MSC 11D45

О СУММЕ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ ДЕЛИТЕЛЕЙ ПО ЧИСЛАМ, ЛЕЖАЩИМ В АРИФМЕТИЧЕСКИХ ПРОГРЕССИЯХ С РАЗНОСТЬЮ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

М.С. Герман-Евтушенко

«ОООЯндекс»,
пр. Ленина, 66, Балашиха, Моск. обл., Россия

Аннотация. Решается задача получения асимптотической формулы для суммы значений функции $\tau_k(n)$ по числам, лежащим в арифметической прогрессии с разностью, являющейся истинно составным числом.

Ключевые слова: функция делителей, истинно составные числа, оценка сумм характеров.

1. Введение. Пусть $x > 1$ – произвольное вещественное число и $D = p_1 p_2 \dots p_r$, где $p_1, \dots, p_r$ – простые числа такие, что $p_j \le x^{\frac{1}{9}}$, $j = 1, 2, \dots, r$, причем $x^r \le D^3$. Эти числа называются «истинно составными» (truly composite) [1].

Рассмотрим задачу получения асимптотической формулы для суммы

$$S = \sum_{\substack{n \equiv l \bmod D\,, \\ n \le x}} \tau_k(n)\,,$$

где $\tau_k(n)$ обозначает число решений в натуральных числах уравнения $x_1 \dots x_k = n$, D — истинно составное число, $D \le x^{\frac{1}{3}-\varepsilon}$, ε — вещественное число, $0 < \varepsilon < 1/3$.

С ростом параметров k и D задача получения асимптотики для S усложняется, так как при этом поведение $\tau_k(n)$ становится более сложным, а прогрессия — более редкой. Если D — произвольное натуральное число, то асимптотическая формула для S получена лишь в случае, когда D растет с ростом x не более, чем логарифмически [2]. В 1979 году М.М. Петечук [3] получил асимптотическую формулу для S при фиксированном $k \ge 2$ и $D = p_0^m \le x^{\frac{3}{8}-\varepsilon}$, где p_0 — фиксированное нечетное простое число.

В данной статье получена асимптотическая формула для суммы значений $\tau_k(n)$ по числам, лежащим в арифметической прогрессии в частном случае, когда разность является истинно составным числом.

Далее везде в работе L обозначает $\ln x$. Основным результатом статьи является следующая теорема.

Теорема. *Пусть* $(l,\, D) = 1$, D — *истинно составное число. Тогда при* $D \le x^{\frac{1}{3}-\varepsilon}$ *и любом* $C > 0$ *справедлива формула*

$$\sum_{\substack{n \le x\,, \\ n \equiv l \bmod D}} \tau_k(n) = \frac{x}{\varphi(D)} Q_{k-1}(\ln x) + O\left(\frac{x}{D} L^{-C}\right),$$

где $Q_{k-1}(z)$ — многочлен степени $k-1$ от переменной z, а постоянная в $O(\cdot)$ зависит только от C.

2. Вспомогательные утверждения. Для доказательства этой теоремы нам потребуется несколько лемм.

Лемма 1. *Пусть при условиях $D \le x^{1-\varepsilon}$, $x - x_1 \ge x^{1-\frac{\varepsilon}{2}}$, $0 < \varepsilon < 1/2$ справедливо следующее неравенство*

$$\sum_{\substack{x_1 \le n \le x\,, \\ n \equiv l \bmod D}} \tau_k(n) \ll \frac{x - x_1}{D} (\ln x)^{a(k)}\,,$$

где $a(k)$ — константа, зависящая только от k.

Доказательство см. в [4, с.30].

Лемма 2. *Пусть k, l — константы. Имеет место неравенство*

$$\sum_{a < n \le b} (\tau_k(n))^l \ll (b-a)\,(\ln n)^{k^l - 1}\,.$$

Доказательство см. в работе К.К. Марджанишвили [5].

Лемма 3 [Оценка Виноградова]. *Пусть χ — примитивный характер по модулю D. Тогда справедлива оценка*

$$\sum_{n \le x} \chi(n) \ll \sqrt{D}\, \ln D\,.$$

Доказательство см. в [6, с.123].

