



УДК 621.397

О ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СЛОЖНОСТИ ОЦЕНКИ ЭНЕРГИИ СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ

А.А. ЧЕРНОМОРЕЦ*Белгородский государственный
национальный исследовательский
университет**e-mail: chernomoret@bsu.edu.ru*

В работе проведен анализ оценок суммы квадратов абсолютных значений коэффициентов ДПФ, соответствующих частотным интервалам специального вида в области нормированных частот, с точки зрения вычислительной сложности и погрешностей вычислений энергий речевых сигналов и изображений на основе ДПФ и теории субполосного анализа-синтеза. Приведены результаты вычислительных экспериментов по сравнению вычислительной сложности исследуемых методов.

Ключевые слова: дискретное преобразование Фурье, быстрое преобразование Фурье, речевой сигнал, изображение, интегральная оценка, среднеквадратическое отклонение.

В информационно-телекоммуникационных системах значительный объем передаваемой и хранимой информации определяется задачами по передаче и хранению речевых сигналов и изображений, решение которых требует применения эффективных методов их обработки. В большинстве случаев для обработки речевых сигналов и изображений при переходе из пространственной в частотную область применяется дискретное преобразование Фурье (ДПФ). Данное преобразование используется для нахождения одной из наиболее существенных частотных характеристик сигналов, используемых в процедурах их анализа и синтеза, – энергетического спектра [1]. Понятие энергии в теории обработки сигналов введено для описания количественной характеристики, отражающей отдельные свойства и динамику их изменения в пространстве и времени. Анализ энергетического спектра позволяет получить представление о распределении энергии фрагментов речевых сигналов и изображений по частотным интервалам, что является важным, например, в задачах распознавания, сжатия, фильтрации и др. Определение точных значений энергии в отдельных частотных диапазонах обеспечивает возможность более качественного выбора параметров различных преобразований. Следовательно, вычисление точных значений энергии сигналов и изображений в заданных частотных интервалах является важной задачей частотного анализа-синтеза.

Известно, что ДПФ позволяет вычислить только приближенные значения энергий сигналов и изображений в отдельных частотных интервалах. В работе показано, что для достижения незначительной погрешности оценки величины энергии сигнала (одномерного и двумерного) в заданном частотном интервале при применении ДПФ или быстрого преобразования Фурье (БПФ) необходимо значительно расширять нулями исходный сигнал, что приводит к существенному росту вычислительной сложности расчетов.

В работе приведены оценки суммы квадратов абсолютных значений коэффициентов ДПФ, соответствующих частотным интервалам специального вида в области нормированных частот, представлены результаты вычислительных экспериментов по сравнению погрешности вычислений энергий речевых сигналов и изображений на основе ДПФ и теории субполосного анализа-синтеза [2], а также результаты экспериментов по сравнению вычислительной сложности исследуемых методов.

Оценка энергии одномерного сигнала в заданном частотном интервале.

Для вычисления энергии E_0 сигнала, задаваемого вектором $\vec{f} = (f_1 \ f_2 \ \dots \ f_N)^T$, на основании равенства Парсеваля [1] (также называемого в математике – теоремой Планшереля, в физике – формулой Релея) может быть использовано следующее соотношение,



$$E_0 = \sum_{i=1}^N f_i^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F(u)|^2 du, \quad (1)$$

где $F(u)$ – трансформанта Фурье сигнала \vec{f} , определенная в области нормированных частот $D_{2\pi}^1$,

$$F(u) = \sum_{i=1}^N f_i e^{-j(i-1)u}, \quad j^2 = -1, \\ D_{2\pi}^1 = \{u \mid -\pi \leq u < \pi\}. \quad (2)$$

В работе [2] показано, что, соотношение (1) при разбиении области $D_{2\pi}^1$ (2) на R равновеликих симметричных частотных интервалов U_r , $r = 1, 2, \dots, R$,

$$U_r = \{u \mid u \in [-u_2^r, -u_1^r] \cup [u_1^r, u_2^r]\}, \quad (3) \\ u_1^r = (r-1)\frac{\pi}{R}, \quad u_2^r = r\frac{\pi}{R}, \quad r = 1, 2, \dots, R,$$

может быть записано в виде

$$E_0 = \sum_{r=1}^R E_r = \sum_{r=1}^R \frac{1}{2\pi} \int_{u \in U_r} |F(u)|^2 du,$$

где E_r – точное значение энергии речевого сигнала в заданном частотном интервале U_r , $r = 1, 2, \dots, R$, которое на основании теории субполосного анализа-синтеза определяется соотношением

$$E_r = \vec{f}^T A_r \vec{f}, \quad (4)$$

где A_r – субполосная матрица [2], соответствующая частотному интервалу U_r .

