MSC 42C20

О j-РЯДАХ ШЛЕМИЛЬХА

Л.Н. Ляхов

Воронежский государственный университет
Университетская пл. 1, Воронеж, 394006, Россия, e-mail: levnlya@mail.ru

Аннотация. Классические ряды Шлемильха строятся на основе функций Бесселя и функций Струве с аргументами kx, $k = 0, 1, 2, \ldots$. В работе вводится модификация ряда Шлемильха, в которой используются либо четные функции Бесселя первого рода, нормированные соответствующим образом (называются j-функции Бесселя), с тем же аргументом kx либо нечетная производная от четной j-функции Бесселя (она выполняет роль функций Струве). Приводятся формулы вычисления коэффициентов такого ряда Шлемильха.

Ключевые слова: ряд Шлемильха, j-функция Бесселя, уравнение Шлемильха, интеграл Сонина.

Введение. Впервые представление функций рядами

$$f(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k J_\nu(kx),$$

где J_ν — функция Бесселя первого рода порядка ν, были исследованы Шлемильхом в 1857 году, рассмотревшего только частные случаи $\nu = 0$ и $\nu = 1$. В некоторых отношениях ряд Шлемильха ближе к тригонометрическим рядам Фурье, чем ряды Фурье-Бесселя или Дини и свойства рядов Шлемильха можно изучать с использованием свойств тригонометрических рядов, о чем можно судить по книгам [1], [2], [3], [4] и по работе [5].

В настоящее время рядами Шлемлиха называют ряды по функциям Бесселя с аргументом kx, $k = 0, 1, 2, \ldots$ (см. [3] и ссылки на литературу в этой книге). Классическим рядом Шлемильха называется ряд (см. [1], с. 682, обобщенный ряд Шлемильха)

$$\frac{a_0}{2\Gamma(\nu+1)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k J_\nu(kx) + b_k Y_\nu(kx)}{(kx/2)^\nu}\,, \qquad (1)$$

где J_ν — функция Бесселя первого рода порядка ν, Y_ν — функция Струве порядка ν. Ряд (1) состоит изчетных и нечетных слагаемых, поэтому и напоминают тригонометрические ряды Фурье. Давно отмечена невостребованность полных рядов Шлемильха при исследовании физических, поскольку «...функции Струве не принадлежат к типу функций, встречающихся в решениях уравнения Лапласа или волнового уравнения. Таким образом, по-видимому, существуют основания физического характера для ограничений, которые были наложены на $f(x)$, чтобы сделать возможным разложения Шлемильха». Это цитата из книги Г.Н. Ватсона [1] (с. 693). Мы в этой работе используем только функции Бесселя первого рода (чётные и нечетные — производные от чётных), поэтому конструкции предложенных здесь рядов Шлемильха лишены недостатка, отмеченного Г.Н. Ватсоном.

Следуя [6], в качестве четной и нечетной составляющих ряда Шлемильха будут использованы j-функция Бесселя и ее производная (как и в тригонометрических рядах)

$$\varphi_{ev}(x) = j_\nu(x) = 2^\nu \Gamma(\nu+1)\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\,, \qquad \varphi_{od}(x) = -j\,'_\nu(x) = \frac{x}{2(\nu+1)}\,j_{\nu+1}(x)\,.$$

Здесь четные j-функции Бесселя j_ν нормированы так, чтобы для всех $\nu > -1/2$ выполнено равенство $j_\nu(0) = 1$. Соответственно, $j\,'_\nu(0) = 0$.

Рассматриваемые ряды Шлемильха имеют вид

$$\frac{a_0}{2\Gamma(\nu+1)} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\ \varphi_{ev}(kx) + b_k\ \varphi_{od}(kx)) =$$

$$= \frac{a_0}{2\Gamma(\nu+1)} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\ j_\nu(kx) + b_k\ \frac{kx}{\gamma+1}\,j_{\nu+1}(kx)\right)\,. \tag{2}$$

Для произвольных $\nu \in [1/2, -1/2]$ вычисление коэффициентов этого ряда опираются на формулы обращения интегралов Абеля. D этой работе мы используем тот же подход для $\nu > 1/2$. Он приводит к интегралам Римана-Лиувилля дробного порядка, обращение которых достигается применением соответствующих производных дробного порядка $\frac{\gamma}{2} = \nu + \frac{1}{2}$. Далее, для удобства, используем одновременно два индекса ν и γ, которые связаны равенством

$$\nu = \frac{\gamma - 1}{2}\,.$$

Схемы получения формул для коэффициентов b_k в (2) опираются на соответствующие подходы и формулы, полученные для вычисления a_k, поэтому вначале рассмотрим, вообще говоря, известный ряд Шлемиха для четных функций.

