MSC 17B63

ОЦЕНКИ РОСТА НЕКОТОРЫХ МНОГООБРАЗИЙ АЛГЕБР ПУАССОНА

С.М. Рацеев

Ульяновский государственный университет,
ул. Льва Толстого, 42, Ульяновск, 432017, Россия, e-mail: RatseevSM@mail.ru

Аннотация. В работе получены эквивалентные условия для оценок роста многообразий алгебр Пуассона, идеалы тождеств которых содержат тождества вида $\{\{x_1, y_1\}, ..., \{x_n, y_n\}\} = 0$, $\{x_1, y_1\} \cdot ... \cdot \{x_n, y_n\} = 0$.

Ключевые слова: алгебра Пуассона, многообразие алгебр, рост многообразия.

Алгебра $A = A(+, \cdot, \{,\}, K)$ над полем K называется алгеброй Пуассона, если $A(+, \cdot, K)$ — ассоциативная коммутативная алгебра с единицей, $A(+, \{,\}, K)$ является алгеброй Ли с операцией умножения $\{\cdot, \cdot\}$, которая называется скобкой Пуассона, для которой выполняется правило Лейбница:

$$\{a \cdot b, c\} = a \cdot \{b, c\} + \{a, c\} \cdot b, \qquad a, b, c \in A.$$

Пусть $L(X)$ — свободная алгебра Ли с умножением $[,]$, где $X = \{x_1, x_2, ...\}$ — счетное множество свободных образующих. В алгебре $L(X)$ зафиксируем упорядоченный базис $v_1, v_2, ...$, где $v_i < v_j$ при $i < j$. Рассмотрим ассоциативную коммутативную алгебру полиномов $Q[v_1, v_2, ...]$. В этой алгебре определим скобки Пуассона для порождающих элементов v_i как умножение в алгебре $L(X)$: $\{v_i, v_j\} = [v_i, v_j]$. Распространим скобки Пуассона на любые элементы из $Q[v_1, v_2, ...]$, используя линейность и правило

$$\{f \cdot g, h\} = f \cdot \{g, h\} + \{f, h\} \cdot g, \qquad f, g, h \in B[v_1, v_2, ...] \, .$$

Тогда полученная алгебра будет свободной алгеброй Пуассона $F(X)$, причем базис алгебры $F(X)$ будут составлять все элементы вида $v_{i_1}^{\alpha_1} \cdot ... \cdot v_{i_k}^{\alpha_k}$, где $\alpha_1, ..., \alpha_k \geq 0$, $i_1 < ... < i_k$.

Далее будем опускать скобки Пуассона при их левонормированной расстановке, то есть введем следующую многоместную операцию

$$\{x_1, x_2, ..., x_n\} \equiv \{\{\{x_1, x_2\}, x_3\}, ..., x_n\} \, .$$

Обозначим через P_n пространство в $F(X)$, состоящее из полилинейных элементов степени n от переменных $x_1, ..., x_n$, а через Γ_n — подпространство в P_n, являющееся линейной оболочкой элементов вида

$$\{x_{i_1}, ..., x_{i_s}\} \cdot ... \cdot \{x_{j_1}, ..., x_{j_t}\} \, , \qquad s \geq 2, ..., \ t \geq 2 \, .$$

Пусть V — некоторое многообразие алгебр Пуассона, $\mathrm{Id}(V)$ — множество всех тождеств многообразия V (хорошо известно, что это множество является идеалом свободной алгебры $F(X)$). Обозначим

$$P_n(V) = P_n/(P_n \cap \mathrm{Id}(V)), \quad \Gamma_n(V) = \Gamma_n/(\Gamma_n \cap \mathrm{Id}(V)),$$

$$c_n(V) = \dim P_n(V)\,, \qquad \gamma_n(V) = \dim \Gamma_n(V)\,.$$

Если многообразие V имеет экспоненциальный рост, то введем в рассмотрение нижние и верхние экспоненты соответствующих последовательностей $\{c_n(V)\}_{n\geq 1}$ и $\{\gamma_n(V)\}_{n\geq 1}$:

$$\underline{\mathrm{EXP}}(V) = \varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(V)}, \qquad \overline{\mathrm{EXP}}(V) = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(V)}.$$

$$\underline{\mathrm{EXP}}^{\Gamma}(V) = \varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{\gamma_n(V)}, \qquad \overline{\mathrm{EXP}}^{\Gamma}(V) = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\gamma_n(V)}.$$

Если $\underline{\mathrm{EXP}}(V) = \overline{\mathrm{EXP}}(V)$, то будем обозначать $\mathrm{EXP}(V)$. Аналогично поступим и с отображением $\mathrm{EXP}^{\Gamma}(V)$. При этом из предложения 4 работы [1] следует, что если для многообразия V алгебр Пуассона существует одна из экспонент $\mathrm{EXP}(V)$ или $\mathrm{EXP}^{\Gamma}(V)$, то будет существовать и другая, причем $\mathrm{EXP}(V) = \mathrm{EXP}^{\Gamma}(V) + 1$.