Представляет интерес сравнение значения E_r (4) энергии сигнала в заданном частотном интервале U_r (3), $r = 1, 2, \dots, R$, с суммой $S_r^{(N)}$ квадратов абсолютных значений коэффициентов F_k , $k = 1, 2, \dots, N$, одномерного дискретного преобразования Фурье (ДПФ), соответствующих частотному интервалу U_r ,

$$S_r^{(N)} = \sum_{k=(r-1)\frac{N}{2R}+1}^{r\frac{N}{2R}} |F_k|^2 + \sum_{k=N-r\frac{N}{2R}+1}^{N-(r-1)\frac{N}{2R}} |F_k|^2, \quad (5) \\ F_k = \sum_{i=1}^N f_i e^{-j(i-1)\frac{2\pi(k-1)}{N}}.$$

Рассмотрим модельный сигнал, приведенный на рис. 1. Длина сигнала выбрана $N=64$ отсчета.

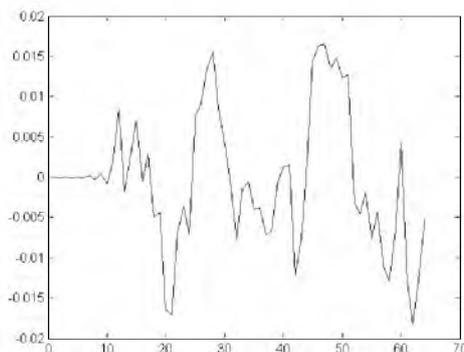


Рис. 1. Исследуемый сигнал (количество отсчетов 64)



На рис. 2 для модельного сигнала (рис. 1) приведены значения квадратов абсолютных значений коэффициентов ДПФ, соответствующих частотным интервалам U_1, U_3 и U_5 при количестве частотных интервалов $R = 8$.

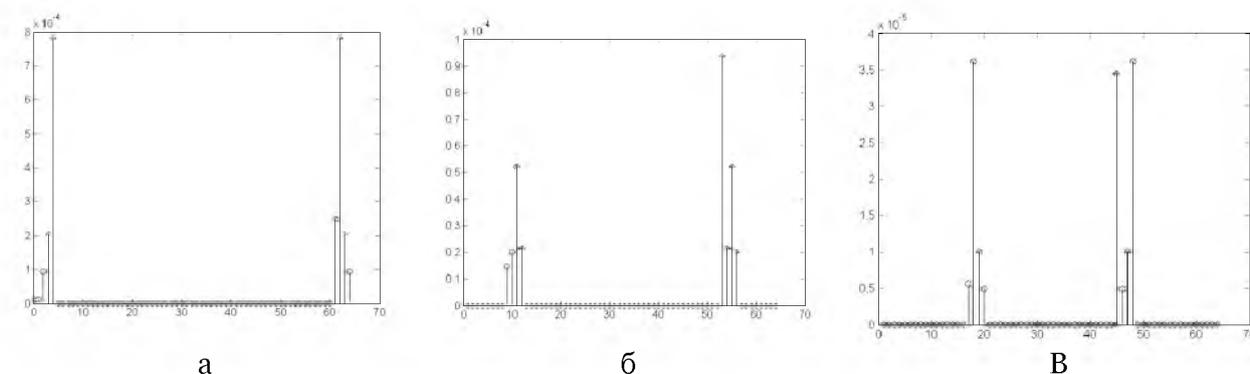


Рис. 2. Значения квадратов абсолютных значений коэффициентов ДПФ, соответствующих частотным интервалам U_1 (а), U_3 (б) и U_5 (в)

Можно показать, что при расширении исходного дискретного сигнала с помощью добавления справа нулей до длины сигнала N_0 отсчетов сумма $S_r^{(N_0)}$ (5) квадратов абсолютных значений коэффициентов ДПФ, соответствующих частотному интервалу U_r , приближается к значению энергии E_r (4) с увеличением значения N_0 . В табл. 1 для сигнала, приведенного на рис. 1, указаны при $R=8$ результаты вычислений значений E_r , $r = 1, 2, \dots, R$, в частотных интервалах U_r , $r = 1, 2, \dots, R$, и соответствующих сумм $S_r^{(N_0)}$ квадратов абсолютных значений коэффициентов ДПФ сигнала, расширенного нулями до длины N_0 . В таблице также указано среднеквадратическое отклонение δ_1 множества значений $S_r^{(N_0)}$ относительно множества значений E_r , $r = 1, 2, \dots, R$,

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{\sum_{r=1}^R (E_r - S_r^{(N_0)})^2}{\sum_{r=1}^R E_r^2}}. \tag{6}$$