2. Применение оператора Пуассона к конструированию четных j-рядов Шлемильха. Четные составляющие ряда (2), учитывая связь j-функций Бесселя с функциями Бесселя первого рода, легко преобразуются к ряду по четным j-функциям Бесселя

$$\frac{\alpha_0(\nu)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k(\nu)\ j_\nu(kx)\,, \tag{3}$$

с $a_k(\nu) = a_k/2^\nu\,\Gamma(\nu+1)$. Выражение (3) мы и будем называть четным j-рядом Шлемильха (при этом иногда будем писать a_k вместо $a_k(\nu)$).

Преобразование тригонометрического ряда в ряд (3) происходит в результате применения к нему оператора Пуассона порядка ν (см. далее), действие которого определено формулой

$$\Pi_t^\nu g(t,y) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int\limits_0^\pi g(t\cos\alpha,\,x)\ \sin^{\gamma-1}\alpha\,d\alpha\,, \qquad \nu = \frac{\gamma-1}{2}\,.$$

Исходя из формул для β-функций Эйлера нетрудно проверить, что

$$\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int\limits_0^\pi \sin^{\gamma-1}\alpha d\alpha = 1 \quad \Longrightarrow \quad \Pi^\nu C = C.$$

Интегральное представление Пуассона $j_\nu(t) = \Pi^\nu e^{-it}$ запишем в виде

$$j_\nu(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int\limits_0^\pi \cos(t\cos\alpha)\sin^{\gamma-1}\alpha\ d\alpha\,. \tag{4}$$

Из этого представления видим, что если некоторая четная функция $g(t)$ представлена cos-рядом

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^\infty a_k \cos kt\,,$$

допускающим почленное интегрирование, то функция

$$f(t) = \Pi_t^\gamma g(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int\limits_0^\pi g(t\cos\alpha)\ \sin^{\gamma-1}\alpha\ d\alpha$$

оказывается представленной рядом Шлемильха по (четным) j-функциям Бесселя:

$$f(t)=\Pi_t^\nu\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^\infty a_k\ \cos kt\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^\infty a_k\ j_\nu(kt),$$

Таким образом, представление четной функции f рядом Шлемильха можно получить из cos-ряда Фурье другой функции g, которая неизвестна, но может быть найдена по функции f, как решение интегрального уравнения

$$\Pi_t^\nu g(t) = f(t). \tag{5}$$

Для четной функции $g(t)$ уравнение (5) преобразуется в уравнение Шлемильха[3)]

$$\frac{2}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int\limits_0^{\pi/2} g(x\sin\alpha)\cos^{\gamma-1}\alpha\, d\alpha = f(t)\,,$$

поскольку действие оператора Пуассона на четную интегрируемую функцию легко сводится к интегрированию по отрезку $[0,\pi/2]$:

$$\Pi_t^\nu g(x) = \frac{2\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int\limits_0^{\pi/2} g(x\sin\alpha)\cos^{\gamma-1}\alpha\, d\alpha\,, \quad \nu=\frac{\gamma-1}{2}\,. \tag{6}$$

[3]Исследование уравнения Шлемильха, для параметра $\nu\in(-1/2,1/2)$ можно найти, например, в книге [1] на с. 691.

Замечание 1. Интересно отметить, что результатом применения оператора Пуассона к произвольной (в смысле четности) функции — четная функция. Для представления этого оператора в виде (6) необходимо, чтобы функция g была четной.