Хорошо известно ([2]), что если V — нетривиальное многообразие ассоциативных алгебр, то рост многообразия V сверху ограничен экспоненциальной функцией. При этом в случае основного поля нулевой характеристики экспонента произвольного многообразия ассоциативных алгебр существует и является целым числом (см. [3, 4]). В случае же алгебр Ли имеются многообразия со сверхэкспоненциальным ростом [5] и многообразия с дробной экспонентой [6].

В работе [7] показано, что если идеал тождеств некоторого многообразия алгебр Пуассона V над произвольным полем содержит тождества вида

$$\{\{x_1, y_1\}, ..., \{x_n, y_n\}\} = 0\,, \qquad \{x_1, y_1\} \cdot ... \cdot \{x_n, y_n\} = 0\,, \tag{1}$$

то экспонента многообразия V существует и является целым числом. В настоящей работе для значений этих экспонент находятся эквивалентные условия.

Напомним, что последовательность натуральных чисел $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k)$ называют разбиением натурального числа n и обозначают $\lambda \vdash n$, если $\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_k = n$ и $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_k > 0$.

Обозначим посредством V_s многообразие алгебр Пуассона, определенное всеми полилинейными тождествами степени $2s$ вида

$$\{\{x_{11}, y_{11}\}, \{x_{12}, y_{12}\}, ..., \{x_{1\lambda_1}, y_{1\lambda_1}\}\} \cdot \{\{x_{21}, y_{21}\}, \{x_{22}, y_{22}\}, ..., \{x_{2\lambda_2}, y_{2\lambda_2}\}\} \cdot ...$$
$$... \cdot \{\{x_{k1}, y_{k1}\}, \{x_{k2}, y_{k2}\}, ..., \{x_{k\lambda_k}, y_{k\lambda_k}\}\} = 0, \qquad \lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_k) \vdash s.$$

Ниже, в качестве примера, выписаны все тождества, которыми задаются многообразия V_1, V_2, V_3, V_4.

V_1 :

$\{x, y\} = 0;$

V_2 :

$\{\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}\} = 0,$
$\{x_1, y_1\} \cdot \{x_2, y_2\} = 0;$

V_3 :

$\{\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}, \{x_3, y_3\}\} = 0,$
$\{\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}\} \cdot \{x_3, y_3\} = 0,$
$\{x_1, y_1\} \cdot \{x_2, y_2\} \cdot \{x_3, y_3\} = 0;$

V_4 :

$\{\{x_1,y_1\},\{x_2,y_2\},\{x_3,y_3\},\{x_4,y_4\}\}=0,$
$\{\{x_1,y_1\},\{x_2,y_2\},\{x_3,y_3\}\}\cdot\{x_4,y_4\}=0,$
$\{\{x_1,y_1\},\{x_2,y_2\}\}\cdot\{\{x_3,y_3\},\{x_4,y_4\}\}=0,$
$\{\{x_1,y_1\},\{x_2,y_2\}\}\cdot\{x_3,y_3\}\cdot\{x_4,y_4\}=0,$
$\{x_1,y_1\}\cdot\{x_2,y_2\}\cdot\{x_3,y_3\}\cdot\{x_4,y_4\}=0.$

Заметим, что имеет место следующий изоморфизм линейных пространств:

$$\Gamma_n(V_s)\cong\bigoplus_{c=1}^{s-1}\Gamma_n(\mathrm{Id}(V_c)/\mathrm{Id}(V_{c+1})),$$

где пространство $\Gamma_n(\mathrm{Id}(V_c)/\mathrm{Id}(V_{c+1}))$ есть прямая сумма линейных оболочек элементов следующего вида:

$$\Gamma_n(\mathrm{Id}(V_c)/\mathrm{Id}(V_{c+1}))=$$

$$\bigoplus_{\lambda\vdash c}\Big\langle\{\{x_{1,1},x_{1,2},...,x_{1,a_{11}}\},\{x_{2,1},x_{2,2},...,x_{2,a_{12}}\},...,\{x_{\lambda_1,1},x_{\lambda_1,2},...,x_{\lambda_1,a_{1\lambda_1}}\}\}\cdot$$
$$\times\{\{y_{1,1},y_{1,2},...,y_{1,a_{21}}\},\{y_{2,1},y_{2,2},...,y_{2,a_{22}}\},...,\{y_{\lambda_2,1},y_{\lambda_2,2},...,y_{\lambda_2,a_{2\lambda_2}}\}\}\cdot...$$
$$\cdot\{\{z_{1,1},z_{1,2},...,z_{1,a_{k1}}\},\{z_{2,1},y_{2,2},...,z_{2,a_{k2}}\},...,\{z_{\lambda_k,1},z_{\lambda_k,2},...,z_{\lambda_k,a_{k\lambda_k}}\}\}\ \Big|$$
$$\{x_{i_1,j_1},y_{i_2,j_2},z_{i_3,j_3}\}=\{x_1,x_2,...,x_n\},\quad a_{ij}\geq 2\Big\rangle_K.$$

Элементы $x_{i,3},...,x_{i,a_{1i}}$, $i=1,...,\lambda_1$; $y_{i,3},...,y_{i,a_{2i}}$; $i=1,...,\lambda_2$,..., $z_{i,3},...,z_{i,a_{ki}}$, $i=1,...,\lambda_k$, можно менять местами, так как, меняя местами два рядом стоящих элемента, мы дополнительно получаем элемент из $\mathrm{Id}(V_{c+1})$.

Например, для многообразий V_2, V_3, V_4 соответствующие пространства $\Gamma_n(V_i)$ будут выглядеть следующим образом.

$$\Gamma_n(V_2)=\langle\{x_{i_1},...,x_{i_n}\}\rangle_K\,,$$

где

$$\{i_1,...,i_s\}=\{1,...,n\},\quad i_3<...<i_n\,.$$

$$\Gamma_n(V_3)=\Gamma_n(V_2)\oplus\Big\langle\{\{x_{i_1},...,x_{i_s}\},\{x_{j_1},...,x_{j_t}\}\}\Big\rangle_K\oplus\langle\{x_{i_1},...,x_{i_s}\}\cdot\{x_{j_1},...,x_{j_t}\}\rangle_K,$$

где

$$s\geq 2,\quad t\geq 2,\quad i_3<...<i_s,\quad j_3<...<j_t\,.$$

$$\Gamma_n(V_4)=\Gamma_n(V_3)\oplus\Big\langle\{\{x_{i_1},...,x_{i_s}\},\{x_{j_1},...,x_{j_t}\},\{x_{k_1},....,x_{k_u}\}\}\Big\rangle_K\oplus$$

$$\oplus\Big\langle\{\{x_{i_1},...,x_{i_s}\},\{x_{j_1},...,x_{j_t}\}\}\cdot\{x_{k_1},....,x_{k_u}\}\Big\rangle_K\oplus$$

$$\oplus\left\langle \{x_{i_1}, ..., x_{i_s}\} \cdot \{x_{j_1}, ..., x_{j_t}\} \cdot \{x_{k_1}, ..., x_{k_u}\} \right\rangle_K ,$$

где

$$s \geq 2, \quad t \geq 2, \quad u \geq 2, \quad i_3 < ... < i_s, \quad j_3 < ... < j_t, \quad k_3 < ... < k_u \,.$$

Пусть V — некоторое фиксированное подмногообразие в V_s. Тогда

$$\Gamma_n(V) \cong \bigoplus_{c=1}^{s-1} \bigoplus_{\lambda \vdash c} W_{c,\lambda,n}(V) \,,$$

где

$$\bigoplus_{\lambda \vdash c} W_{c,\lambda,n}(V) = \Gamma_n \left(\frac{\mathrm{Id}(V \cap V_c)}{\mathrm{Id}(V \cap V_{c+1})} \right) , \qquad c = 1, ..., s-1 \,.$$

Замечание. Пусть элемент f принадлежит пространству $W_{c,\lambda,n}$. Тогда f имеет такой общий вид:

$$...\{x_1, x_2, ...\}...\{x_3, x_4, ...\}...\{x_{2c-1}, x_{2c}, ...\} \,, \tag{2}$$

где вместо многоточий, находящихся вне элементов $\{x_1, x_2, ...\}$,..., $\{x_{2c-1}, x_{2c}, ...\}$, каким-либо образом расставлены скобки Пуассона $\{\cdot, \cdot\}$ и умножения $(\cdot)$. Если не важно каким образом расставлены данные операции, а важно что происходит внутри выписанных в (2) c скобок Пуассона, то будем использовать запись вида (2), чтобы не выписывать множество различных индексов.

