MSC 35O40

УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ШАРЕ

Б.Д. Кошанов

Институт математики и математического моделирования КН МОН,
Республика Казахстан

Аннотация. В работе найдены необходимые и достаточные условия разрешимости неоднородного полигармонического уравнения в шаре. Решение задачи Дирихле дается в явном виде через функции Грина для полигармонического уравнения в шаре. При этом не имеется никаких ограничений на порядок уравнения и число пространственных переменных. В частности, найдены условия разрешимости задач Неймана для бигармонического, 3- гармонического, 5- гармонического уравнения.

Ключевые слова: полигармонические уравнения, задача Дирихле, шар, существование решения, задача Неймана.

Введение. Пусть m – натуральное число. В n-мерном единичном шаре $\Omega = \{x : |x| < 1 \} \subseteq R^n$ рассмотрим неоднородное полигармоническое уравнение (ПУ)

$$\Delta_x^m u(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

с краевыми условиями (КЗ)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{k_1}}{\partial n_x^{k_1}} u \Big|_{x\in\partial\Omega} &= \varphi_1(x), \qquad x \in S = \partial\Omega\,, \\ \frac{\partial^{k_2}}{\partial n_x^{k_2}} u \Big|_{x\in\partial\Omega} &= \varphi_2(x), \qquad x \in S\,, \\ \dots\dots&\dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial^{k_m}}{\partial n_x^{k_m}} u \Big|_{x\in\partial\Omega} &= \varphi_m(x), \qquad x \in S\,, \end{aligned} \tag{2}$$

где $0 \le k_1 < k_2 < ... < k_m \le 2m-1$.

Под *регулярным решением* задачи (1)-(2) будем понимать функцию $u(x) \in C^{2m+\alpha}(\overline{\Omega})$, удовлетворяющую уравнению (1) и краевым условиям (2).

Как известно [1,2], что для существования регулярного решения на исходные данные $f(x), \varphi_1(x), ..., \varphi_m(x)$ накладываются ограничения двух типов: 1) требуется некоторая их гладкость, 2) некоторые условия типа ортогональности к решениям соответствующего однородного союзного уравнения.

Разрешимость краевых задач для ПУ и для эллиптических уравнений в различных пространствах исследованы в работах [2-7]. Описание различных подходов к теории расширения и сужения операторов для функции большого числа переменных в ограниченных областях приведены в [8,9] и функционально-аналитических методов применяется к дифференциальным операторам в [10]. В работах [3,5,12] много исследований по различным КЗ для полианалитических, полигармонических, метааналитических и метагармонических функций и т.д. в некоторой плоской области. К их числу относятся задачи Римана, Гильберта, Дирихле, Неймана, Робена и Шварца [12,13]. Все эти работы являются обобщением классической теории интегральных представлений для аналитических и гармонических функций в плоских областях. Среди прочего, задачи Дирихле для полигармонических функций (для краткости, задачи ДПФ) привлекают значительный интерес. В [12] Бегер и его ученики изучили те же задачи ДПФ с непрерывными данными на границе в двумерной плоскости R^2, то есть, там все $\varphi_i(x)$ гельдеровы. Основным методом работы [12] является превращение задачи ДПФ к классической задаче Римана для аналитических функций на единичной окружности. Известно, что задача ДПФ однозначно разрешима при любой правой части, и решение представляется через функцию Грина [11,12,14].

А.П. Солдатовым и его учениками [5,6] найдены достаточные условия фредгольмовости для эллиптических уравнений и систем высокого порядка с постоянными коэффициентами.

В настоящей статье основное внимание направлено на выяснение ограничении типа 2), то есть выясняется, каким необходимым и достаточным условиям типа 2) должны удовлетворять функции $f(x), \varphi_1(x), ..., \varphi_m(x)$, если их свойства гладкости являются стандартными. Таким образом, в работе находятся необходимые и достаточные условия разрешимости неоднородного ПУ в шаре в исходных данных и решение задачи Дирихле дается в явном виде с помощью функции Грина для полигармонического уравнения в шаре, когда нет никаких ограничений на порядок уравнения и числа пространственных переменных. В частности, найдены условия разрешимости задач Неймана для бигармонического, 3- гармонического, 5- гармонического уравнения.