Из (6), в частности, следует, что представление j-функции Бесселя интегралом Пуассона (4) можно записать в виде

$$j_\nu(t)=\frac{2\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int\limits_0^{\pi/2}\cos(t\sin\alpha)\cos^{\gamma-1}\alpha\,d\alpha\,,\qquad \nu=\frac{\gamma-1}{2}\,. \tag{7}$$

Таким образом, для четной функции $g(t)$ уравнение (5) приводится к уравнению

$$\frac{2\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int\limits_0^{\pi/2}g(t\sin\alpha)\cos^{\gamma-1}\alpha d\alpha=f(t). \tag{8}$$

которое отличается от уравнения Шлемильха лишь коэффициентом.

Как видим, формально, ряд Шлемильха для четной функции f строится применением оператора Пуассона к cos-ряду Фурье для функции, представляющей собой решения уравнения Шлемильха (8) с функцией f в правой части. По сути этот подход реализован в классических исследованиях ряда Шлемильха, которые содержат книги [1], [2], [3], но лишь в случае $0<\gamma<2$. В [4] и [3] для этой цели используется подход, основанный на интегралах Сонина (первом интеграле Сонина, для $\gamma<2$ и втором интеграле Сонина для произвольных $\gamma>0$).

В терминах четных j-функций Бесселя j_{ev} и при $\nu\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ полученные в этой работе результаты легко вытекают из известных путем соответствующей правкой коэффициентов (так же как в (3). Далее формулы для коэффициентов будут получены в общем случае $\nu{>}{-}1/2$ и приведены условия на функции, необходимые для ее представления j-рядами Шлемильха.

Четные j-ряды Шлемильха при $\nu\in\left(-\frac{1}{2}<\frac{1}{2}\right)$ $(\Longrightarrow\quad\gamma\in(0,2))$. В этом случае (т.е. $\gamma\in(0,2)$) уравнение Шлемильха

$$f(t)=\frac{2}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int\limits_0^{\pi/2}g(x\sin\alpha)\cos^{\gamma-1}\alpha d\alpha$$

имеет следующее решение (см. [1], с. 691)

$$g(x)=\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)f(0)+$$

$$+\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)}\int\limits_0^{\pi/2}\sec^\gamma\alpha\frac{d}{d\alpha}\left[\sin^{\gamma-1}\alpha(f(x\sin\alpha)-f(0))\right]d\alpha\,. \tag{9}$$

Уравнение же (8) есть уравнение Шлемильха для функции

$$f_1(t) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)} f(t)\,.$$

Но тогда его решение получится из решения (9) делением на коэффициент $\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)$:

$$g(t) = f(0) + \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)} \int\limits_0^{\pi/2} \sec^\gamma \alpha \frac{d}{d\alpha}\left[\sin^{\gamma-1}\alpha(f(x\sin\alpha) - f(0))\right] d\alpha\,.$$

Точно также, по известным коэффициентам a_k разложения (1) (см. [1]. с. 690) находятся коэффициенты $a_k(\nu)$ в разложении:

$$a_k(\nu) = \frac{2\,\pi^{-1/2}}{\Gamma\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)} \times$$

$$\times \int\limits_0^{\pi} \cos kx\,dx \int\limits_0^{\pi/2} \sec^\gamma \alpha \frac{d}{d\alpha}\left[\sin^{\gamma-1}\alpha(f(x\sin\alpha) - f(0))\right] d\alpha\,.$$

Замечание 2. Условия, при которых функция f представляется рядом Шлемильха по четным j-функциям Бесселя содержатся в [1] в теореме п. 19.3, называемой теоремой Нильсена [4)].

Далее получено общее утверждение, которое опирается на формулу обращения интегралов дробного порядка $\gamma/2$. Полученные формулы оказались общими и более короткими.