Таблица 1

Суммы $S_r^{(N_0)}$ квадратов абсолютных значений коэффициентов ДПФ и энергии E_r в соответствующих частотных интервалах

r	E_r	Расширение сигнала до следующей длины					
		64 $S_r^{(64)}$	128 $S_r^{(128)}$	256 $S_r^{(256)}$	512 $S_r^{(512)}$	1024 $S_r^{(1024)}$	2048 $S_r^{(2048)}$
1	0,002565	0,002419	0,002529	0,002556	0,002563	0,002564	0,002565
2	0,00096	0,0011	0,000994	0,000968	0,000962	0,00096	0,00096
3	0,000285	0,000295	0,000288	0,000286	0,000285	0	0,000285
4	0,000342	0,000329	0,00034	0,000342	0,000342	0,000285	0,000342
5	0,000133	0,000142	0,000134	0,000133	0,000133	0,000342	0,000133
6	0,000113	0,000119	0,000114	0,000114	0,000113	0,000133	0,000113
7	8,466e-5	7,719e-5	8,316e-5	8,431e-5	8,457e-5	0,000113	8,466e-5
8	6,787e-5	7,018e-5	6,822e-5	6,795e-5	6,789e-5	8,464e-5 6,788e-5	6,787e-5
сумма	0.004553	0.004553	0.004553	0.004553	0.004553	0.004553	0.004553
δ_1		0.0731	0.0179	0.004431	0.0011	2.759e-4	6.897e-5



Результаты, приведенные в табл. 1, показывают, что расширение сигнала нулями до длины 2048 отсчетов позволяет получить суммы $S_r^{(2048)}$ квадратов абсолютных значений коэффициентов ДПФ, соответствующих частотным интервалам U_r , $r = 1, 2, \dots, 8$, с незначительным среднеквадратическим отклонением от оценок энергии E_r .

В дальнейшем проведем сравнение вычислительной сложности алгоритма вычисления оценки энергии E_r исходного сигнала в частотных интервалах U_r , $r = 1, 2, \dots, R$, и алгоритма вычисления коэффициентов ДПФ на основании алгоритма быстрого преобразования Фурье (БПФ) для сигналов различной длины, полученных путем расширения нулями исходного сигнала до длины 128, 256, 512, 1024 и 2048 отсчетов.

Оценка энергии изображения в заданном частотном интервале.

Рассмотрим вычисление энергий изображения (двумерного дискретного сигнала), задаваемого матрицей $\Phi = (f_{ik})$, $i = 1, 2, \dots, N_1$, $k = 1, 2, \dots, N_2$, элементы которой соответствуют яркости отдельных пикселей изображения, в различных частотных интервалах.

На основании равенства Парсеваля [1] для вычисления энергии E_{00} изображения, задаваемого матрицей $\Phi = (f_{ik})$, $i = 1, 2, \dots, N_1$, $k = 1, 2, \dots, N_2$, может быть использовано следующее соотношение

$$E_{00} = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{k=1}^{N_2} f_{ik}^2 = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F(u, v)|^2 du dv, \quad (7)$$

где $F(u, v)$ – трансформанта Фурье изображения Φ , определенная в области нормированных частот $D_{2\pi}^2$,

$$F(u, v) = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{k=1}^{N_2} f_{ik} e^{-j(i-1)u} e^{-j(k-1)v}, \quad j^2 = -1, \\ D_{2\pi}^2 = \{(u, v) | -\pi \leq u < \pi, -\pi \leq v < \pi\}. \quad (8)$$

В работе [3] показано, что, соотношение (7) при разбиении области $D_{2\pi}^2$ (8) на $R_1 R_2$ равновеликих симметричных частотных интервалов $\Omega_{r_1 r_2}$, $r_1 = 1, 2, \dots, R_1$, $r_2 = 1, 2, \dots, R_2$,

$$\Omega_{r_1 r_2} : \{(u, v) | (u \in [u_1^{r_1}, u_2^{r_1}], v \in [v_1^{r_2}, v_2^{r_2}]) \cup (u \in [u_1^{r_1}, u_2^{r_1}], v \in [-v_2^{r_2}, -v_1^{r_2}]) \cup \\ \cup (u \in [-u_2^{r_1}, -u_1^{r_1}], v \in [-v_2^{r_2}, -v_1^{r_2}]) \cup (u \in [-u_2^{r_1}, -u_1^{r_1}], v \in [v_1^{r_2}, v_2^{r_2}])\}, \quad (9)$$

$$u_1^{r_1} = (r_1 - 1) \frac{\pi}{R_1}, \quad u_2^{r_1} = r_1 \frac{\pi}{R_1}, \quad r_1 = 1, 2, \dots, R_1,$$

$$v_1^{r_2} = (r_2 - 1) \frac{\pi}{R_2}, \quad v_2^{r_2} = r_2 \frac{\pi}{R_2}, \quad r_2 = 1, 2, \dots, R_2,$$