1. Необходимые и достаточные условия разрешимости краевых задач. Поставим вопрос о том, каким условиям должен удовлетворять набор функций $f(x), \varphi_1(x)$, ..., $\varphi_m(x) \in C^{\alpha}(\overline{\Omega}) \times C^{2m-k_1+\alpha}(S) \times C^{2m-k_2+\alpha}(S) ... \times C^{2m-k_m+\alpha}(S)$, чтобы краевая задача (1)-(2) была разрешима. Ответ на него дает следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $f(x) \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$, $\varphi_s(x) \in C^{2m-k_s+\alpha}(S)$, $s = \overline{1,m}$. Тогда необходимым и достаточным условием разрешимости краевой задачи (1)-(2) в классе $C^{2m+\alpha}(\overline{\Omega})$ при произвольном m и любом наборе $0 \le k_1 < k_2 < ... < k_m \le 2m-1$ является равенство:*

$$\operatorname{rank} A(k_1, k_2, ..., k_m) = \operatorname{rank} \left(A(k_1, k_2, ..., k_m), \widehat{\vec{F}} \right). \tag{3}$$

Здесь посредством $A(k_1, k_2, ..., k_m)$ обозначена матрица размерности $m \times m$, в которой сохраняются строки матрицы $2m \times 2m$-матрицы A с номерами, равными $k_1, k_2, ..., k_m$; $\widehat{\vec{F}}$ – вектор-столбец (размерность $m \times 1$) с элементами:

$$\widehat{\vec{F}}^T = \left(\frac{1}{\omega_n} \int\limits_S \left[\varphi_1(x) - \frac{\partial^{k_1}}{\partial n_x^{k_1}} \varepsilon_{2m,n} * f \right] dS_x, \; ..., \; \frac{1}{\omega_n} \int\limits_S \left[\varphi_m(x) - \frac{\partial^{k_m}}{\partial n_x^{k_m}} \varepsilon_{2m,n} * f \right] dS_x \right)^T;$$

а прямоугольная $2m \times m$-матрица A определена следующей формулой

$$A = \begin{bmatrix} 1 = \frac{0!}{0!} & 1 = \frac{2!}{2!} & 1 = \frac{4!}{4!} & 1 = \frac{6!}{6!} & \dots & \frac{(2m-4)!}{(2m-4)!} & \frac{(2m-2)!}{(2m-2)!} \\ 0 & \frac{2!}{1!} & \frac{4!}{3!} & \frac{6!}{5!} & \dots & \frac{(2m-4)!}{(2m-5)!} & \frac{(2m-2)!}{(2m-3)!} \\ 0 & \frac{2!}{0!} & \frac{4!}{2!} & \frac{6!}{4!} & \dots & \frac{(2m-4)!}{(2m-6)!} & \frac{(2m-2)!}{(2m-4)!} \\ 0 & 0 & \frac{4!}{1!} & \frac{6!}{3!} & \dots & \frac{(2m-4)!}{(2m-7)!} & \frac{(2m-2)!}{(2m-5)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \dots\dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{(2m-4)!}{0!} & \frac{(2m-2)!}{2!} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{(2m-2)!}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{(2m-2)!}{0!} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Если ввести обозначение $\widehat{\vec{U}}^T = (u_0(0), u_1(0), ..., u_{m-1}(0))^T$, то условие (3) означает, что ранг матрицы $A(k_1, k_2, ..., k_m)$ совпадает с рангом расширенной матрицы системы:

$$A(k_1, k_2, ..., k_m)\widehat{\vec{U}} = \widehat{\vec{F}}.$$

С целью изучения уравнения (1) исследуем задачу с краевыми условиями:

$$\begin{aligned} & u\,|_{x\in\partial\Omega} = \varphi_0(x)\,, && x \in S = \partial\Omega\,, \\ & \frac{\partial}{\partial n_x}u\Big|_{x\in\partial\Omega} = \varphi_1(x)\,, && x \in S\,, \\ & \Delta u\,|_{x\in\partial\Omega} = \varphi_2(x)\,, && x \in S\,, \\ & \frac{\partial}{\partial n_x}\Delta u\Big|_{x\in\partial\Omega} = \varphi_3(x)\,, && x \in S\,, \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots && \dots\dots \\ & \frac{\partial}{\partial n_x}\Delta^{m-1}u\Big|_{x\in\partial\Omega} = \varphi_{2m-1}(x)\,, && x \in S\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Общее количество краевых условий $2m$. Выбирается m набор условий из (4), которых мы обозначим условно $k_1, k_2, ..., k_m$. Введем в рассмотрение соответствующую матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 1 = \dfrac{0!}{0!} & 1 = \dfrac{2!}{2!} & 1 = \dfrac{4!}{4!} & 1 = \dfrac{6!}{6!} & \ldots & \dfrac{(2m-4)!}{(2m-4)!} & \dfrac{(2m-2)!}{(2m-2)!} \\ 0 & \dfrac{2!}{1!} & \dfrac{4!}{3!} & \dfrac{6!}{5!} & \ldots & \dfrac{(2m-4)!}{(2m-5)!} & \dfrac{(2m-2)!}{(2m-3)!} \\ 0 & \dfrac{2!n}{0!} & \dfrac{4!n}{2!} & \dfrac{6!n}{4!} & \ldots & \dfrac{(2m-4)!n}{(2m-6)!} & \dfrac{(2m-2)!n}{(2m-4)!} \\ 0 & 0 & \dfrac{4!}{1!} & \dfrac{6!}{3!} & \ldots & \dfrac{(2m-4)!}{(2m-7)!} & \dfrac{(2m-2)!}{(2m-5)!} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \dfrac{(2m-4)!n}{0!} & \dfrac{(2m-2)!n}{2!} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \dfrac{(2m-2)!}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \dfrac{(2m-2)!n}{0!} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Теорема 2. *Пусть $f(x) \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$, $\varphi_{k_s}(x) \in C^{2m-k_s+\alpha}(S)$, $s = \overline{1,m}$. Тогда необходимым и достаточным условием разрешимости краевой задачи (1)-(4) в классе $C^{2m+\alpha}(\overline{\Omega})$ при наборе m краевых данных из (4) является условие (3):*

$$\operatorname{rank} A(k_1, k_2, ..., k_m) = \operatorname{rank} \left(A(k_1, k_2, ..., k_m), \widehat{\vec{F}} \right).$$

Из теоремы 1 следует критерий разрешимости задачи Неймана для бигармонического уравнения. Для этого нужно положить $m = 2$, $k_1 = 2$, $k_2 = 3$. Это положение мы сформулируем в виде отдельного утверждения

Теорема 3. *Пусть $f(x) \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$, $\varphi_2(x) \in C^{2+\alpha}(S)$, $\varphi_3(x) \in C^{1+\alpha}(S)$. Тогда необходимым и достаточным условием разрешимости краевой задачи*

$$\Delta^2 u = f(x)\,, \qquad |x| < 1; \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial n_x^2} u = \varphi_2(x)\,, \quad |x| = 1\,; \\ \frac{\partial^3}{\partial n_x^3} u = \varphi_3(x)\,, \quad |x| = 1\,; \end{aligned} \tag{6}$$

является условие

$$\widetilde{\varphi}_3 = \int\limits_{|x|=1} \left(\varphi_3(x) - \frac{\partial^3}{\partial n_x^3} \varepsilon_{4,n} * f \right) dS_x = 0\,. \tag{7}$$

В условие (7) не входит граничная функция $\varphi_2(x)$, то есть необходимое и достаточное условие разрешимости в этом случае не зависит от $\varphi_2(x)$.

Таким образом, если $\varphi_3(x)$ и $f(x)$ не удовлетворяют условию (7), то краевая задача (5)-(6) не имеет решения.

Точно также при $m = 3$, $k_1 = 3, k_2 = 4, k_3 = 5$ получается критерий разрешимости задачи Неймана для 3-гармонического уравнения

Теорема 4. *Пусть $f(x) \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$, $\varphi_3(x) \in C^{3+\alpha}(S)$, $\varphi_4(x) \in C^{2+\alpha}(S)$, $\varphi_5(x) \in C^{1+\alpha}(S)$. Тогда необходимым и достаточным условием разрешимости краевой задачи*

$$\Delta^3 u = f(x)\,, \qquad |x| < 1\,, \tag{8}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^3}{\partial n_x^3} u = \varphi_3(x)\,, \quad |x| = 1\,; \\ &\frac{\partial^4}{\partial n_x^4} u = \varphi_4(x)\,, \quad |x| = 1\,; \\ &\frac{\partial^5}{\partial n_x^5} u = \varphi_5(x)\,, \quad |x| = 1\,. \end{aligned} \tag{9}$$