Лемма 4. *Пусть χ — примитивный характер по модулю D. Тогда при $N < N' \le 2N$ справедливо следующее неравенство*

$$\sum_{N \le n \le N'} \chi(n) \le cN^{1-\Delta}\,,$$

где — константа, Δ — понижающий множитель.

Доказательство см. в [1].

3. Доказательство теоремы. Согласно определению функции $\tau_k(n)$ имеем

$$S = \sum_{\substack{n_1 n_2 \ldots n_k \equiv\, l \bmod D\,, \\ n_1 n_2 \ldots n_k \le x}} 1\,.$$

Каждая из переменных $n_1, n_2, \ldots, n_k$ пробегает натуральные числа из интервала $[1, x]$.

Разобьем промежутки суммирования по каждой переменной на L промежутков вида $(N_j, 2N_j]$. Соответственно этому разбиению сумма S разобьется на L^k сумм S_1 вида:

$$S_1 = \sum_{N_1 < n_1 \le 2N_1} \sum_{\substack{N_2 < n_2 \le 2N_2 \\ n_1 n_2 \ldots n_k \equiv\, l \bmod D\,, \\ n_1 n_2 \ldots n_k \le x}} \cdots \sum_{N_k < n_k \le 2N_k} 1 =$$

$$= \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \bmod D} \bar{\chi}(l) \sum_{N_1<n_1\le 2N_1} \chi(n_1) \sum_{\substack{N_2<n_2\le 2N_2 \\ n_1n_2\ldots n_k\le x}} \chi(n_2) \cdots \sum_{N_k<n_k\le 2N_k} \chi(n_k) =$$

$$= \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{N_1<n_1\le 2N_1} \sum_{\substack{N_2<n_2\le 2N_2 \\ n_1n_2\ldots n_k\le x, \\ (n_1n_2\ldots n_k, D)=1}} \cdots \sum_{N_k<n_k\le 2N_k} +R\,,$$

где

$$R = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi\ne\chi_0} \bar{\chi}(l) \sum_{N_1<n_1\le 2N_1} \chi(n_1) \sum_{\substack{N_2<n_2\le 2N_2 \\ n_1n_2\ldots n_k\le x}} \chi(n_2) \cdots \sum_{N_k<n_k\le 2N_k} \chi(n_k)\ .$$

Будем пока считать, что $xL^{-B} < N_1N_2\ldots N_k \le x$, где B зависит только от k. Без ограничения общности можно считать, что

$$N_1 \ge N_2 \ge N_{r+1} \ge N_3 \ge N_{r+2} \ldots\ ,$$

где $r = [k/2]+1$. Положим

$$U = N_2N_3\ldots N_r, \qquad V = N_{r+1}N_{r+2}\ldots N_k\ .$$

Следовательно,

$$N_1V \ge U \ge V, \qquad N_1 = \max_{1\le i\le k} N_i\,, \qquad N_1 \ge x^{\frac{1}{k}} L^{-\frac{B}{k}}\,.$$

Пусть $0<\delta<(2k)^{-1}$ — действительное число и $\tau'_{r-1}(u), \tau'_{k-r}(v)$ соответственно означают количество решений в натуральных числах уравнений:

$$n_2n_3\ldots n_r = u\,, \qquad n_{r+1}n_{r+2}\ldots n_k = v\,,$$

где $N_i < n_i \le 2N_i, \quad i = 2,3,\ldots,k\,.$

Оценим сумму R и сравним оценку с величиной $x^{1-\delta}/D$.

1. Пусть сначала $D > x^{1-\varepsilon}N_1^{-1}$, то есть $N_1 > x^{\frac{2}{3}-\varepsilon}$. Тогда $N_2\ldots N_k \le xN_1^{-1} \le Dx^{\varepsilon}$. По лемме Виноградова имеем

$$\Bigg| \sum_{\substack{N_1<n_1\le 2N_1\,, \\ n_1\le x(n_2\ldots n_k)^{-1}}} \chi(n_1) \Bigg| \le \sqrt{D}\ln D\,.$$

Тогда при $D \le x^{\frac{1}{3}-\varepsilon}$ получим

$$|R| \ll \sqrt{D}\ln D N_2N_3\ldots N_k \le D^{\frac{3}{2}}x^{2\varepsilon} \le \frac{x^{1-\varepsilon}}{D}\ .$$

Везде в дальнейшем считаем, что $D \le x^{1-\varepsilon}N_1^{-1}$ или $N_1 \le x^{\frac{2}{3}-\varepsilon}$.