3. Решение уравнения Шлемильха при $\nu = \frac{\gamma-1}{2} > -\frac{1}{2}$. Обычный подход к решению уравнения Шлемильха состоит в следующем. Неизвестная функция g в уравнении

$$f(x) = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\pi/2} g(x\sin\alpha)\cos^{\gamma-1}\alpha\,d\alpha$$

ищется в виде функции $x\,u(x^2)$. Отметим, что в нашем случае функции f и g четные, но такая замена имеет смысл не только в области $x > 0$. Обращаем внимание на замечание 1 — результат применения оператора Пуассона — четная функция. Далее (не доверяя этому замечанию) мы проверим, что полученное решение $g(x)$ — четная функция. Имеем

$$f(x) = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\pi/2} x\sin\alpha\cdot u(x^2\sin^2\alpha)\cos^{\gamma-2}\alpha\;d(\sin\alpha) =$$

[4]Эта теорема сформулирована Н. Нильлсоном в 1904г., но формулы коэффицентов ряда Шлемильха, которыми мы здесь воспользовались, получены Г.Н. Ватсоном.

$$= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\pi/2} x^{-1} u(x^2 \sin^2\alpha) \cos^{\gamma-2}\alpha \; d(x^2 \sin^2\alpha).$$

Замена переменной $x^2 \sin^2\alpha = t$ приводит к уравнению

$$\sqrt{\pi} x^{\gamma-1} f(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \int\limits_0^{x^2} \frac{u(t)\,dt}{(x^2-t)^{1-\gamma/2}} \,.$$

Если положить здесь $y = x^2$ (при этом $x = \sqrt{y}$, $x^{\gamma-1} = y^{\frac{\gamma-1}{2}}$), то получим уравнение

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \int\limits_0^{y} \frac{u(t)\,dt}{(y-t)^{1-\gamma/2}} = f_1(y)\,, \qquad f_1(y) = \sqrt{\pi} y^{\frac{\gamma-1}{2}} f(\sqrt{y})\,, \tag{10}$$

левая часть которого представляет собой левосторонний интеграл Римана-Лиувилля I^α дробного порядка $\alpha = \frac{\gamma}{2} > 0$ (см. [7], с. 42, формула (2.17)) Но тогда его решение (формально) находится применением к правой части левосторонней производной Римана-Лиувилля D^α дробного порядка α ([7], с. 44, формула (2.30))

$$u(y) = \mathcal{D}^\alpha f_1(y) = \left(\frac{d}{dy}\right)^{[\alpha]+1} I^{1-\{\alpha\}} f_1(y)\,,$$

где $[\alpha]$ и $\{\alpha\}$ — соответственно, целая и дробная часть числа α,

$$I^\alpha u(y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^{y} \frac{u(t)\,dt}{(y-t)^{1-\alpha}} \,.$$

Следовательно (формально)

$$u(y) = \frac{1}{\Gamma\left(1-\left\{\frac{\gamma}{2}\right\}\right)} \left(\frac{d}{dy}\right)^{\left[\frac{\gamma}{2}\right]+1} \int\limits_0^{y} \frac{f_1(t)\,dt}{(y-t)^{\left\{\frac{\gamma}{2}\right\}}} \,.$$

Положим здесь $y = x^2$, $(x > 0)$ и вернемся к функциям f и g, согласно введенных обозначений

$$f_1(t) = \sqrt{\pi} t^{\frac{\gamma-1}{2}} f(\sqrt{t})\,, \qquad u(y) = u(x^2) = \frac{g(x)}{x} \,.$$

Тогда

$$\frac{g(x)}{x} = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(1-\left\{\frac{\gamma}{2}\right\}\right)} \left(\frac{d}{xdx}\right)^{\left[\frac{\gamma}{2}\right]+1} \int\limits_0^{x^2} \frac{f(\sqrt{t})\; t^{\frac{\gamma-1}{2}}\; dt}{(x^2-t)^{\left\{\frac{\gamma}{2}\right\}}} \,.$$

И, наконец, в полученной формуле естественно заменить переменную интегрирования t на t^2. Получим следующую формулу для решения уравнения Шлемильха

$$g(x) = \frac{2\sqrt{\pi}\cdot x}{\Gamma\left(1-\left\{\frac{\gamma}{2}\right\}\right)} \left(\frac{d}{xdx}\right)^{\left[\frac{\gamma}{2}\right]+1} \int\limits_0^{x} \frac{f(t)\; t^{\gamma}\, dt}{(x^2-t^2)^{\left\{\frac{\gamma}{2}\right\}}} \,. \tag{11}$$