может быть записано в виде

$$E_{00} = \sum_{r_1=1}^{R_1} \sum_{r_2=1}^{R_2} E_{r_1 r_2} = \sum_{r_1=1}^{R_1} \sum_{r_2=1}^{R_2} \frac{1}{4\pi} \iint_{(u,v) \in \Omega_{r_1 r_2}} |F(u, v)|^2 du dv,$$

где $E_{r_1 r_2}$ – точное значение энергии изображения в заданном частотном интервале $\Omega_{r_1 r_2}$, $r_1 = 1, 2, \dots, R_1$, $r_2 = 1, 2, \dots, R_2$, которое на основании теории субполосного анализа-синтеза определяется соотношением

$$E_{r_1 r_2} = \text{tr}(A_{r_1}^T \Phi A_{r_2} \Phi^T), \quad (10)$$

где A_{r_1} , A_{r_2} – симметрические субполосные матрицы [2], соответствующие частотному интервалу $\Omega_{r_1 r_2}$, tr – след матрицы.



Представляет интерес сравнение значения $E_{r_1 r_2}$ (10) энергии сигнала в заданном частотном интервале $\Omega_{r_1 r_2}$ (9), $r_1 = 1, 2, \dots, R_1$, $r_2 = 1, 2, \dots, R_2$, с суммой $S_{r_1 r_2}^{(N_1 N_2)}$ квадратов абсолютных значений коэффициентов F_{ik} , $i = 1, 2, \dots, N_1$, $k = 1, 2, \dots, N_2$, двумерного дискретного преобразования Фурье изображения Φ , соответствующих частотному интервалу $\Omega_{r_1 r_2}$,

$$\begin{aligned}
 S_{r_1 r_2}^{(N_1 N_2)} = & \sum_{i=(r_1-1)\frac{N_1}{2R_1}+1}^{r_1\frac{N_1}{2R_1}} \sum_{k=(r_2-1)\frac{N_2}{2R_2}+1}^{r_2\frac{N_2}{2R_2}} |F_{ik}|^2 + \sum_{i=(r_1-1)\frac{N_1}{2R_1}+1}^{r_1\frac{N_1}{2R_1}} \sum_{k=N_2-r_2\frac{N_2}{2R_2}+1}^{N_2-(r_2-1)\frac{N_2}{2R_2}} |F_{ik}|^2 + \\
 & + \sum_{i=N_1-r_1\frac{N_1}{2R_1}+1}^{N_1-(r_1-1)\frac{N_1}{2R_1}} \sum_{k=(r_2-1)\frac{N_2}{2R_2}+1}^{r_2\frac{N_2}{2R_2}} |F_{ik}|^2 + \sum_{i=N_1-r_1\frac{N_1}{2R_1}+1}^{N_1-(r_1-1)\frac{N_1}{2R_1}} \sum_{k=N_2-r_2\frac{N_2}{2R_2}+1}^{N_2-(r_2-1)\frac{N_2}{2R_2}} |F_{ik}|^2, \\
 F_{ik} = & \sum_{n_1=1}^{N_1} \sum_{n_2=1}^{N_2} f_{n_1 n_2} e^{-j(n_1-1)\frac{2\pi(i-1)}{N_1}} e^{-j(n_2-1)\frac{2\pi(k-1)}{N_2}}.
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

В качестве наглядного примера на рис. 3 для известного изображения «Lena», размерностью 64x64 пикселей, приведены значения квадратов абсолютных значений коэффициентов ДПФ, соответствующих отдельным частотным интервалам при $R_1 = R_2 = 4$.