2. Рассмотрим случай $U \le x^\delta$. На основе тривиальной оценки имеем

$$|R| \ll \frac{1}{\varphi(D)}(\varphi(D)-1)N_1UV \le x^{\frac{2}{3}-\varepsilon}x^{2\delta} \le x^{\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\varepsilon} \ll \frac{x^{1-\varepsilon}}{D}\ ,$$

при $D \le x^{\frac{1}{3}-\varepsilon}$ и возьмем $3\delta = \varepsilon$.

3. Пусть теперь $U > x^\delta$. Разделим интервал $(N_1, 2N_1]$ на L^A промежутков:

$(N_1, N_1(1+L^{-A})] \cup (N_1(1+L^{-A}), N_1(1+2L^{-A})] \cup \dots \cup (N_1(1+(n-1)L^{-A}), N_1(1+nL^{-A})]$.

В результате распределения суммирования по набору этих промежутков получим

$$R \ll \sum^{L^A} \frac{1}{\varphi(D)} \Bigg| \sum_{\chi\ne\chi_0} \bar{\chi}(l) \sum_{N'<n_1\le N'(1+L^{-A})} \chi(n_1) \sum_{\substack{N_2<n_2\le 2N_2 \\ n_1n_2\dots n_k\le x}} \chi(n_2) \cdots \sum_{N_k<n_k\le 2N_k} \chi(n_k) \Bigg| =$$

$$= \sum^{L^A} \frac{1}{\varphi(D)} \Bigg| \sum_{\chi\ne\chi_0} \bar{\chi}(l) \sum_{N'<n_1\le N'(1+L^{-A})} \chi(n_1) \sum_{nn_1\le x} \tau'_{k-1}(n) \Bigg|,$$

где $\tau'_{k-1}(n)$ — количество решений в натуральных числах уравнений:

$$n_2n_3\dots n_k = n,$$

при $N_i < n_i \le 2N_i, \quad i = 2,3,\dots,k$.

Поменяем условие суммирования $nn_1 \le x$ на условие $nN' \le x$ и оценим получающуюся при этом ошибку R'

$$R' \le \sum^{L^A} \Bigg| \sum_{N'<n_1\le N'(1+L^{-A})} \sum_{\substack{x(n_1)^{-1}<n\le x(N')^{-1}, \\ n\equiv ln_1^{-1} \bmod D}} \tau'_{k-1}(n) \ +$$

$$+ \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi\ne\chi_0} \bar{\chi}(l) \sum_{N'<n_1\le N'(1+L^{-A})} \chi(n_1) \sum_{nn_1\le x} \tau'_{k-1}(n) \Bigg|.$$

Для оценки внутренней суммы первого слагаемого применим лемму 1, а для внутренней суммы второго слагаемого — ту же лемму, положив в ней $D = 1$:

$$|R'| \ll L^A \frac{xL^{-A}}{N'D} L^{a(k)} N' L^{-A} \ll \frac{x}{D} L^{a(k)+k-A} \ll \frac{x}{D} L^{-C},$$

при $A = a(k) + k + C$.

Итак,

$$R = R'' + O\Big(\frac{x}{D}L^{-C}\Big),$$

где

$$R'' = \sum^{L^A} \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi\ne\chi_0} \bar{\chi}(l) \sum_{N'<n_1\le N'(1+L^{-A})} \chi(n_1) \times$$

$$\times \sum_{U<u\le 2^{r-1}U} \chi(u)\tau'_{r-1}(u) \sum_{\substack{V<v\le 2^{k-r}V \\ uv\le x(N')^{-1}}} \chi(v)\tau'_{k-r}(v)\ .$$

4. Пусть $V \le x^{\delta}$. Тогда

$$|R''| \le \sum^{L^A} \Bigg| \sum_{N'<n_1\le N'(1+L^{-A})} \chi(n_1) \Bigg| \sum_{N_{r+1}<n_{r+1}\le 2N_{r+1}} \cdots \sum_{N_k<n_k\le 2N_k} \times$$

$$\times \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi\ne\chi_0} \Bigg| \sum_{U<u\le U_v} \chi(u)\tau'_{r-1}(u) \Bigg|,$$

где $U_v = \min\{2^{r-1}U, U/N'v\}$.