является условие

$$\operatorname{rank} A(3,4,5) = \operatorname{rank}\left(A(3,4,5), \widehat{\vec{F}}\right)\,.$$

Оно эквивалентно условию:

$$\begin{cases} \widetilde{\varphi}_3 - \widetilde{\varphi}_4 = 0, \\ \widetilde{\varphi}_5 = 0, \end{cases} \tag{10}$$

где

$$\widetilde{\varphi}_3 = \int\limits_{|x|=1} \left(\varphi_3(x) - \frac{\partial^3}{\partial n_x^3}\varepsilon_{6,n} * f\right) dS_x\,, \qquad \widetilde{\varphi}_4 = \int\limits_{|x|=1} \left(\varphi_4(x) - \frac{\partial^4}{\partial n_x^4}\varepsilon_{6,n} * f\right) dS_x\,,$$

$$\widetilde{\varphi}_5 = \int\limits_{|x|=1} \left(\varphi_5(x) - \frac{\partial^5}{\partial n_x^5}\varepsilon_{6,n} * f\right) dS_x\,.$$

Наконец, критерий разрешимости задачи Неймана для 5-гармонического уравнения получается при $m = 5$, $k_1 = 5, k_2 = 6, k_3 = 7, k_4 = 8, k_5 = 9$.

Теорема 5. *Пусть $f(x) \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$, $\varphi_5(x) \in C^{5+\alpha}(S)$, $\varphi_6(x) \in C^{4+\alpha}(S)$, $\varphi_7(x) \in C^{3+\alpha}(S)$, $\varphi_8(x) \in C^{2+\alpha}(S)$, $\varphi_9(x) \in C^{1+\alpha}(S)$. Тогда необходимым и достаточным условием разрешимости краевой задачи*

$$\Delta^5 u = f(x)\,, \qquad |x| < 1\,, \tag{11}$$

$$\frac{\partial^{5+s}}{\partial n_x^{5+s}} u = \varphi_{5+s}(x)\,, \qquad |x| = 1\,, \quad s = 0,1,2,3,4\,. \tag{12}$$

является условие

$$\operatorname{rank} A(5,6,7,8,9) = \operatorname{rank}\left(A(5,6,7,8,9), \widehat{\vec{F}}\right)\,. \tag{13}$$

Оно эквивалентно условию:

$$\begin{cases} 3(\widetilde{\varphi}_5 - \widetilde{\varphi}_6) + \widetilde{\varphi}_7 = 0, \\ \widetilde{\varphi}_7 - \widetilde{\varphi}_8 = 0, \\ \widetilde{\varphi}_9 = 0, \end{cases} \tag{14}$$

где

$$\widetilde{\varphi}_{5+s} = \int\limits_{|x|=1} \left(\varphi_{5+s}(x) - \frac{\partial^{5+s}}{\partial n_x^{5+s}} \varepsilon_{10,n} * f\right) dS_x\,, \quad s = 0,1,2,3,4\,.$$

2. Функция Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения в шаре. В частном случае, когда $k_1 = 0, k_2 = 1, ..., k_m = m-1$, задача (1) - (2) является задачей Дирихле для уравнения (1) с краевыми условиями:

$$\left.\frac{\partial^j}{\partial n_x^j} u\right|_{x\in\partial\Omega} = \varphi_j(x)\,, \qquad j = 0,1,2,...,m-1\,. \tag{15}$$

В этом случае ранг матрицы $A_0 = A(k_1, k_2, ..., k_m)$ равен m, и эта задача (1),(11) однозначно разрешима. Ее решение представляется с помощью функции Грина (E. Almansi [1], H. Begehr [11], Т.Ш. Кальменов, Б.Д. Кошанов, М.Ю. Немченко [14]), явный вид которой приводится в следующей теореме.