Пусть даны два целых числа k и m. В матрице размера $k \times m$ расставим числа $1, 2, ..., km$ следующим образом. В первый столбец расставим числа $1, 2, ..., k$ по порядку сверху вниз. Также расставим числа $k+1, k+2, ..., 2k$ по порядку сверху вниз во второй столбец. Таким же способом заполним оставшиеся столбцы. В результате, получим матрицу A:

$$A = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & k+1 & ... & (m-1)k+1 \\ \hline 2 & k+2 & ... & (m-1)k+2 \\ \hline ... & ... & ... & ... \\ \hline k & 2k & ... & km \\ \hline \end{array}$$

Пусть перестановка $\sigma_1 \in S_k$ действует на элементы первого столбца матрицы A. Пусть, далее, $\sigma_2 \in S_k$ действует на элементы второго столбца (так как каждый элемент второго столбца представим в виде $k+i$, где $1 \leq i \leq k$, то будем считать, что результатом действия перестановки σ_2 на элемент $k+i$ будет $k+\sigma_2(i)$) и т.д.

Назовем значения $1, 2, ..., k$, входящие в первый столбец матрицы A, первым набором длины k, во второй столбец — вторым набором длины k и т.д. Назовем также значения $\sigma_1(1)$, $\sigma_2(k+1)$,..., $\sigma_m((m-1)k+1)$ — первыми номерами, значения $\sigma_1(2)$, $\sigma_2(k+2)$, ...,$\sigma_m((m-1)k+2)$ — вторыми номерами и т.д. Эти обозначения используются в следующей лемме.

Лемма 1. *Пусть V — подмногообразие в V_s над произвольным полем K. Также пусть имеется некоторый набор чисел $\alpha_\sigma \in K$, $\sigma \in S_d$, где d — некоторое положительное* *целое число, что для некоторого целого числа $m \geq 0$ в пространствах $W_{d,\lambda,n}(V)$, $\lambda \vdash d$, выполнены полилинейные тождества (с учетом замечания выше) вида*

$$\sum_{\sigma_m \in S_d} ... \sum_{\sigma_1 \in S_d} \alpha_{\sigma_m} ... \alpha_{\sigma_1} ... \{y_1, y_2, x_{1,\sigma_1(1)}, x_{2,\sigma_2(1)}, ..., x_{m,\sigma_m(1)}\} ...$$

$$... \{y_2, y_3, x_{1,\sigma_1(2)}, x_{2,\sigma_2(2)}, ..., x_{m,\sigma_m(2)}\} ... \{y_{2d-1}, y_{2d}, x_{1,\sigma_1(d)}, x_{2,\sigma_2(d)}, ..., x_{m,\sigma_m(d)}\} = 0\,, \tag{3}$$

где у переменных $x_{i,\sigma_i(j)}$ индекс i означает порядковый номер набора, а j — порядковый номер элемента в i-ом наборе. Тогда:

(i) существует такое целое число k, что в пространствах $W_{c,\lambda,n}(V)$, $\lambda \vdash c$, $c = d, d+1, ..., s-1$, будут выполнены все полилинейные тождества вида

$$\sum_{\sigma_k \in S_d} ... \sum_{\sigma_1 \in S_d} \alpha_{\sigma_k} ... \alpha_{\sigma_1} ... t_1 ... \{t_{i_1}, x_{1\sigma_1(1)}, x_{2\sigma_2(1)}, ..., x_{k\sigma_k(1)}\} ...$$

$$... \{t_{i_2}, x_{1\sigma_1(2)}, x_{2\sigma_2(2)}, ..., x_{k\sigma_k(2)}\} ... \{t_{i_d}, x_{1\sigma_1(d)}, x_{2\sigma_2(d)}, ..., x_{k\sigma_k(d)}\} ... t_c = 0,$$

где $t_1, ..., t_c$ — набор элементов, представимых в виде скобок Пуассона, содержащих не менее двух переменных;

(ii) если $\alpha_\sigma = (-1)^\sigma$, $\sigma \in S_r$, то существует такое целое $p \geq 0$, что в многообразии V выполнены все полилинейные тождества (с учетом замечания) вида

$$\sum_{\sigma_p \in S_d} ... \sum_{\sigma_1 \in S_d} (-1)^{\sigma_p} ... (-1)^{\sigma_1} ... \{y_1, y_2, x_{1\sigma_1(1)}, x_{2\sigma_2(1)}, ..., x_{p\sigma_p(1)}\} ...$$

$$... \{y_2, y_3, x_{1\sigma_1(2)}, x_{2\sigma_2(2)}, ..., x_{p\sigma_p(2)}\} ... \{y_{2d-1}, y_{2d}, x_{1\sigma_1(d)}, x_{2\sigma_2(d)}, ..., x_{p\sigma_p(d)}\} = 0, \tag{4}$$

□ (i) Покажем, что если элемент v из $W_{c,\lambda,n}(V)$, $\lambda \vdash c$, $c = , ..., s-1$, содержит $k = k(c,d)$ наборов длины d, то в пространстве $W_{c,\lambda,n}(V)$ выполнено такое тождество

$$\sum_{\sigma_k \in S_d} ... \sum_{\sigma_1 \in S_d} \alpha_{\sigma_k} ... \alpha_{\sigma_1} v = 0\,. \tag{5}$$

Если $c = d$, тогда тождества вида (5) следуют из тождества (3), причем $k(d,r) = m$. Таким образом, база индукции проверена.