Применяя неравенство Коши, получим

$$\frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi\ne\chi_0} \Bigg| \sum_{U<u\le U_v} \chi(u)\tau'_{r-1}(u) \Bigg| \le \left(\frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \bmod D} \Bigg| \sum_{U<u\le U_v} \chi(u)\tau'_{r-1}(u) \Bigg|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Положим

$$\sigma_1 = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \bmod D} \Bigg| \sum_{U<u\le U_v} \chi(u)\tau'_{r-1}(u) \Bigg|^2.$$

Тогда σ_1 равняется числу решений сравнения

$$n_2 n_3 \ldots n_r \equiv m_2 m_3 \ldots m_r \bmod D; \qquad N_i < n_i,\ \ m_i \le 2N_i; \qquad i = 2, 3, \ldots, r\ .$$

$$U < n_2 \ldots n_r,\ m_2 \ldots m_r \le U_v\ .$$

Оценим теперь σ_1. Зафиксировав значения m_i на интервалах $(N_i, 2N_i]$, получим

$$\sigma_1 \le N_2 N_3 \ldots N_r \sum_{\substack{n \equiv \mathring{m}_2 \mathring{m}_3 \ldots \mathring{m}_r \bmod \mathrm{D}, \\ U<n\le U_v}} \tau'_{r-1}(n) \ll$$

$$\ll U x^{\delta} \left(\frac{U_v - U}{D} + 1 \right) \ll x^{\delta} \left(\frac{U^2}{D} + U \right).$$

Тогда при $A = a(k) + k + C$ получаем

$$|R''| \ll \sum^{L^A} \Bigg| \sum_{N'<n_1\le N'(1+L^{-A})} \chi(n_1) \Bigg| \sum_{N_{r+1}<n_{r+1}\le 2N_{r+1}} \cdots \sum_{N_k<n_k\le 2N_k} \sqrt{\frac{U^2}{D} + U x^{\frac{\delta}{2}}} \ll$$

$$\ll L^A \sqrt{D} \ln DV \left(\frac{U}{\sqrt{D}} + \sqrt{U} \right) x^{\frac{\delta}{2}} \ll x^{\frac{5\delta}{2}} \left(U + \sqrt{UD} \right) L^{a(k)+k+C}.$$

Так как $U \le VN_1$, то $U^2 \le UVN_1 \le x$, $U \le \sqrt{x}$, $\sqrt{U} \le x^{\frac{1}{4}}$. В результате, находим, что имеет место неравенство

$$x^{\frac{5\delta}{2}}\left(U+\sqrt{UD}\right) \ll x^{\frac{1}{2}+\frac{5\delta}{2}} + x^{\frac{1}{4}+\frac{5\delta}{2}}\sqrt{D} \ll \frac{x^{1-\delta}}{D} \,,$$

при $D \le x^{\frac{1}{2}-\frac{7\delta}{2}}$. Таким образом, при $V \le x^\delta$ получаем оценку $|R| \ll \frac{x}{D}L^{-C}$.

5. Рассмотрим случай $V > x^\delta$. Пусть сначала $U \le Dx^\delta$. Разобьем промежутков $(V, 2^{k-1}V]$ на L^A промежутки вида $(V', V'(1+L^{-A})]$. Тогда

$$|R''| \le \sum^{L^{2A}} \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi\ne\chi_0} \left| \sum_{N'<n_1\le N'(1+L^{-A})} \chi(n_1)\right| \times$$

$$\times \left| \sum_{V'<v\le V'(1+L^{-A})} \chi(v)\tau'_{k-r}(v) \sum_{\substack{U<u\le U_v\\ u\le x(N'v)^{-1}}} \chi(u)\tau'_{r-1}(u)\right|.$$

