{1}{a_2}} F(x,y,\mu_k),\\
u^2(x,y) = t_1 \sum_{k=1}^{3} \frac{\lambda_k^3}{\lambda_k^3 - \lambda_k^2(\frac{b_1}{a_1} - \lambda_k) + \frac{1}{a_1}} F(x,y,\lambda_k) +\\
+ \frac{a_{21} b_2 b_{12}}{a_{12}\delta_2} t_2 \sum_{k=1}^{3} \frac{\mu_k^3}{\mu_k^3 - \mu_k^2(\frac{b_2}{a_2} - \mu_k) + \frac{1}{a_2}} F(x,y,\mu_k),
\end{aligned}
$$

удовлетворяет уравнению (15) и начально-краевым условиям (16), то есть она является решением задачи Коши (15), (16).

Заключение. Таким образом, нами получено решение, являющееся аналогом формулы Даламбера для гиперболического дифференциального уравнения третьего порядка с некратными характеристиками. Для системы гиперболических дифференциальных уравнений третьего порядка общего вида с некратными характеристиками в явном виде построено решение задачи Коши.

Литература

1. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / М.: Изд. АН СССР, 1954.
2. Holmgren E. Sur les systemes lineaires aux derivees partielles du premier order a charasteristiques reeldes et distinctes // Arkiv for Math., Astr. och Fysik. – 1909. – 6; №2. – С.1-10.
3. Петровский И.Г. Избранные труды. Системы уравнений с частными производными. Алгебраическая геометрия / М.: Наука, 1986. – 500 с.
4. Тихонов А.Н. Самарский А.А. Уравнения математической физики / М.: Наука, 1977. – 735 с.
5. Корзюк В.И., Чеб Е.С., Ле Тхи Тху Решение смешанной задачи для биволнового уравнения методом характеристик // Национальная академия наук Беларуси. Труды Института математики. – 2010. – 18, №2. – С.36-54.
6. Яковлева Ю.О. Аналог формулы Даламбера для гиперболического уравнения третьего порядка с некратными характеристиками // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия физ.-мат. науки. – 2012. – № 1(26). – С.247-250.
7. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики / М.: Наука, 1982. – 336 с.

8. Беллман Р. Введение в теорию матриц / М.: Наука, 1969. – 367 с.
9. Яковлева Ю.О. Характеристическая задача для системы гиперболических дифференциальных уравнений третьего порядка общего вида с некратными характеристиками // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия физ.-мат. науки. – 2013. – №1(30). – С.99-106.
10. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / М.: Наука, 1988. – 549 с.

THE CAUCHY PROBLEM FOR THE HYPERBOLIC DIFFERENTIONAL EQUATION AND SYSTEM OF GENERAL HYPERBOLIC DIFFERENTIONAL EQUATIONS OF THIRD ORDER WITH NONMULTIPLE CHARACTERISTICS

J.O. Yakovleva

Samara State Technical University,
Molodogvardeyskaya st., 244, Samara, 443100, Russia, e-mail: julia.yakovleva@mail.ru

Abstract. The Cauchy problem for third order hyperbolic differentional equation with nonmultiple characteristics is studied. The analogue of D'Alembert's formula is obtained. It is also investigated the Cauchy problem for system of general hyperbolic differentional equations of third order with the nonmultiple characteristics. Its solutions are constructed in the explicit form.

Key words: hyperbolic differentional equation of the third order, nonmultiple characteristics, Cauchy's problem, D'Alembert's formula, system of general hyperbolic differentional equation.