Исследование четности функции $g(x)$. Сначала заметим, что сингулярный дифференциальный оператор d/xdx имеет четный порядок, поэтому не меняет четности функций. Правую часть равенства (11) запишем в виде

$$\frac{2\sqrt{\pi}\,|x|}{\Gamma\left(1-\left\{\frac{\gamma}{2}\right\}\right)}\left(\frac{d}{xdx}\right)^{\left[\frac{\gamma}{2}\right]+1}(\operatorname{sign}x)\int\limits_0^x\frac{f(t)\,t^\gamma\,dt}{(x^2-t^2)^{\left\{\frac{\gamma}{2}\right\}}}.$$

Легко проверить, что если $f(x)$ четная функция, то и

$$(\operatorname{sign}x)\int\limits_0^x\frac{f(t)\,t^\gamma\,dt}{(x^2-t^2)^{\left\{\frac{\gamma}{2}\right\}}}$$

— четная функция. По условию f — четная, следовательно и g — четная функция.

Формула (11) получена нами формально. Точные условия возможности обращения дробного интеграла (левостороннего) Римана-Лиувилля содержит Теорема 2.2 гл. 1 (с. 46) монографии [7]. Нам остается ей воспользоваться.

Обозначим через $AC(a,b)$ множество абсолютно непрерывных на $[a,b]$ функций, а также посредством $AC^m(a,b)$ — множество непрерывных на $[a,b]$ вместе с $m-1$ производной функций f с абсолютно непрерывной $(m-1)$-ой производной: $f^{(m-1)}(x)\in AC(a,b)$.

Теорема 1. *Пусть $\nu>-1/2$, Π^ν — оператор Пуассона и $f=f(x)$ четная функция такая, что $f(\sqrt{x})\in AC^{[\gamma/2]}(0,b)$, $0<b\le\infty$. Тогда в классе четных функций решение уравнения*

$$f(t)=\Pi_t^\nu g(t)=\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int\limits_0^\pi g(t\cos\alpha)\ \sin^{\gamma-1}\alpha\ d\alpha \tag{12}$$

находиться по формуле

$$g(x)=\frac{2\sqrt{\pi}\cdot x}{\Gamma\left(1-\left\{\frac{\gamma}{2}\right\}\right)}\left(\frac{d}{xdx}\right)^{\left[\frac{\gamma}{2}\right]+1}\int\limits_0^x\frac{f(t)\,t^\gamma\,dt}{(x^2-t^2)^{\left\{\frac{\gamma}{2}\right\}}}. \tag{13}$$

□ Отметим, что функция f определенная через функцию g по формуле (12), всегда (независимо от g)четная. Поскольку решение ищется в классе четных функций $g(x)$, то правая часть уравнения преобразуется согласно (7), и уравнение (12) принимает вид уравнения Шлемильха. Последнее преобразуется в уравнение (10) с функцией $f_1(y)=\sqrt{\pi}y^{\frac{\gamma-1}{2}}f(\sqrt{y})$ в правой части. По условию теоремы $f(\sqrt{y})\in AC^{[\gamma/2]}(0,b)$, но тогда и $f_1(y)\in AC^{[\gamma/2]}(0,b)$. Следовательно законна операция применения к этой функции производной Римана-Лиувиилля дробного порядка $\{\gamma/2\}$. Это приведет нас к формуле (12). ■

4. Четные j-ряды Шлемильха при $\nu=\frac{\gamma-1}{2}>-\frac{1}{2}$. Из теоремы 1 вытекает теорема разложения в четный j-ряд Щлемильха.

Теорема 2. *Пусть четная функция* $f \in AC^{[\gamma/2]+1}(0,b)$, $0<b\leq\infty$ *представлена равномерно сходящимся рядом Шлемильха*

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\ j_{\frac{\gamma-1}{2}}(kt)\,. \tag{14}$$

Тогда коэффициенты ряда находятся по формулам

$$a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}g(t)\ \cos(kt)\ dt=$$

$$=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(1-\left\{\frac{\gamma}{2}\right\}\right)}\int_0^{\pi}\left[\left(\frac{d}{xdx}\right)^{\left[\frac{\gamma}{2}\right]+1}\int\limits_0^x\frac{f(t)\ t^{\gamma}}{(x^2-t^2)^{\left\{\frac{\gamma}{2}\right\}}}\ dt\right]\ x\ \cos(kx)\ dx\,.$$

Замечание 3. Существуют, так называемые, «нуль ряды Шлемильха» — ряды с ненулевыми членами, но сходящиеся к нулю. Поэтому представление (14) не единственно.