Заменим условие $u \le x(N'v)^{-1}$ на условие $u \le x(N'V')^{-1}$ и оценим получившуюся при этом ошибку R_1:

$$|R_1| \le \sum^{L^{2A}} \left| \sum_{N'<n_1\le N'(1+L^{-A})} \sum_{V'<v\le V'(1+L^{-A})} \tau'_{k-r}(v) \sum_{\substack{x(N'V'(1+L^{-A}))^{-1}<u\le x(N'V')^{-1},\\ u\equiv ln_1^{-1}v^{-1} \bmod D}} \tau'_{r-1}(u) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{N'<n_1\le N'(1+L^{-A})} \sum_{V'<v\le V'(1+L^{-A})} \tau'_{k-r}(v) \sum_{x(N'V'(1+L^{-A}))^{-1}<u\le x(N'V')^{-1}} \tau'_{r-1}(u)\right|.$$

Для оценки внутренней суммы первого слагаемого применим лемму 1, а для внутренней суммы второго слагаемого применим лемму 2:

$$|R_1| \le L^{2A}(N'L^{-A})(V'L^{-A})L^{k-r-1}\frac{xL^{-A}}{N'V'D}L^{a(k)} \le$$

$$\le \frac{xL^{-A+a(k)+k-r-1}}{D} \le \frac{xL^{-A+a(k)+k}}{D} \le \frac{x}{D}L^{-C},$$

при $A = a(k)+k+C$. В результате, получим, что

$$R'' = R'_1 + O\left(\frac{x}{D}L^{-C}\right),$$

где

$$R'_1 = \sum^{L^{2A}} \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi\ne\chi_0} \bar{\chi}(l) \sum_{N'<n_1\le N'(1+L^{-A})} \chi(n_1) \times$$

$$\times \sum_{V'<v\le V'(1+L^{-A})} \chi(v)\tau'_{k-r}(v) \sum_{\substack{U<u\le U_v,\\ u\le x(N'V')^{-1}}} \chi(u)\tau'_{r-1}(u).$$

Оценим сумму R_1'. Применяя неравенство Коши для

$$\Big|\sum_{U<u\le U_v}\chi(u)\tau_{r-1}'(u)\Big|\Big|\sum_{V'<v\le V'(1+L^{-A})}\chi(v)\tau_{k-r}'(v)\Big|,$$

получим:

$$|R_1'|\le\sum^{L^{2A}}\frac{1}{\varphi(D)}\Big|\sum_{N'<n_1\le N'(1+L^{-A})}\chi(n_1)\Big|\left(\sum_{\chi\ne\chi_0}\Big|\sum_{U<u\le U_v}\chi(u)\tau_{r-1}'(u)\Big|^2\right)^{\frac12}\times$$

$$\times\left(\sum_{\chi\ne\chi_0}\Big|\sum_{V'<v\le V'(1+L^{-A})}\chi(v)\tau_{k-r}'(v)\Big|^2\right)^{\frac12}=$$

$$=\sum^{L^{2A}}\Big|\sum_{N'<n_1\le N'(1+L^{-A})}\chi(n_1)\Big|\left(\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi\ne\chi_0}\Big|\sum_{U<u\le U_v}\chi(u)\tau_{r-1}'(u)\Big|^2\right)^{\frac12}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi\ne\chi_0}\Big|\sum_{V'<v\le V'(1+L^{-A})}\chi(v)\tau_{k-r}'(v)\Big|^2\right)^{\frac12}.$$

Заметим, что

$$\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi\ne\chi_0}\Big|\sum_{U<u\le U_v}\chi(u)\tau_{r-1}'(u)\Big|^2\le\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi\bmod D}\Big|\sum_{U<u\le U_v}\chi(u)\tau_{r-1}'(u)\Big|^2.$$

Положим

$$\sigma_2=\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi\bmod D}\Big|\sum_{U<u\le U_v}\chi(u)\tau_{r-1}'(u)\Big|^2.$$

и оценим величину σ_2 аналогично тому, как это было сделано для σ_1. В результате, получим

$$\sigma_2\ll x^\delta\left(\frac{U^2}{D}+U\right).$$

Аналогично получаем оценку

$$\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi\ne\chi_0}\Big|\sum_{V'<v\le V'(1+L^{-A})}\chi(v)\tau_{k-r}'(v)\Big|^2\ll\left(\frac{V^2}{D}+V\right)x^\delta.$$