Теорема 6. *Функция Грина задачи Дирихле представима в виде:*

1). В случае нечетного n

$$G_{2m,n}(x,y) = \varepsilon_{2m,n}(x,y) - g^{(0)}_{2m,n}(x,y) - \sum_{k=1}^{m-1} g^{(k)}_{2m,n}(x,y)\,, \tag{16}$$

где

$$\varepsilon_{2m,n}(x,y) = d_{2m,n}|x-y|^{2m-n}\,, \tag{17}$$

$$g^{(0)}_{2m,n}(x,y) = d_{2m,n}\left[\left|\frac{y}{r}\right| \cdot \left|x - \frac{y}{|y|^2} r^2\right|\right]^{2m-n}\,, \tag{18}$$

$$g^{(k)}_{2m,n}(x,y) = d_{2m,n}(2m-n)(2(m-1)-n)...(2(m-k+1)-n) \cdot \left[\left|\frac{y}{r}\right| \cdot \left|x - \frac{y}{|y|^2} r^2\right|\right]^{2m-n-2k} \times$$

$$\times\left(1-\left|\frac{y}{r}\right|^2\right)^k\left(1-\left|\frac{x}{r}\right|^2\right)^k\left(\frac{r^2}{-2}\right)^k\frac{1}{k!}\,,\quad k=1,2,...,m-1\,, \tag{19}$$

причём

$$d_{2m,n}=\frac{1}{(m-1)!\,(2m-n)(2(m-1)-n)...(4-n)(2-n)}\cdot\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2^m\pi^{n/2}}\,,$$

где $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция.

2). В случае чётного n при $2m\geqslant n$ задачи Дирихле (1)-(11) :

$$G_{2m,n}(x,y)=\varepsilon_{2m,n}(x,y)-g^{(0)}_{2m,n}(x,y)-\sum_{k=1}^{m-1}g^{(k)}_{2m,n}(x,y)\,,$$

где

$$\varepsilon_{2m,n}(x,y)=d_{2m,n}|x-y|^{2m-n}\cdot\ln|x-y|\,, \tag{20}$$

$$g^{(0)}_{2m,n}(x,y)=d_{2m,n}\left[\left|\frac{y}{r}\right|\cdot\left|x-y^*\right|\right]^{2m-n}\cdot\ln\left[\left|\frac{y}{r}\right|\cdot\left|x-y^*\right|\right]\,, \tag{21}$$

$$g^{(k)}_{2m,n}(x,y)=d_{2m,n}\left[\left|\frac{y}{r}\right|\cdot\left|x-y^*\right|\right]^{2m-n-2k}\cdot\left(1-\left|\frac{y}{r}\right|^2\right)^k\left(1-\left|\frac{x}{r}\right|^2\right)^k r^{2k}\times$$

$$\times\left[\frac{(-2)^k}{k!}(2m-n)(2(m-1)-n)...(2(m-k+1)-n)\cdot\ln\left[\left|\frac{y}{r}\right|\cdot\left|x-y^*\right|\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{2^{2k}}{2}\cdot\left(\frac{1}{k}+\sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{j}\frac{(-1)^{k-j}}{(k-j)!}\frac{(2m-n)}{2}...\frac{(2m-n-2(k-j)+2)}{2}\right)\right]\,,\quad k=1,2,...,m-1\,, \tag{22}$$

причём

$$d_{2m,n}=\frac{(-1)^{n/2-1}}{\Gamma(m)\Gamma(m-n/2+1)\cdot 2^{2m-1}\pi^{n/2}}\,,$$

$y^*=\dfrac{y}{|y|^2}r^2$ *– точка, симметричная y относительно сферы S_r.*

3. Условие разрешимости в случае $\operatorname{rank}A(1,2,...,m)=m-1$**.** Рассмотрим следующую краевую задачу [3,5]:

$$\Delta^m u(x)=f(x)\,,\quad x\in\Omega\,, \tag{23}$$

$$\left.\frac{\partial^k}{\partial n_x^k}u\right|_{x\in S}=\varphi_k(x)\,,\qquad x\in S\,,\quad i=1,2,...,m\,. \tag{24}$$

Этой задаче соответствует матрица $A(1,2,...,m)$. При этом $\operatorname{rank} A(1,2,...,m) = m-1$. Тогда в силу условий (3) справедлива следующая теорема.