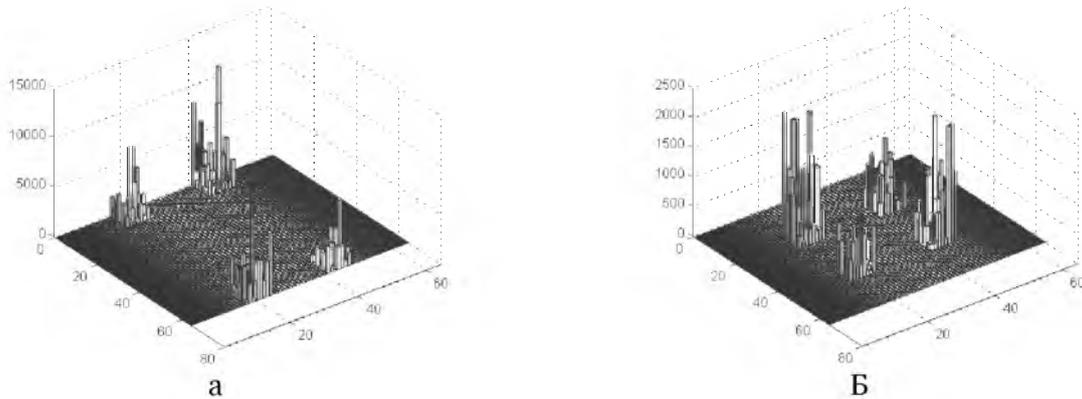


Рис. 3. Значения квадратов абсолютных значений коэффициентов ДПФ, соответствующих частотному интервалу Ω_{13} (а) и Ω_{33} (б) при $R_1 = R_2 = 4$

Можно показать, что при расширении исходного изображения Φ с помощью добавления нулевых строк и столбцов к матрице данного изображения до количества N_{01} и N_{02} строк и столбцов соответственно сумма $S_{r_1 r_2}^{(N_{01} N_{02})}$ (11) квадратов абсолютных значений коэффициентов ДПФ, соответствующих частотному интервалу $\Omega_{r_1 r_2}$, приближается к значению энергии $E_{r_1 r_2}$ (10) с увеличением значений N_{01} и N_{02} .

Покажем справедливость данного утверждения при $R_1 = R_2 = 4$ на примере изображения, приведенного на рис. 4. Первоначально, размерность изображения была выбрана 64x64 пикселей.



Рис. 4. Исследуемое изображение

В табл. 2 для изображения, приведенного на рисунке 4, указаны при $R_1 = R_2 = 4$ результаты вычислений значений $E_{r_1 r_2}$, $r_1 = 1, 2, \dots, R_1$, $r_2 = 1, 2, \dots, R_2$, в частотных интервалах $\Omega_{r_1 r_2}$, $r_1 = 1, 2, \dots, R_1$, $r_2 = 1, 2, \dots, R_2$, и соответствующих сумм $S_{r_1 r_2}^{(N_{01} N_{02})}$ квадратов абсолютных значений коэффициентов ДПФ изображения, расширенного нулями до размерности $N_{01} \times N_{02}$ пикселей. В табл. 2 также указано среднеквадратическое отклонение δ_2 множества значений $S_{r_1 r_2}^{(N_{01} N_{02})}$ относительно множества значений $E_{r_1 r_2}$, $r_1 = 1, 2, \dots, R_1$, $r_2 = 1, 2, \dots, R_2$,

$$\delta_2 = \sqrt{\frac{\sum_{r_1=1}^{R_1} \sum_{r_2=1}^{R_2} (E_{r_1 r_2} - S_{r_1 r_2}^{(N_{01} N_{02})})^2}{\sum_{r_1=1}^{R_1} \sum_{r_2=1}^{R_2} E_{r_1 r_2}^2}}. \quad (12)$$

Таблица 2

Суммы $S_{r_1 r_2}^{(N_{01} N_{02})}$ квадратов абсолютных значений коэффициентов ДПФ и энергии $E_{r_1 r_2}$ в соответствующих частотных интервалах ($N_1 = N_2 = 64$)