Следовательно,

$$|R_1'|\le\sum^{L^{2A}}\Big|\sum_{N'<n_1\le N'(1+L^{-A})}\chi(n_1)\Big|\left(\left(\frac{U^2}{D}+U\right)x^\delta\right)^{\frac12}\left(\left(\frac{V^2}{D}+V\right)x^\delta\right)^{\frac12}\le$$

$$\leq \sum^{L^{2A}} x^{\delta} \Bigg| \sum_{N'<n_1\leq N'(1+L^{-A})} \chi(n_1) \Bigg| \left(\frac{U}{\sqrt{D}} + \sqrt{U}\right)\left(\frac{V}{\sqrt{D}} + \sqrt{V}\right) \ll$$

$$\ll \sum^{L^{2A}} x^{\delta} \Bigg| \sum_{N'<n_1\leq N'(1+L^{-A})} \chi(n_1) \Bigg| \left(\frac{UV}{D} + \frac{U\sqrt{V}}{\sqrt{D}} + \sqrt{UV}\right) \ll$$

$$\ll \sum^{L^{2A}} x^{\delta} \Bigg| \sum_{N'<n_1\leq N'(1+L^{-A})} \chi(n_1) \Bigg| \sqrt{UV}\ .$$

Согласно лемме 3,

$$x^{\delta} \Bigg| \sum_{N'<n_1\leq N'(1+L^{-A})} \chi(n_1) \Bigg| \sqrt{UV} \leq \sqrt{D}\,\ln D\,\sqrt{UV} \leq x^{\frac{1}{2}+2\delta}\sqrt{D} \leq \frac{x^{1-\delta}}{D}\ ,$$

при $D \leq x^{\frac{1}{3}-2\delta}$.

6. Пусть теперь $U > Dx^{\delta}$. Разобьем промежутков $(V, 2^{k-1}V]$ на L^A промежутки вида $(V', V'(1+L^{-A})]$. Тогда

$$|R''| \leq \sum^{L^{2A}} \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi\neq\chi_0} \bar{\chi}(l) \Bigg| \sum_{N'<n_1\leq N'(1+L^{-A})} \chi(n_1) \Bigg| \times$$

$$\times \Bigg| \sum_{V'<v\leq V'(1+L^{-A})} \chi(v)\tau'_{k-r}(v) \sum_{\substack{U<u\leq U_v\,,\\ u\leq x(N'v)^{-1}}} \chi(u)\tau'_{r-1}(u) \Bigg|.$$

Заменим условие $u \leq x(N'v)^{-1}$ на условие $u \leq x(N'V')^{-1}$ и оценим получившуюся при этом ошибку R_1:

$$|R_1| \leq \sum^{L^{2A}} \Bigg| \sum_{N'<n_1\leq N'(1+L^{-A})} \sum_{V'<v\leq V'(1+L^{-A})} \tau'_{k-r}(v) \sum_{\substack{x(N'V'(1+L^{-A}))^{-1}<u\leq x(N'V')^{-1}\,,\\ u\equiv ln_1^{-1}v^{-1} \bmod D}} \tau'_{r-1}(u) +$$

$$+\frac{1}{\varphi(D)} \sum_{N'<n_1\leq N'(1+L^{-A})} \sum_{V'<v\leq V'(1+L^{-A})} \tau'_{k-r}(v) \sum_{x(N'V'(1+L^{-A}))^{-1}<u\leq x(N'V')^{-1}} \tau'_{r-1}(u) \Bigg|.$$

Для оценки внутренней суммы первого слагаемого применим лемму 1, а для внутренней суммы второго слагаемого — лемму 2:

$$|R_1| \leq L^{2A}(N'L^{-A})(V'L^{-A})L^{k-r-1}\frac{xL^{-A}}{N'V'D}L^{a(k)} \leq$$

$$\leq \frac{xL^{-A+a(k)+k-r-1}}{D} \leq \frac{xL^{-A+a(k)+k}}{D} \leq \frac{x}{D}L^{-C} \,,$$