Пусть $c \geq d+1$. Предположим, что существует такое целое число $k = k(c-1,d)$, что для элемента $v \in W_{c-1,\lambda,n}(V)$, содержащего не менее $k(c-1,d)$ наборов длины d, выполнено тождество (5) в $W_{c-1,\lambda,n}(V)$. Пусть $k(c,d)$ — достаточно большое число, значительно большее чем $k(c-1,d)$, и элемент $v \in W_{c,\lambda,n}(V)$ содержит не менее $k(c,d)$ наборов длины d. Пусть $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_k)$. Элемент v имеет следующий общий вид:

$$v = \{t_{1,1}, ..., t_{1,\lambda_1}\} \cdot \{t_{2,1}, ..., t_{2,\lambda_2}\} \cdot ... \cdot \{t_{k,1}, ..., t_{k,\lambda_k}\},$$

где $t_{i,j}$ — скобки Пуассона, каждая из которых содержит не менее двух переменных.

Пусть в элементе v наборы длины d, каждый из которых содержит не менее $k(c,d)$ элементов, входят таким образом, что некоторая скобка Пуассона t_{i_1,j_1} содержит не менее $k(c,d)$ первых номеров, скобка Пуассона t_{i_2,j_2} содержит не менее $k(c,d)$ вторых номеров,..., скобка Пуассона t_{i_d,j_d} содержит не менее $k(c,d)$ d-х номеров. При этом данные скобки Пуассона являются попарно различными.

Если $\lambda = (n)$, то $v \in L(X)$ и доказательство в данном случае следует из леммы 1 работы [8]. Поэтому пусть для разбиения $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_k)$ числа c выполнено неравенство $k > 1$.

Так как $c > d$, то в элементе v найдется такая скобка Пуассона $t = t_{i,j}$, которая не содержит ни первых, ни вторых,..., ни d-х номеров:

$$v = ... \cdot \{t_{i,1}, ..., t_{i,j}, ..., t_{i,\lambda_i}\} \cdot ...$$

Для краткости записи передвинем скобку $\{t_{i,1}, ..., t_{i,j}, ..., t_{i,\lambda_i}\}$ на последнее место в элементе v, используя коммутативность операции $(\cdot)$, и запишем элемент v в виде

$$v = A \cdot \{q_1, ..., q_{j-1}, t, q_{j+1}, ..., q_h\}\,,$$

где $h = \lambda_i$. Если в скобке $\{q_1, ..., t, ..., q_h\} = u$ ни один из элементов q_j, $j = 1, ..., h$, не содержит ни первых,..., ни d-х номеров, то к элементу A можно применить предположение индукции. Поэтому, не ограничивая общности, пусть хотя бы один из элементов q_j содержит не менее $k(c,d)$ первых номеров. Будем считать, что t является самой крайней слева скобкой в элементе u, которая не содержит ни первых,..., ни d-х номеров (иначе просто сделаем переобозначение). Применим индукцию по h к элементу u. Пусть $h = 2$. Учитывая правило антикоммутативности, можно записать u в виде: $u = \{q, t\}$, где скобка q содержит не менее $k(c,d)$ первых номеров. В элементе u будем передвигать t влево. Учитывая правило дифференцирования, будут получаться слагаемые вида $\{q', t', ...\}$, где в скобке Пуассона q' содержится не менее $k(c-1,d)$ первых номеров, скобка t' содержит скобку t и некоторое количество первых номеров. Если в элементе $\{q', t', ...\}$ вне скобок q' и t' содержится не менее $k(c-1,d)$ первых номеров, то, обозначив $\{q', t'\}$ новой переменной, применим к элементу $A \cdot \{\{q', t'\}, ...\}$ предположение индукции по d. В противном случае, в t' попадет не менее $k(c-1,d)$ первых номеров. Представим элемент $\{q', t', ...\}$ в виде линейной комбинации слагаемых вида $\{\widetilde{q}, \widetilde{t}\}$, где q' содержится в $\widetilde{q}$, t' — в $\widetilde{t}$. При этом

$$A \cdot \{\widetilde{q}, \widetilde{t}\} = \{A \cdot \widetilde{q}, \widetilde{t}\} - \{A, \widetilde{t}\} \cdot \widetilde{q}.$$

Применим к элементам $A \cdot \widetilde{q}$ и $\{A, \widetilde{t}\}$ предположение индукции по c. Таким образом, база индукции по h при $h = 2$ проверена.