r_1	r_2	$E_{r_1 r_2}$	Расширение изображения до следующей размерности					
			64x64 $S_{r_1 r_2}^{(64, 64)}$	128x128 $S_{r_1 r_2}^{(128, 128)}$	256x256 $S_{r_1 r_2}^{(256, 256)}$	512x512 $S_{r_1 r_2}^{(512, 512)}$	1024x1024 $S_{r_1 r_2}^{(1024, 1024)}$	2048x2048 $S_{r_1 r_2}^{(2048, 2048)}$
1	1	9,01e+7	9,203e+7	9,008e+	9,009e+	9,009e+	9,01e+7	9,01e+7
1	2	9,069e+5	3,523e+5				9,071e+5	9,069e+5
1	3	4,608e+	2,222e+5	9,153e+5	9,09e+5	9,074e+5	4,608e+5	4,608e+5
1	4		1,827e+5	4,606e+5	4,608e+	4,608e+	3,294e+5	3,294e+5
2	1	3,294e+5	4,53e+5	3,298e+5			1,031e+6	1,031e+6
2	2	1,031e+6	3,058e+5	1,032e+6	3,294e+5	3,294e+5	3,251e+5	3,251e+5
2	3	3,251e+5	2,065e+5	3,231e+5	1,031e+6	1,031e+6	2,157e+5	2,157e+5
2	4	2,157e+5	1,871e+5	2,149e+5	3,247e+5	3,251e+5	1,892e+5	1,892e+5
3	1	1,892e+5	2,32e+5	1,891e+5	2,155e+5	2,156e+5	4,408e+5	4,408e+5
3	2	4,408e+	2,298e+5	4,432e+5	1,891e+5	1,892e+5	2,19e+5	2,19e+5
3	3		2,086e+	2,198e+5	4,413e+5	4,409e+5	2,059e+5	2,059e+5
3	4	2,19e+5		2,066e+5	2,192e+5	2,191e+5	1,741e+5	1,741e+5
4	1	2,059e+5	1,668e+5	1,739e+5	2,061e+5	2,060e+	3,605e+5	3,605e+5
4	2	1,741e+5	1,733e+5	3,596e+5	1,741e+5		1,827e+5	1,827e+5
4	3	3,605e+5	1,808e+5	1,833e+5	3,603e+5	1,741e+5	1,713e+5	1,713e+5
4	4	1,827e+5	1,674e+5	1,712e+5	1,829e+5	3,604e+5	1,742e+5	1,742e+5
		1,713e+5	1,794e+5	1,741e+5	1,713e+5	1,828e+5		
		1,742e+5			1,741e+5	1,713e+5		
						1,742e+5		
сумма		9.548e+7	9.548e+7	9.548e+7	9.548e+7	9.548e+7	9.548e+7	9.548e+7
δ_2			0.0237	0.000157	3.924e-5	9.771e-6	2.439e-6	6.098e-7



В табл. 3, аналогично табл. 2, приведены значения $E_{r_1 r_2}$, $S_{r_1 r_2}^{(N_{01} N_{02})}$ в частотных интервалах $\Omega_{r_1 r_2}$, $r_1 = 1, 2, 3, 4$, $r_2 = 1, 2, 3, 4$, при различных значениях размерности $N_{01} \times N_{02}$ расширенного изображения. Вычисления выполнены для первоначального изображения размерности $N_1 = N_2 = 256$ (увеличенная копия изображения на рис. 4) при $R_1 = R_2 = 4$.

Результаты, приведенные в табл 2 и 3, показывают, что расширение изображения нулями до размерности 2048x2048 пикселей позволяет получить суммы $S_{r_1 r_2}^{(N_{01} N_{02})}$ квадратов абсолютных значений коэффициентов ДПФ, соответствующих частотным интервалам $\Omega_{r_1 r_2}$, $r_1 = 1, 2, 3, 4$, $r_2 = 1, 2, 3, 4$, с незначительным среднеквадратическим отклонением от оценок энергии $E_{r_1 r_2}$.

Значения в табл. 2 и 3 показывают, что при увеличении размерности исходного изображения выигрыш в погрешности аппроксимации значений коэффициентов ДПФ на основании интегральной оценки становится незначительным, так как большая размерность исходного изображения определяет значительное количество коэффициентов ДПФ, входящих в заданные частотные интервалы.

Таблица 3

Суммы $S_{r_1 r_2}^{(N_{01} N_{02})}$ квадратов абсолютных значений коэффициентов ДПФ и энергии $E_{r_1 r_2}$ в соответствующих частотных интервалах ($N_1 = N_2 = 256$)

r_1	r_2	$E_{r_1 r_2}$	Расширение изображения до следующей размерности			
			$S_{r_1 r_2}^{(256, 256)}$	$S_{r_1 r_2}^{(512, 512)}$	$S_{r_1 r_2}^{(1024, 1024)}$	$S_{r_1 r_2}^{(2048, 2048)}$
1	1	1,481e+9	1,489e+9	1,481e+9	1,481e+9	1,481e+9
1	2	8,477e+6	6,302e+6	8,479e+6	8,477e+6	8,477e+6
1	3	3,304e+6	2,319e+6	3,303e+6	3,304e+6	3,304e+6
1	4	1,425e+6	7,305e+5	1,425e+6	1,425e+6	1,425e+6
2	1	8,981e+6	6,463e+6	8,978e+6	8,981e+6	8,981e+6
2	2	3,639e+6	3,632e+6	3,641e+6	3,64e+6	3,64e+6
2	3	1,859e+6	1,856e+6	1,858e+6	1,859e+6	1,859e+6
2	4	6,882e+5	6,874+5	6,881e+5	6,882e+5	6,882e+5
3	1	3,525e+6	2,6e+6	3,527e+6	3,526e+6	3,525e+6
3	2	2,463e+6	2,458e+6	2,462e+6	2,463e+6	2,463e+6
3	3	1,102e+6	1,106e+6	1,102e+6	1,102e+6	1,102e+6
3	4	3,771e+5	3,756e+5	3,772e+5	3,771e+5	3,771e+5
4	1	1,566e+6	8,34e+5	1,565e+6	1,566e+6	1,566e+6
4	2	9,712e+5	9,686e+5	9,712e+5	9,712e+5	9,712e+5
4	3	4,695e+5	4,691e+5	4,696e+5	4,695e+5	4,695e+5
4	4	1,831e+5	1,842e+5	1,833e+5	1,832e+5	1,831e+5
Сумма		1,521e+9	1,521e+9	1,521e+9	1,521e+9	1,521e+9
δ_2			0.00598	3,908e-6	8,693e-7	2,122e-7