при $A = a(k)+k+C$. В результате, получается асимптотическая формула

$$R'' = R_2' + O\Big(\frac{x}{D}L^{-C}\Big)\,,$$

где

$$R_2' = \sum^{L^{2A}} \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi\neq\chi_0} \bar{\chi}(l) \sum_{N'<n_1\leq N'(1+L^{-A})} \chi(n_1) \,\times$$

$$\times \sum_{V'<v\leq V'(1+L^{-A})} \chi(v)\tau'_{k-r}(v) \sum_{\substack{U<u\leq U_v\\ u\leq x(N'V')^{-1}}} \chi(u)\tau'_{r-1}(u).$$

Оценим сумму R_2'. Применяя неравенство Коши для

$$\Big|\sum_{U<u\leq U_v} \chi(u)\tau'_{r-1}(u)\Big|\Big|\sum_{V'<v\leq V'(1+L^{-A})} \chi(v)\tau'_{k-r}(v)\Big|,$$

получим:

$$|R_2'| \leq \sum^{L^{2A}} \Big|\sum_{N'<n_1\leq N'(1+L^{-A})} \chi(n_1)\Big| \left(\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi\neq\chi_0}\Big|\sum_{U<u\leq U_v}\chi(u)\tau'_{r-1}(u)\Big|^2\right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times\left(\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi\neq\chi_0}\Big|\sum_{V'<v\leq V'(1+L^{-A})}\chi(v)\tau'_{k-r}(v)\Big|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Положим теперь

$$\sigma_3 = \frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi \bmod D}\Big|\sum_{U<u\leq U_v}\chi(u)\tau'_{r-1}(u)\Big|^2.$$

Тогда σ_3 равняется числу решений сравнения

$$n_2n_3\ldots n_r \equiv m_2m_3\ldots m_r (\mathrm{mod} D); \qquad N_i < n_i, \;\; m_i \leq 2N_i; \qquad i = 2,3,\ldots,r\ .$$

$$U < n_2\ldots n_r,\, m_2\ldots m_r \leq U_v\ .$$

Оценим величину σ_3. Зафиксируем значения m_i на интервалах $(N_i, 2N_i]$. Имеет место

$$\sigma_3 \leq N_2N_3\ldots N_r \sum_{\substack{n\equiv \overset{o}{m}_2\overset{o}{m}_3\ldots\overset{o}{m}_r \pmod D,\\ U<n\leq U_v}} \tau'_{r-1}(n)\,.$$

Воспользуемся леммой 1 для оценки последней суммы

$$\sum_{\substack{n\equiv \overset{o}{m}_2\overset{o}{m}_3\ldots\overset{o}{m}_r \pmod D,\\ U<n\leq U_v}} \tau'_{r-1}(n) \leq \frac{U_v-U}{D}L^{a(k)}\ .$$

Отсюда получим

$$\sigma \ll U\left(\frac{U}{D}+1\right)L^{a(k)}\ .$$

Аналогично имеем

$$\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi\neq\chi_0}\left|\sum_{V'<v\leq V'(1+L^{-A})}\chi(v)\tau'_{k-r}(v)\right|^2 \ll \left(\frac{V^2}{D}+V\right)L^{a(k)}\ .$$

Следовательно,

$$|R'_2| \leq \sum^{L^{2A}}\left|\sum_{N'<n_1\leq N'(1+L^{-A})}\chi(n_1)\right|\left(\left(\frac{U^2}{D}+U\right)L^{a(k)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\left(\frac{V^2}{D}+V\right)L^{a(k)}\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \sum^{L^{2A}}\left|\sum_{N'<n_1\leq N'(1+L^{-A})}\chi(n_1)\right|\left(\frac{U}{\sqrt{D}}+\sqrt{U}\right)\left(\frac{V}{\sqrt{D}}+\sqrt{V}\right)L^{a(k)} \ll$$

$$\ll \sum^{L^{2A}}\left|\sum_{N'<n_1\leq N'(1+L^{-A})}\chi(n_1)\right|\left(\frac{UV}{D}+\frac{U\sqrt{V}}{\sqrt{D}}\right)L^{a(k)}\ .$$