Предположим, что для всех $r < h$ утверждение верно. Покажем его справедливость для $r = h$.

Так как скобка t является самой крайней слева в элементе u, в которой не содержится ни первых,..., ни d-х номеров, то возможны следующие случаи.

1. $u = \{t, q_2, q_3, ...\}$, где q_2 содержит (без ограничения общности) не менее $k(c,d)$ первых номеров. Применяя правило дифференцирования, представим u в виде линейной комбинации слагаемых вида

$$\{tf, q_2'g, q_3, ...\},$$

где скобка q_2' содержит не менее чем $k(c-1,d)$ первых номеров, f, g — многочлены от внутренних дифференцирований, состоящие из первых номеров. Если многочлен g

содержит не менее $k(c-1,d)$ первых номеров, то, обозначив $\{tf, q_2'\}$ новой переменной, применим предположение индукции по c. Если же в многочлене g содержится менее $k(c-1,d)$ первых номеров, то их в многочлене f будет не менее чем $k(c-1,d)$. Поэтому в каждом из элементов $\widetilde{t} = tf$ и $\widetilde{g} = q_2'g$ будет не менее $k(c-1,d)$ первых номеров. В элементе $\{\widetilde{t}, \widetilde{q}, q_3, ...\}$ будем передвигать скобку $\widetilde{q}$ вправо. При этом будут получаться элементы, каждый из которых принадлежит одному из следующих случаев.

1.1. $\{\widetilde{t}, q_3, ..., \widetilde{q}\}$. Тогда

$$A \cdot \{\widetilde{t}, q_3, ..., \widetilde{q}\} = \{A \cdot \{\widetilde{t}, q_3, ...\}, \widetilde{q}\} - \{A, \widetilde{q}\} \cdot \{\widetilde{t}, q_3, ...\}.$$

К элементу $A \cdot \{\widetilde{t}, q_3, ...\}$ применим предположение индукции по c, а к элементу $\{\widetilde{t}, q_3, ...\}$ — по h. При этом, так как $\widetilde{q}$ содержит необходимое количество первых номеров, то можно считать, что $\widetilde{t}$ в элементе $\{\widetilde{t}, q_3, ...\}$ не содержит ни первых,..., ни d-х номеров.

1.2. $\{\widetilde{t}, ..., \{q_i, \widetilde{q}\}, ...\}$. Если q_i не содержит ни первых,..., ни d-х номеров, то применим к этому элементу предположение индукции по c. Поэтому пусть в элементе q_i не менее $k(c,d)$ вторых номеров. В этом случае можно считать, что $\widetilde{q}$ не содержит ни первых,..., ни d-х номеров (те первые номера, которые она содержит, уже не понадобятся, необходимое количество первых номеров имеется в $\widetilde{t}$). В скобке $\{q_i, \widetilde{q}\}$ будем передвигать $\widetilde{q}$ влево. При этом будут получаться слагаемые вида $\{\widetilde{t}, ..., \{q_i', q', ...\}, ...\}$, где скобка q_i' содержит не менее $k(c-1,d)$ вторых номеров, а q' содержит $\widetilde{q}$ и некоторое количество вторых номеров. Если вне скобок q_i' и q' содержится не менее $k(c-1,d)$ вторых номеров, то применим предположение индукции по c. В противном случае скобка q' содержит не менее $k(c-1,d)$ вторых номеров. Элемент $\{\widetilde{t}, ..., \{q_i', q', ...\}, ...\}$ представим в виде линейной комбинации элементов вида $\{\widetilde{t}, ..., q_i', q', ...\}$ и элементах вида $\{\widetilde{t}, ..., q', q_i', ...\}$. В элементе $\{\widetilde{t}, ..., q_i', q', ...\}$ будем двигать вправо скобку q', а в элементе $\{\widetilde{t}, ..., q', q_i', ...\}$ — q_i'. Через конечное количество таких преобразований мы либо будем попадать в случай 1.1, либо в предположение индукции по c.

2. Элемент u имеет такой вид: $u = \{t, q_2, q_3, ...\}$, где скобка q_2 не содержит ни первых,..., ни d-х номеров. Пусть q_j — самая крайняя слева скобка, которая содержит не менее $k(c,d)$ некоторых номеров. Переобозначив через t скобку $\{t, q_1, ..., q_{j-1}\}$, попадем в ранее рассмотренный случай 1.

