УДК 517.956.4

О КРАТНОСТИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ В ЗАДАЧЕ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ НА ГРАФАХ

***Адель Т. Диаб, **О.М. Пенкин, **В.Л. Прядиев**

* Университет Айн Шамс,
Каир, Египет, e-mail: Adeldiab80@hotmail.com

**Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: penkin@bsu.edu.ru, pryadiev@bsu.edu.ru

Аннотация. Определяется специальный класс линейных пространств на графах и дается оценка их размерностей. На этой основе, получаются новые результаты о геометрической кратности собственных значений задачи Штурма-Лиувилля на графе.

Ключевые слова: задача Штурма-Лиувилля, спектр, граф.

В настоящей работе мы даем точные оценки геометрической кратности собственных значений задачи Штурма-Лиувилля на графах. Давно замечено (см., например, [4]), что кратность, если только граф не вырождается в отрезок или цепочку присоединенных друг к другу ребер, не зависит от порядка дифференциального оператора. Оказывается (см., например, [6], [7]), что она зависит, главным образом, от топологического устройства графа. Однако, в литературе отсутствуют какие-либо общие результаты, дающие объяснение этому факту. В упомянутых работах рассматривается случай только непрерывных решений. Однако, существуют и другие интересные классы решений уравнений на графах; некоторые из них можно найти в работах [1], [2,3]. Здесь, мы приводим результаты, пригодные для всех физически осмысленных классов решений.

1. Основные определения. Графом Γ мы называем связное подмножество $\mathbb{R}^n$, составленное из конечного числа попарно не пересекающихся интервалов

$$e_i = \{x \in \mathbb{R}^n: \ x = a_i + t(b_i - a_i)/l, \ t \in (0;l)\,, \ l = \|b_i - a_i\|\}\,, \tag{1}$$

параметризованных натуральным параметром t и называемых далее ребрами графа Γ, а также всех их концов v_j – вершин графа Γ (в (1) вершинами являются a_i и b_i). Множество всех вершин обозначим через V, а множество всех ребер графа – E. Через $E(v)$ обозначим множество ребер, примыкающих к вершине v. Количество элементов в $E(v)$ называется степенью (или кратностью) вершины v и обозначается через $\deg v$.

Связное подмножество $\Gamma_0 \subset \Gamma$ назовем подграфом, если он состоит из некоторого числа ребер исходного графа и концевых вершин этих ребер. Тем самым подграф всегда является замкнутым подмножеством исходного графа в топологии, индуцированной на Γ стандартной топологией пространства $\mathbb{R}^n$.

Через F обозначим множество всех функций $u : \Gamma \to \mathbb{R}$, имеющих равномерно непрерывные производные на каждом ребре (в литературе по дифференциальным уравнением на графах это множество часто обозначается через $C^1_e(\Gamma)$). Тогда в каждой вершине

$v \in V$ определены пределы $u_e(v) = \lim\limits_{X \to v, X \in e} u(X)$ $(e \in E(v))$ и аналогичные пределы производных $u'_e(v)$. Производные вычисляются с помощью натуральной параметризации, фиксированной в (1), т.е.

$$u'(X) = \frac{d}{dt} u(a_i + t(b_i - a_i)/l)\big|_{t=\|X-a_i\|}.$$

Очевидно, что F является линейным пространством над полем вещественных чисел (в этой работе в качестве поля скаляров всегда используется $\mathbb{R}$).

2. Оценка размерности пространства V_0. Обозначим через V_0 такое подмножество в V, что объединение V_0 и множества всех точек ребер графа связно. Далее V_0 называется множеством внутренних вершин графа Γ, а остальная часть – $V \setminus V_0$ – множеством граничных вершин. Следует заметить, что разбиение множества вершин на внутренние и граничные не является однозначным (например, всегда можно взять предельный случай $V_0 = V$).