В силу леммы 3 имеем

$$\left|\sum_{N'<n_1\leq N'(1+L^{-A})}\chi(n_1)\right|\left(\frac{U\sqrt{V}}{\sqrt{D}}\right)\leq \sqrt{D}\ln D\, U\,\frac{\sqrt{V}}{\sqrt{D}} \leq$$

$$\leq \sqrt{D}\ln x\, x^{\frac{1}{2}}1 \ \leq x^{\frac{1}{2}+\delta}\sqrt{D} \ll \frac{x^{1-\delta}}{D}\ .$$

По лемме 4 получим

$$\left|\sum_{N'<n_1\leq N'(1+L^{-A})}\chi(n_1)\right|\left(\frac{UV}{D}\right)\ll \frac{(N')^{1-\Delta}UV}{D} \leq \frac{x^{1-\delta}}{D}\ .$$

7. Пусть $N_1\ldots N_k \leq xL^{-B}$. Тогда оценим сумму тривиально.
В силу леммы 1 имеем:

$$|S| \ll \sum^{L^k}\frac{N_1\ldots N_k}{D}L^{a(k)+k} \ll \frac{xL^{-B}L^{a(k)+k}}{D} \ll \frac{x}{D}L^{-C}\ ,$$

при $B = a(k)+k+C$.

Таким образом,

$$S = \sum^{L^k}\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{N_1<n_1\leq 2N_1}\ \sum_{\substack{N_2<n_2\leq 2N_2\\ n_1n_2\ldots n_k\leq x,\\ (n_1n_2\ldots n_k,D)=1}}\cdots\sum_{N_k<n_k\leq 2N_k} + O\left(\frac{x}{D}L^{-C}\right).$$

Сделаем обратный процесс, то есть объединим промежутки длин $N_1, N_2, \ldots, N_k$ в один промежуток длины x. Получим

$$S = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\substack{(n_1 n_2 \ldots n_k, D)=1, \\ n_1 n_2 \ldots n_k \le x}} 1 + O\left(\frac{x}{D} L^{-C}\right) =$$

$$= \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\substack{n \le x, \\ (n,D)=1}} \tau_k(n) + O\left(\frac{x}{D} L^{-C}\right).$$

Рассмотрим сумму

$$\sum_{\substack{n \le x, \\ (n,D)=1}} \tau_k(n) .$$

Доказательство строится таким же образом, как для суммы $\sum_{n \le x} \tau_k(n)$ (см. [2]). В результате, получим:

$$\sum_{\substack{n \le x, \\ (n,D)=1}} \tau_k(n) = x Q_{k-1}(\ln x) + O\left(x^{1-\frac{1}{2k}}\right),$$

где $Q_{k-1}(z)$ — многочлен степени $(k-1)$ от переменной z с коэффициентами, зависящими от k и D. Тогда

$$S = \frac{x}{\varphi(D)} Q_{k-1}(\ln x) + O\left(\frac{x}{D} L^{-C}\right). \qquad \blacksquare$$

Литература

1. Iwaniec H., Kowalsky E. Analytic number theory / American Mathematical Society, Colloquium Publications. – 2004. – 53. – 615 c.
2. Dirichlet L., Über die Bestimmung der mittleren Werthe in der Zahlentheorie // Abh. Preuss. Akad. Wiss. Berlin. – 1849. – S.69-83 (Werke 2, S.49-66).
3. Петечук М.М. Сумма значений функции делителей в арифметических прогрессиях с разностью, равной степени простого нечетного числа // Докл. АН СССР, Серия математическая. – 1979. – 43,№4. – С.892-908.
4. Линник Ю.В. Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах / Л.: Изд-во ЛГУ, 1961. – 208 с.
5. Марджианишвили К.К. Оценка одной арифметической суммы // ДАН СССР. – 1939. – 22. – С.291-298.
6. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел / М.: Наука, 1983.

ON THE SUM $\tau_k(n)$ ON NUMBERS LYING IN ARITHMETICAL PROGRESSIONS WITH DIFFERENCE OF A SPECIAL TYPE

M.S. German-Evtushenko
"OOOYandex",
Lenin St., 66, Balashikha, Moscow region, Russia

Abstract. The asymptotic formula of the sum of function $\tau_k(n)$ values on numbers lying in arithmetical progressions with truly composite differences is obtained.

Key words: function of factors, truly composite numbers, estimation of character sums.