При сравнении вычислительной сложности алгоритма вычисления оценки энергии $E_{r_1 r_2}$ исходного изображения в частотных интервалах $\Omega_{r_1 r_2}$, $r_1 = 1, 2, \dots, R_1$, $r_2 = 1, 2, \dots, R_2$, и алгоритма вычисления коэффициентов ДПФ на основании алгоритма БПФ будем рассматривать изображения различной размерности, полученные путем расширения исходного изображения нулевыми строками и столбцами до размерности 128x128, 256x256, 512x512, 1024x1024 и 2048x2048 пикселей.

Сравнение вычислительной сложности алгоритмов.

Приведем результаты сравнения вычислительной сложности алгоритма вычисления энергии сигналов в отдельных частотных интервалах на основе теории субполосного анализа-синтеза и алгоритма вычисления коэффициентов ДПФ на основе алгоритма БПФ.



Рассмотрим вычислительную сложность алгоритма вычисления M -мерного ДПФ множества, содержащего $(N_0 \times N_0 \times \dots \times N_0)$ элементов, где N_0 – некоторая степень числа 2. Известно [1], что если для вычисления коэффициентов преобразования с разбиением по строкам и столбцам применить одномерный алгоритм БПФ по основанию 2, то вычислительная сложность расчетов определяется C_{cm} операциями умножения,

$$C_{DFT} = MN_0^M \log_2 N_0.$$

Вычислительная сложность алгоритма вычисления энергий E_r одномерного сигнала, содержащего N отсчетов, в отдельном частотном интервале U_r , $r = 1, 2, \dots, R$, с учетом свойств собственных чисел и собственных векторов субполосных матриц, используемых в соотношении (4), определяется выражением [2]

$$C_{CAC1} = N \frac{N + 4R}{R}.$$

Можно показать, что вычислительная сложность алгоритма вычисления частей энергий $E_{r_1 r_2}$ изображения (двумерного сигнала), содержащего $N_1 \times N_2$ пикселей, в отдельном частотном интервале $\Omega_{r_1 r_2}$, $r_1 = 1, 2, \dots, R_1$, $r_2 = 1, 2, \dots, R_2$, с учетом свойств собственных чисел и собственных векторов субполосных матриц, используемых в соотношении (10), определяется выражением

$$C_{CAC2} = N_1 N_2 \frac{(N_1 + 4R_1)(N_2 + 4R_2)}{R_1 R_2}.$$

Следовательно, отношение трудоемкости вычислений ДПФ сигналов, размерности N_0 и $N_0 \times N_0$, и вычислений энергий сигнала, размерности N , в одномерном случае и изображения, размерности $N_1 = N_2 = N$, в отдельных частотных интервалах при условии $R_1 = R_2 = R$, определяется следующими соотношениями соответственно,

$$C_1 = \frac{N_0 \log_2 N_0}{N(N + 4R)} R, \quad (13)$$

$$C_2 = \frac{2N_0^2 \log_2 N_0}{N^2(N + 4R)^2} R^2. \quad (14)$$

В табл. 4 для $N = 64$ и $N_1 = N_2 = N = 64$ приведены значения величин C_1 (13) и C_2 (14) при различных значениях величин N_0 и R . Сигналы и изображения различной размерности N_0 и $N_0 \times N_0$ получены в результате расширения нулями исходных сигналов и изображений, размерности N и $N \times N$, до размерности N_0 и $N_0 \times N_0$ соответственно. В таблице также на примере исходных сигнала и изображения, приведенных на рис. 1 и 4, указаны среднеквадратическое отклонение δ_1 (6) множества значений $S_r^{(N_0)}$ относительно множества значений E_r , $r = 1, 2, \dots, R$, и среднеквадратическое отклонение δ_2 (12) множества значений $S_{r_1 r_2}^{(N_0 \times N_0)}$ относительно множества значений $E_{r_1 r_2}$, $r_1 = 1, 2, \dots, R_1$, $r_2 = 1, 2, \dots, R_2$.