Замечание 4. Для сходимости рядов Фурье обычно достаточно некоторой гладкости функции. Требование равномерной сходимости ряда (14), в этой теореме вызвано необходимостью почленного интегрирования и дифференцирования рассмотренных рядов и, по-видимому, излишне, как оно было бы излишне для рядов Фурье. Более того, для классических рядов Шлемильха установлены теоремы аналогичные теоремам Римана-Лебега, Парсеваля и Рисса-Фишера для рядов Фурье (см. [4], с. 81). Но полное исследование j-рядов Шлемильха не является основной задачей этих исследований. Здесь лишь приведены формулы для коэффициентов ряда Шлемильха по j-функциям Бесселя.

5. Нечетные j-ряды Шлемильха при $\nu=\frac{\gamma-1}{2}>-\frac{1}{2}$**.** Пусть теперь f – нечетная функция, и она представлена сходящимся нечетным j-рядом Шлемильха

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\ j_{\nu,od}(kx)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\ \frac{kx}{2(\nu+1)}j_{\nu+1}(kx)\,.$$

Тогда равенство

$$\frac{2(\nu+1)}{x}\ f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\,k\ j_{\nu+1}(kx)\,, \tag{15}$$

представляет собой ряд Щлемильха для четной функции

$$f_1(x)=\frac{2(\nu+1)}{x}\ f(x)\,.$$

Предполагаем, что для функции $f_1(x)=\frac{2(\nu+1)}{x}\ f(x)$ выполнены условия теоремы 2. По этой функции уравнение Шлемильха (для четной функции), отвечающее порядку оператора Пуассона $\nu+1$ имеет вид

$$f(t)_1=\Pi_t^{\nu+1}g(t)=\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int\limits_0^{\pi}g(t\cos\alpha)\ \sin^{\gamma+1}\alpha\ d\alpha\,.$$

Его решение находится по формуле (13), в которой надо заменить порядок ν оператора Пуассона на порядок $\nu+1$ (соответственно γ на $\gamma+2$), а функцию f на функцию (четную) $f_1(x)=\frac{2(\nu+1)}{x}\,f(x)$. В результате придем к следующему решению этого уравнения

$$g(x)=\frac{2\sqrt{\pi}\,(\gamma+1)}{\Gamma\left(1-\left\{\frac{\gamma}{2}\right\}\right)}\;x\left(\frac{d}{xdx}\right)^{\left[\frac{\gamma}{2}\right]+2}\int\limits_0^x\frac{f(t)\;t^{\gamma+1}\,dt}{(x^2-t^2)^{\left\{\frac{\gamma}{2}\right\}}}\,.$$

Разумеется, здесь $f(t)t^{\gamma+1}=f(t)\,t\,(t^2)^{\frac{\gamma}{2}}$ — четная функция, следовательно (см. выше в п.3), и $g(x)$ — четная функция. Коэффициенты разложения (15), согласно теореме 2, найдем по формуле

$$b_k\,k=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(x)\,\cos(kx)\;dx=$$

$$=\frac{4(\gamma+1)(\pi)^{-1/2}}{\Gamma\left(1-\left\{\frac{\gamma}{2}\right\}\right)}\int\limits_0^\pi\left[\left(\frac{d}{xdx}\right)^{\left[\frac{\gamma}{2}\right]+2}\int\limits_0^x\frac{f(t)\;t^{\gamma+1}\,dt}{(x^2-t^2)^{\left\{\frac{\gamma}{2}\right\}}}\right]\,x\,\cos(kx)\;dx\,.$$

Таким образом справедлив следующий результат.