Теорема 7. *Пусть $f(x) \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$, $\varphi_k(x) \in C^{2m-k+\alpha}(S)$, $k = 1,2,...,m$. Тогда необходимым и достаточным условием разрешимости краевой задачи (23)-(24) является*

$$\operatorname{rank} A(1,2,...,m) = \operatorname{rank}\left(A(1,2,...,m), \widehat{\vec{F}}\right), \tag{25}$$

где

$$A(1,2,...m) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 & \dots & (2m-4) & (2m-2) \\ 0 & 2 & 12 & 30 & \dots & (2m-5)\cdot(2m-4) & (2m-3)\cdot(2m-2) \\ 0 & 0 & 24 & 120 & \dots & \dfrac{(2m-4)!}{(2m-7)!} & \dfrac{(2m-2)!}{(2m-5)!} \\ 0 & 0 & 24 & 360 & \dots & \dfrac{(2m-4)!}{(2m-8)!} & \dfrac{(2m-2)!}{(2m-6)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \dots\dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dfrac{(2m-4)!}{(m-5)!} & \dfrac{(2m-2)!}{(m-1)!} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dfrac{(2m-4)!}{(m-4)!} & \dfrac{(2m-2)!}{(m-2)!} \end{bmatrix},$$

$$\widehat{\vec{F}} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\omega_n}\displaystyle\int\limits_S \left[\varphi_1(x) - \dfrac{\partial}{\partial n_x}\varepsilon_{2m,n} * f\right] dS_x \\ \dfrac{1}{\omega_n}\displaystyle\int\limits_S \left[\varphi_2(x) - \dfrac{\partial^2}{\partial n_x^2}\varepsilon_{2m,n} * f\right] dS_x \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{1}{\omega_n}\displaystyle\int\limits_S \left[\varphi_m(x) - \dfrac{\partial^m}{\partial n_x^m}\varepsilon_{2m,n} * f\right] dS_x \end{pmatrix}.$$

4. Построение корректных краевых задач для неоднородного полигармонического уравнения в ограниченной области. Описание различных подходов к теории расширений и сужений дифференциальных операторов от функций нескольких переменных по ограниченным областям, а также применения и постановки задач функционально – аналитического подхода даны в работах (М.И. Вишик[8], М. Отелбаев [9,10] и др. авторов).

Знаная явный вид (16) функции Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения (1), рассмотрим функцию

$$w(x) = \int_{\Omega_r} G_{2m,n}(x,y) f(y) dy +$$

$$+\sum_{j=0}^{m-1}\int_{\partial\Omega_r}\left[\frac{\partial}{\partial n_y}\Delta_y^j G_{2m,n}(x,y)\cdot\Delta_y^{m-1-j}h(y)-\Delta_y^j G_{2m,n}(x,y)\cdot\frac{\partial}{\partial n_y}\Delta_y^{m-1-j}h(y)\right]dS_y\,, \quad (26)$$

где $h(x)=(Kf)(x)$, K – некоторый произвольный оператор, ставящий каждой функции $f(x)$, $x\in\Omega_r=\{x:|x|<r\}\subseteq R^n$ в соответствие единственную достаточно гладкую функцию $h(x)$.

Теорема 8. *Функция $w(x)$, задаваемая формулой (26) является решением следующей краевой задачи:*

1) при $m=2p$

$$\Delta_x^m w(x)=f(x)\,,\qquad x\in\Omega_r\,; \quad (27)$$

$$w(x)\Big|_{x\in\partial\Omega_r}=h(x)\Big|_{x\in\partial\Omega_r},\qquad \frac{\partial}{\partial n_x}w(x)\Big|_{x\in\partial\Omega_r}=\frac{\partial}{\partial n_x}h(x)\Big|_{x\in\partial\Omega_r};$$

$$\Delta_x w(x)\Big|_{x\in\partial\Omega_r}=\Delta_x h(x)\Big|_{x\in\partial\Omega_r},\qquad \frac{\partial}{\partial n_x}\Delta_x w(x)\Big|_{x\in\partial\Omega_r}=\frac{\partial}{\partial n_x}\Delta_x h(x)\Big|_{x\in\partial\Omega_r}; \quad (28)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta_x^{p-1}w(x)\,|_{x\in\partial\Omega_r}=\Delta_x^{p-1}h(x)\,|_{x\in\partial\Omega_r},\qquad \frac{\partial}{\partial n_x}\Delta_x^{p-1}w(x)\Big|_{x\in\partial\Omega_r}=\frac{\partial}{\partial n_x}\Delta_x^{p-1}h(x)\Big|_{x\in\partial\Omega_r}.$$