3. $u = \{q_2, ..., t, ...\}$. В данном элементе будем передвигать скобку t влево. Когда t окажется на первом месте в элементе u, мы попадем в ранее рассмотренные случаи 1 и 2. С элементами же вида $\{q_2, ..., \{q_i, t\}, ...\}$ поступим следующим образом. Так как t — самая крайняя слева с скобка, не содержащая ни первых,..., ни d-х номеров, то в скобке q_i содержится не менее $k(c,d)$ некоторых номеров (без ограничения общности, будем считать, что первых номеров). В скобке $\{q_i, t\}$ будем передвигать скобку t влево. При этом будут получаться слагаемые вида $\{q_2, ..., \{q_i', t', ...\}, ...\}$, где в скобке q_i' содержится не менее $k(c-1,d)$ первых номеров, а скобка t' содержит t и некоторое количество первых номеров. Если в скобке $\{q_i', t', ...\}$ вне скобок q_i' и t' содержится не менее $k(c-1,d)$, то применим предположение индукции по c. В противном случае, в t' попадет не менее $k(c-1,d)$ первых номеров. Представим элемент $\{q_2, ..., \{q_i', t', ...\}, ...\}$ в виде линейной комбинации элементов вида $\{q_2, ..., q_i', t', ...\}$ и элементов вида $\{q_2, ..., t', q_i', ...\}$. В элементах вида $\{q_2, ..., q_i', t', ...\}$ будем передвигать вправо скобку t', а в элементе $\{q_2, ..., t', q_i', ...\}$ — q_i'. При этом будем попадать в ранее разобранные случаи.

(ii) Этот случай является частным случаем п. (i). ■

Лемма 2. *Пусть V — подмногообразие в V_s над произвольным полем K и d — некоторое положительное целое число. Пусть также имеется некоторый набор чисел $\alpha_\sigma \in K$, $\sigma \in S_r$, в котором найдется хотя бы один ненулевой элемент такой, что для некоторого целого числа $m \geq 0$ в пространствах $W_{d,\lambda,n}(V)$, $\lambda \vdash d$, выполнены все полилинейные тождества вида (3). Тогда $\mathrm{EXP}(V) \leq d$.*

Доказательство следует из леммы 1 и теоремы 8 работы [7].

Лемма 3. *Если выполнены все условия леммы 2, но тождества (3) выполнены в многообразии V, то $\mathrm{EXP}(V) \leq d$.*

□ Доказательство следует из леммы 2, так как если некоторое тождество выполнено в многообразии V, то оно будет выполнено во всех пространствах вида $W_{c,\lambda,n}(V)$.

Лемма 4. *Пусть $V \subseteq V_s$ над полем нулевой характеристики. Тогда если для некоторого целого d выполнено неравенство $\mathrm{EXP}(V) \leq d$, то в многообразии V для некоторого целого p будут выполнены все полилинейные тождества вида (4).*

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 7 работы [9].

Пусть char $K = 0$ и $\sigma \in S_n$, где S_n — симметрическая группа порядка n. Действие $\sigma(x_i) = x_{\sigma(i)}$ естественным образом продолжается до автоморфизма свободной алгебры Пуассона $F(X)$. Пространство $P_n(V)$ становится при этом S_n-модулем. Исследование структуры $P_n(V)$ как S_n-модуля играет важную роль при изучении многообразия V. Модуль $P_n(V)$ является вполне приводимым, разложение его характера в целочисленную комбинацию неприводимых характеров имеет следующий вид:

$$\chi_n(V) = \chi(P_n(V)) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda(V)\chi_\lambda. \tag{6}$$

Теорема. *Пусть V — многообразие алгебр Пуассона над полем нулевой характеристики, идеал тождеств которого для некоторого целого n содержит полилинейные тождества вида (1). Также пусть d — некоторое положительное целое число. Тогда следующие условия эквивалентны.*

(i) $\mathrm{EXP}(V) \leq d$;

(ii) $\mathrm{EXP}^\Gamma(V) \leq d-1$;

(iii) *найдется некоторый набор чисел $\alpha_\sigma \in K$, $\sigma \in S_d$, в котором имеется хотя бы один такой ненулевой элемент, что для некоторого целого числа $m \geq 0$ в многообразии V выполнены все тождества (с учетом замечания выше) вида*

$$\sum_{\sigma_m \in S_d} \dots \sum_{\sigma_1 \in S_d} \alpha_{\sigma_m} \dots \alpha_{\sigma_1} \dots \{y_1, y_2, x_{\sigma_1(1)}, x_{\sigma_2(1)}, \dots, x_{\sigma_m(1)}\} \dots$$

$$\dots \{y_2, y_3, x_{\sigma_1(2)}, x_{\sigma_2(2)}, \dots, x_{\sigma_m(2)}\} \dots \{y_{2d-1}, y_{2d}, x_{\sigma_1(d)}, x_{\sigma_2(d)}, \dots, x_{\sigma_m(d)}\} = 0; \tag{7}$$