Теорема 3. *Пусть нечетная функция f такова, что $f(x)/x\in AC^{[\gamma/2]+2}(0,b)$, $0<b\leq\infty$ и представлена равномерно сходящимся нечетным j-рядом Шлемильха*

$$f(t)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\;\varphi_{\nu,od}(kt)\,.$$

Тогда коэффициенты ряда находятся по формулам

$$k\,b_k=\frac{4(\gamma+1)(\pi)^{-1/2}}{\Gamma\left(1-\left\{\frac{\gamma}{2}\right\}\right)}\int\limits_0^\pi\left[\left(\frac{d}{xdx}\right)^{\left[\frac{\gamma}{2}\right]+2}\int\limits_0^x\frac{f(t)\;t^{\gamma+1}\,dt}{(x^2-t^2)^{\left\{\frac{\gamma}{2}\right\}}}\right]\,x\,\cos(kx)\;dx\,.$$

Интегралы Сонина часто применяются при конструировании рядов Шлемильха, о чем можно судить по книгам [3], [4]. Мы приведем пример построения таких рядов Шлемильха по j-функциям Бесселя на основе первого интеграла Сонина. Этим интегралом называется следующее выражение (см. [4], с. 80, формула (39)):

$$\int_0^{\pi/2}J_\nu(z\,\sin\Theta)\;(\sin\Theta)^\nu\;(\cos\Theta)^{-2\nu}\;d\Theta=$$

$$=\frac{1}{2^\nu\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\,z^{\nu-1}\;\sin z\,,\quad -1<\operatorname{Re}\nu<\frac{1}{2}.$$

В терминах j-функций Бесселя интеграл Сонина примет вид:

$$\int_0^{\pi/2}j_\nu(z\,\sin\Theta)\;(\sin\Theta)^\gamma\;(\cos\Theta)^{\gamma-1}\;d\Theta=\frac{\Gamma(\nu+1)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}{\sqrt{\pi}}\;\frac{\sin z}{z}\,,$$

$$-1 < \operatorname{Re}\nu < \frac{1}{2}, \quad \nu = \frac{\gamma - 1}{2}.$$

Предположим, что нечетная функция f представлена (неполным) рядом Шлемильха, допускающим почленное интегрирование

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m\, \varphi_{od,\nu}(mx) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m\, \frac{mx}{\gamma+1}\, j_{\nu+1}(mx).$$

Удобно ввести обозначение $p = \nu + 1$, тогда

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m\, \frac{mx}{2p}\, j_p(mx). \tag{16}$$

Здесь x заменим на $x\ \sin\Theta$, умножим обе части на $(\sin\Theta\ \cos\Theta)^{\gamma-1}$ и проинтегрируем по Θ от 0 до $\pi/2$. При этом выражение (16) примет вид

$$\int_0^{\pi/2} f(x\ \sin\Theta)(\sin\Theta)^{\gamma-1}\,(\cos\Theta)^{\gamma-1}\,d\Theta =$$

$$= \frac{1}{2\nu}\sum_{m=1}^{\infty} mx\, b_m \int_0^{\pi/2} j_\nu(mx\ \sin\Theta)(\sin\Theta)^{\gamma}\,(\cos\Theta)^{\gamma-1}\,d\Theta.$$

Правая часть последнего равенства представляется в виде:

$$\int_0^{\pi/2} f(x\ \sin\Theta)(\sin\Theta)^{2\nu}\,(\cos\Theta)^{2\nu}\,d\Theta = \frac{\Gamma(\nu)\Gamma\left(\frac{3}{2}-\nu\right)}{2\,\nu\,\sqrt{\pi}}\sum_{m=1}^{\infty} b_m\,\sin mx.$$

Как видим, правая часть этого равенства есть тригонометрический ряд. Поэтому он является рядом Фурье для его левой части. Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 4. *Если нечетная функция f представлена равномерно сходящимся на отрезке $[0,\pi]$ рядом (неполным) Шлемильха*

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m\, \varphi_{od,\nu}(mx)$$

по нечетным j-функциям Бесселя $\frac{mx}{2\nu}\,j_\nu(mx)$, $\nu\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, то его коэффициенты определяются по формуле

$$b_m = \frac{2\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu)\Gamma\left(\frac{3}{2}-\nu\right)}\times$$

$$\times\int_0^{\pi}\int_0^{\pi/2} f(x\ \sin\Theta)(\sin\Theta)^{2\nu}\,(\cos\Theta)^{2\nu}\,d\Theta\,\sin mx\,dx. \tag{16}$$

О существовании нуль-ряда. Как известно (см. [1], [3], [4], классические обобщенные ряды Шлемильха могут представлять так называемые « нуль-ряды», т.е. существуют сходящиеся обобщенные ряды Шлемильха с ненулевыми коэффициентами, сумма которых почти всюду равна нулю. Покажем, что аналогичное свойство имеется и у рядов Шлемильха по j-функциям Бесселя.