2) при $m=2p+1$

$$w(x)\,|_{x\in\partial\Omega_r}=h(x)\,|_{x\in\partial\Omega_r},\qquad \frac{\partial}{\partial n_x}w(x)\Big|_{x\in\partial\Omega_r}=\frac{\partial}{\partial n_x}h(x)\Big|_{x\in\partial\Omega_r};$$

$$\Delta_x w(x)\,|_{x\in\partial\Omega_r}=\Delta_x h(x)\,|_{x\in\partial\Omega_r},\qquad \frac{\partial}{\partial n_x}\Delta_x w(x)\Big|_{x\in\partial\Omega_r}=\frac{\partial}{\partial n_x}\Delta_x h(x)\Big|_{x\in\partial\Omega_r}; \quad (29)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta_x^p w(x)\,|_{x\in\partial\Omega_r}=\Delta_x^p h(x)\,|_{x\in\partial\Omega_r},$$

где $h(x)=(K\cdot\Delta_x^m w)(x), x\in\Omega_r$, K–произвольный оператор.

Теорема 9. *Решение краевых задач (27) - (28) и (27) - (29) – единственно.*

Теорема 10. *Пусть неоднородное полигармоническое уравнение (19) с некоторыми краевыми условиями при всех допустимых $f(x)$ имеет единственное регулярное решение $u(x)$. Тогда найдется некоторый оператор K такой, что это решение $u(x)$ удовлетворяет либо краевым условиям (28) при $m=2p$, либо (29) при $m=2p+1$, где $h(x)=(K\cdot\Delta_x^m u)(x)$, $x\in\Omega_r$.*

Литература

1. Almansi E. Sull'integrazione dell'equazione differenziale $\Delta^{2n}=0$ // Annali di Mat. – 1899. – 3, №2. – P1-51.
2. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул / М.: Наука. 1974. – 808 с.

3. Бицадзе А.В. О некоторых свойствах полигармонических функций // Дифференц. уравнения. – 1988/ – 24, №5. – С.825-831.
4. Лопатинский Я.Б. Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям // Укр. матем. журнал. – 1953. – 5, №2. – С.123-151.
5. Солдатов А.П. Общая краевая задача теории функций // Доклады АН СССР. – 1988. – 299, №4. – С.825-828.
6. Малахова Н.А., Солдатов А.П. Об одной краевой задаче для эллиптического уравнения высокого порядка // Дифференц. уравнения. – 2008. – 44, №8. – С.1077-1083.
7. Карачик В.В. Об одном разложении типа Альманси // Мат. заметки. – 2008. – 83, Вып. 3. – С.267-278.
8. Вишик М.И. Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений // Труды Матем. о-ва, 1952, №3, с. 187—246.
9. Отелбаев М., Кокебаев Б.К., Шыныбеков А.Н. К вопросам расширения и сужения операторов, Доклады АН СССР. – 1983. – 271, №4. – С.1307-1311.
10. Burenkov V.I., Otelbaev M. On the singular numbers of correct restrictions of non-selfadjoint elliptic differential operators // Eurasian mathematical journal. – 2011. – 2, №1. – P.145-148.
11. Begehr H., Vu T.N.H., Zhang Z.-X. Polyharmonic Dirichlet Problems // Proceedings of the Steklov Institute of Math. – 2006. – 255. – P.13-34.
12. Begehr H., Du J., Wang Y. A Dirichlet problem for polyharmonic functions // Ann. Mat. Pura Appl. – 2008. – (4) **187**. – P.435-457.
13. Begehr H., Schmersau D. The Schwarz problem for polyanalytic functions // Z. Anal. Anwendungen. – 2005. – **24** (2). – P.341-351.
14. Кальменов Т.Ш., Кошанов Б.Д., Немченко М.Ю. Представление функции Грина задачи Дирихле для полигармонических уравнений в шаре // Доклады РАН. – 2008. – 421, №3. – С.305-307.

SOLVABILITY CONDITIONS OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF NONUNIFORM POLYHARMONIC EQUATION IN BALL

B.D. Koshanov

Institute of mathematics and mathematical modeling,
Almaty, Kazakhstan, e-mail: koshanov@list.ru

Abstract. Necessary and sufficient conditions of solvability of boundary problem in ball for nonuniform polyiharmonic equation are found. The solution is given in explicit form by the Green function. There are no some restrictions on the order of the equation and the number of space variables. In particular, solvability conditions of Neumann's problems for the biharmonic, 3-harmonic, 5-harmonic equations are found.

Key words: polyharmonic equation, Dirichlet's problem, ball, solution's existence, Neumann's problem.