Таблица 4

Значение отношений вычислительной сложности алгоритмов ДПФ и вычисления интегральной оценки коэффициентов ДПФ в частотных интервалах и значение погрешности аппроксимации ($N = N_1 = N_2 = 64$)

N=64		Расширение сигнала до следующей длины, N_0					
		64	128	256	512	1024	2048
R=2	δ_1	0.00334	0.000493	0.000113	2.773e-5	6.89e-6	1.722e-6
	C_1	0.17	0.39	0.88	2	4.44	9.78
R=4	δ_1	0.00486	0.000863	0.000203	5.015e-5	1.249e-5	3.121e-6
	C_1	0.3	0.7	1.6	3.6	8	17.6
R=8	δ_1	0.0731	0.0179	0.00443	0.0011	0.000275	6.897e-5
	C_1	0.5	1.17	2.67	6	13.33	29.33
R=16	δ_1	0.0812	0.0206	0.00514	0.00128	0.00032	8.011e-5
	C_1	0.75	1.75	4	9	20	44
$N_1=N_2=$ =64		Расширение изображения до следующей размерности, $N_{01} \times N_{02}$					
		64x64	128x128	256x256	512x512	1024x1024	2048x2048
$R_1=R_2=$ =2	δ_2	0.0104	4.361e-5	1.049e-5	2.6e-6	6.485e-7	1.620e-7
	C_2	0.0093	0.0432	0.197	0.889	3.951	17.382
$R_1=R_2=$ =4	δ_2	0.0237	1.576e-4	3.924e-5	9.771e-6	2.439e-6	6.098e-7
	C_2	0.03	0.14	0.64	2.88	12.8	56.32
$R_1=R_2=$ =8	δ_2	0.0512	2.343e-4	7.639e-5	1.984e-5	5.004e-6	1.253e-6
	C_2	0.0833	0.389	1.778	8	35.555	156.444
$R_1=R_2=$ =16	δ_2	0.109	0.001	1.311e-4	3.144e-5	7.854e-6	1.964e-6
	C_2	0.187	0.875	4	18	80	352

Значения, приведенные в табл. 4, показывают, что применение анализируемой оценки коэффициентов ДПФ позволяет существенно снизить вычислительные затраты для достижения приемлемой погрешности аппроксимации суммы квадратов абсолютных значений коэффициентов ДПФ в заданных частотных интервалах (энергии сигналов) по сравнению с использованием ДПФ для расширенных нулями сигналов и изображений.

Уменьшение величины среднеквадратического отклонения суммы квадратов абсолютных значений коэффициентов ДПФ относительно точного значения долей энергии в заданных частотных интервалах экспериментально подтверждает факт, что расширение нулями одномерного сигнала или изображения позволяет получить интерполяцию косинусного преобразования на основе большего количества коэффициентов ДКП.

Следовательно, исследованные в работе интегральные оценки коэффициентов ДПФ могут быть использованы для вычисления энергий сигналов и аппроксимации значений суммы квадратов абсолютных значений коэффициентов ДПФ, соответствующих заданным частотным интервалам, что может быть использовано при разработке эффективных методов анализа и синтеза речевых сигналов и изображений.

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы, гос. контракт № 14.740.11.0390.

Литература

1. Сергиенко, А.Б. Цифровая обработка сигналов: учеб. пособие [Текст] / А.Б. Сергиенко. – 3-е изд. – СПб.: БХВ-Петербург, 2011. – 768 с.
2. Жилияков, Е.Г. Методы анализа и построения функций по эмпирическим данным на основе частотных представлений [Текст] / Е.Г. Жилияков. – Белгород, Изд-во БелГУ, 2007. – 160 с.
3. Жилияков, Е.Г. Метод определения точных значений долей энергии изображений в заданных частотных интервалах [Текст] / Е.Г. Жилияков, А.А. Черноморец, И.В. Лысенко // Вопросы радиоэлектроники. – Сер. РЛТ. – 2007. – Вып. 4. – С. 115-123.



ON COMPUTATIONAL COMPLEXITY OF ENERGY ESTIMATION OF VOICE SIGNALS AND IMAGES

A.A. CHERNOMORETS

*Belgorod National
Research University*

*e-mail:
chernomorets@bsu.edu.ru*

This work provides the analysis of the estimates of the sum of squares of DFT coefficients that correspond to special frequency intervals in the normalized frequency domain. The analysis focuses on the complexity and accuracy of the computation of energies of voice signals and images based on DFT and the theory of sub-band analysis-synthesis. The comparative results of the computational complexities of the described methods are provided.

Key words: DFT, FFT, voice signal, image, integral estimate, standard deviation.