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{\alpha x}{2\nu}\, j_\nu(\alpha x), \quad \nu = p+1.$$

Определим ее j-ряд Шлемильха. По формуле (16) имеем

$$b_m = \frac{2\,\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu)\;\Gamma\left(\frac{3}{2}-\nu\right)} \int\limits_0^\pi \sin(mx) \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\alpha x\,\sin\Theta}{2\nu}\; j_\nu(\alpha x\,\sin\Theta)\,(\sin\Theta)^{2\nu}\;(\cos\Theta)^{2\nu}\,d\Theta\,dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu)\,\Gamma\left(\frac{3}{2}-\nu\right)} \int\limits_0^\pi \alpha x \sin(mx) \int\limits_0^{\pi/2} j_\nu(\alpha x\,\sin\Theta)\,(\sin\Theta)^{2\nu+1}\;(\cos\Theta)^{2\nu}\,d\Theta\,dx\,.$$

Отсюда

$$b_m = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\pi \sin\,mx\;\;\sin\,\alpha x\,dx = (-1)^{m+1}\frac{m}{\sqrt{\pi}\,(m^2-\alpha^2)}\;\sin\,\alpha\pi\,.$$

Таким образом, получено следующее представление функции $f(x)$:

$$f(x) = \frac{\sin\,\alpha\pi}{\sqrt{\pi}}\;\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}m}{m^2-\alpha^2}\;\varphi_{od,p}(mx)\,.$$

Разделив полученное равенство на $\sin\,\alpha\pi$ и перейдя к пределу при $\alpha\to 0$ с учетом, что $j_\nu(0)=1$, получим

$$\frac{x}{2\nu\,\pi} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\;\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m}\;\varphi_{od,p}(mx) = 0\,.$$

Этот ряд представляет собой нуль-ряд из нечетных функций. Из него легко вытекает форма нуль-ряда из четных функций:

$$\frac{1}{2\nu\,\pi} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\;\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m}\;\frac{\varphi_{od,p}(mx)}{x} = 0\,.$$

При этом $\varphi_{od,p}(mx)/x$ — ограниченная функция.

Литература

1. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций / пер. со 2-го англ. изд. / М.: ИЛ, 1947. – 780 с.
2. Грей А., Метьюз Г. Функции Бесселя и их приложение к физике и механике / М.: ИЛ, 1953.
3. Коренев Б.Г. Введение в теорию Бесселевых функций / М.: Наука, 1971. – 298 с.
4. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т.2 / М.: Наука, 1973. – 294 с.

5. Ляхов Л.Н., Санина Е.Л. Многочлены Шлемильха, интерполяционная формула Рисса для B-производной и неравенство Берштейна для B-производной Вейля-Маршо // Доклады РАН. – 2007. – 417,№5. – С.592-596.
6. Киприянов И.А. Об одном классе одномерных сингулярных псевдодифференциальных операторов // Мат. сборник. – 1977. – 104,№1. – С.49-68.
7. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев И.О. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

ABOUT SCHLOMILCH'S j-SERIES

L.N. Lyakhov

Voronezh State University
Universitetskaya Sq., 1, Voronezh, 394006, Russia, e-mail: levnlya@mail.ru

Abstract. Classical Schlomilch's series are constructed on basis of the sum of Bessel's and Struve's functions with arguments kx, $k = 0, 1, 2, \ldots$. The modification of Schlomilch's series is introduced. In frames of this modification, even Bessel's functions of first kind which are normed by the way (they are called Bessel's j-function) with the same argument kx or the odd derivative of even Bessel's j-function (it plays the role of Struve functions) are used. Formulas for calculation of coefficients of such Schlomilch's series are given.

Key words: Schlomilch's series, Bessel's j-function, Schlomilch's equation, Sonin's integral.