(iv) *найдется такое целое $p \geq 0$, что в многообразии V выполнены все полилинейные тождества вида (4).*

(v) *существует такая константа C, что в сумме (6) $m_\lambda(V) = 0$ в случае, если выполнено условие $n - (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_d) > C$.*

□ Для начала заметим, что если в многообразии V выполнены тождества (1), то найдется такое s, что $V \subseteq V_s$ (лемма 2 работы [7]).

$(i) \Leftrightarrow (ii)$ следует из предложения 4 работы [1].

$(iii) \Rightarrow (i)$ Если в многообразии V выполнены тождества вида (7), то в пространствах $W_{d,\lambda,n}(V)$, $\lambda \vdash d$, выполнены тождества вида (3). Поэтому из леммы 3 следует, что условие (iii) влечет (i).

$(iv) \Rightarrow (iii)$ очевидно.

$(i) \Rightarrow (iv)$ следует из леммы 4.

$(i) \Leftrightarrow (v)$ следует из теоремы 11 работы [7]. ■

Заметим, что тождества (7) не являются полилинейными при $m > 1$. Из доказанной теоремы следует, что если, например, идеал тождеств многообразии V содержит тождества (1) и для некоторого m в многообразии V выполнены тождества

$$\{\{y_1, y_2, x_1^m\}, \{y_3, y_4, x_2^m\}, \{y_5, y_6, x_3^m\}\} = 0,$$

$$\{\{y_1, y_2, x_1^m\}, \{y_3, y_4, x_2^m\}\} \cdot \{y_5, y_6, x_3^m\} = 0,$$

$$\{y_1, y_2, x_1^m\} \cdot \{y_3, y_4, x_2^m\} \cdot \{y_5, y_6, x_3^m\} = 0,$$

то $\mathrm{EXP}(V) \leq 3$.

Литература

1. Рацеев С.М. Коммутативные алгебры Лейбница-Пуассона полиномиального роста // Вестн. Сам. гос. ун-та. Естеств. сер. – 2012. – 94,№3/1. – С.54-65.
2. Regev A. Existence of polynomial identities in $A \otimes B$ // Bull. Amer. Math. Soc. – 1971. – 77,№6. – С.1067-1069.
3. Giambruno A., Zaicev M.V. On codimention growth of finitely generated associative algebras // Adv. Math. – 1998. – 140. – С.145-155.
4. Giambruno A., Zaicev M.V. Exponential codimension growth of P.I. algebras: an exact estimate // Adv. Math. – 1999. – 142. – С.221-243.
5. Воличенко И.Б. Многообразие алгебр Ли с тождеством $[[x_1, x_2, x_3], [x_4, x_5, x_6]] = 0$ над полем характеристики нуль // Сиб. матем. журнал. – 1984. – 25,№3. – С.40-54.
6. Mishchenko S.P., Zaicev M.V. An example of a variety of Lie algebras with a fractional exponent // Journal of Mathematical Sciences (New York). – 1999. – 93,№6. – С.977-982.
7. Рацеев С.М. Рост в алгебрах Пуассона // Алгебра и логика. – 2011. – 50,№1. – С.68-88.
8. Рацеев С.М. Оценки роста многообразий алгебр Лейбница с нильпотентным коммутантом // Вестн. Сам. гос. ун-та. Естеств. сер. – 2010. – 78,№4. – С.65-72.
9. Рацеев С.М. Тождества в многообразиях, порожденных алгебрами верхнетреугольных матриц // Сиб. матем. журнал. – 2011. – 52,№2. – С.416-429.

GROWTH ESTIMATES OF SOME POISSON ALGEBRAS MANIFOLDS

S.M. Ratseev

Ulyanovsk State University,
Lev Tolstoy Str., 42, Ulyanovsk, 432017, Russia, e-mail: RatseevSM@mail.ru

Abstract. Some equivalent conditions connected estimates of manifold growth of Poisson's algebras with identities $\{\{x_1, y_1\}, ..., \{x_n, y_n\}\} = 0$, $\{x_1, y_1\} \cdot ... \cdot \{x_n, y_n\} = 0$ are obtained.

Key words: Poisson's algebra, manifolds of algebras, growth of manifold.