Обыкновенное линейное дифференциальное уравнение второго порядка на графе определяется как набор таких уравнений на отдельных ребрах, согласованных во внутренних вершинах так называемыми условиями трансмиссии (или "склейки"). Под решением понимается функция на графе, удовлетворяющая на ребрах упомянутым уравнениям, а во внутренних вершинах – условиям трансмиссии. В качестве условий трансмиссии в большинстве работ рассматривают условия непрерывности во внутренних вершинах и равенство нулю линейных комбинаций производных решения во внутренних вершинах по направлениям примыкающих к ним ребер.

В граничных вершинах (если таковые имеются), в основном, ставятся условия Дирихле.

В данной работе конкретный вид условий трансмиссии и граничных условий роли не играет; мы будем считать, что и те и другие имеют вид $l_i^v(u) = 0$, где l_i^v – линейная комбинация пределов функции u и пределов производных этой функций при стремлении аргумента к v вдоль ребер, примыкающих к этой вершине. Главное, чтобы пространство F_0 решений краевой задачи удовлетворяло определяемым далее условиям a) и b). Для их формулировки введем некоторые обозначения.

Основным объектом исследования в настоящей работе является линейное подпространство $F_0 = F_0(\Gamma)$ пространства F, удовлетворяющее следующим требованиям:

a) Для любой вершины $v \in V$ и функции $u \in F_0$ равенство $\vec{u}(v) = 0$ влечет $u \equiv 0$ на звезде $S(v) = \{v\} \cup (\bigcup\limits_{e \in E(v)} e)$.

b) В произвольной вершине v с $\deg v = n$ существует базисный набор, состоящий из n координат. Кроме того, при $n = 1$ одна из координат x_1, x_2 обязательно является базисной, а при $n > 1$ любую пару x_{2k-1}, x_{2k} $(k \le n)$, привязанную к ребру e_k можно дополнить до базисного набора, состоящего из n координат, взяв недостающие $n-2$ координаты, привязанными к любым попарно не совпадающим ребрам из $E(v)$, отличным от ребра e_k.

Замечание 1. *Если* $\deg v = 2$, *то условие* $b)$ *означает, что любая пара* x_{2k-1}, x_{2k} $(k = 1, 2)$ *является базисной. Более того, в вершине* v *степени* m *любой набор координат, состоящий из* $m - 1$ *пар вида* x_{2k-1}, x_{2k} *является базисом. Он, конечно, довольно переполнен, но в ряде случаев будет использован в доказательствах.*

В приложениях к дифференциальным уравнениям на графах, подпространства F_0 задаются некоторыми линейными на множестве F условиями $l_i(u) = 0$ $(i = 1, \dots, n+1)$ в вершинах $v \in V$ степени n. При этом каждое $l_i(u)$ является линейной комбинацией $2n + 1$ величин $x_1(\vec{u}), \dots, x_{2n+1}(\vec{u})$, т.е. является локальной формой. Пусть $L(v)$ – $(n + 1) \times (2n + 1)$-матрица, составленная из коэффициентов этих форм, стоящих при $x_k(\vec{u})$, упорядоченных как описано выше. Предполагается, что все формы линейно независимы, т.е. ранг матрицы $L(v)$ равен $n + 1$. Возьмем какой-нибудь базисный минор. Тогда базисным оказывается набор n координат, номера которых не совпадают с номерами столбцов базисного набора.

Рассмотрим следующий пример. Пусть, например, линейные формы в вершине v, кратности большей единицы, таковы: $l_0(u) = \sum\limits_{i=1}^{n} u'_{e_i}(v)$, $l_i(u) = u(v) - u_{e_i}(v)$ (i=1,..., n). Пусть все эти формы обращаются в нуль на некоторой функции u. Тогда, например, обращение в нуль $n - 1$ производных $u'_{e_i}(v)$ и обращение в нуль одной из величин $u_{e_i}(v)$, $(i = 1, \dots, n)$ или $u(v)$ влечет обращение в нуль всех рассматриваемых величин. Т.е. в данном примере в качестве базисного набора координат можно взять $\{x_{2k-1}, x_2, x_4, \dots, x_{2n-2}\}$ $(k \le n + 1)$. С другой стороны, взяв произвольно пару (x_{2k-1}, x_{2k}) можно дополнить ее до базисного набора следующим образом:

$$\{x_2, x_4, \dots, x_{2k-1}, x_{2k}, x_{2k+2}, \dots, x_{2n-2}\}.$$

Такой тип линейных условий в вершинах графа, кратность которых не меньше двух, рассматривается в подавляющем большинстве работ по теории дифференциальных уравнений на графах. Он отвечает непрерывной склейке решения уравнения на графе из решений дифференциальных уравнений на отдельных ребрах. В вершинах единичной кратности, обычно называемых граничными, рассматриваются условия Дирихле $x_1(\vec{u}) = x_3(\vec{u}) = 0$. Здесь базисной является координата $x_2(\vec{u})$, поскольку обращение ее в нуль означает обращение в нуль всех трех координат.

Следующий тип линейных условий в вершинах не предполагает непрерывности решения в целом на графе.

Пусть в вершинах графа степени $n > 1$ задаются линейные условия на функции $u \in F$ следующего вида:

$$u'_{e_i}(v) + C_i(u(v) - u_{e_i}(v)) = 0 \ (i = 1, \dots, n)\,,$$

$$\sum_{i=1}^{n} C_i(u(v) - u_{e_i}(v)) = 0\,.$$

Здесь в качестве базисного набора координат можно взять $\{x_1, x_3, \dots, x_{2n-3}, x_{2n-1}\}$. Дополняемость до базисного набора любой пары x_{2k-1}, x_{2k} очевидна. Например, пару x_1, x_2 можно дополнить до базисного набора $\{x_1, x_2, x_3, x_5 \dots, x_{2n-3}\}$.

В вершинах единичной кратности можно взять пару условий $u'_e(v) + C_1(u(v) - u_e(v)) = 0,\ u(v) = 0$. Здесь базисной является любая из координат x_1, x_2.

Проверка условия a) в рассматриваемом контексте тривиальна.

В заключительной части мы приведем еще один пример краевой задачи с разрывными решениями, в котором условия a),b) выполняются. К настоящему моменту авторам не известны примеры физически осмысленных локальных склеек (т.е. когда линейные формы, фигурирующие в них, являются локальными), в которых бы не выполнялись требования a),b).

Вершину $v \in \Gamma$ назовем дефектной, если $\dim v < \deg v$.

Наряду с $F_0 = F_0(\Gamma)$ мы будем также рассматривать его подпространства $F_0(\hat\Gamma)$, состоящие из функций из F_0, обращающихся в нуль тождественно на $\Gamma \setminus \hat\Gamma$. Когда мы говорим, что на $\hat\Gamma$ выполняются условия a),b), мы рассматриваем его как самостоятельное пространство на графе $\hat\Gamma$, являющемся подграфом графа Γ. Степень вершины $v \in \Gamma$ относительно $\hat\Gamma$ будет обозначаться через $\deg_{\hat\Gamma} v$. Величина $\dim_{\hat\Gamma} v$ обозначает размерность вершины v по отношению к пространству $F_0(\hat\Gamma)$.

Далее часто используется следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть $\hat\Gamma$ подграф графа Γ, тогда подпространство $F_0(\hat\Gamma) \subset F_0$, описанное выше, удовлетворяет условиям a),b) относительно $\hat\Gamma$. Более того, все вершины графа $\hat\Gamma$, к которым примыкают ребра из $\Gamma \setminus \hat\Gamma$ являются дефектными.*

$\square$ Проверять условия a),b) нужно только в вершинах лежащих в $\overline{(\Gamma \setminus \hat\Gamma)} \cap \hat\Gamma$ (черта означает замыкание в топологии индуцированной на Γ из объемлющего пространства $\mathbb{R}^n$). Пусть v – одна из таких вершин и пусть e_i $(i = 1, \ldots, m)$ – ребра, примыкающие к ней. Будем предполагать, что первые k ребер лежат в $\hat\Gamma$, а остальные – в $\Gamma \setminus \hat\Gamma$. В силу свойства b) (на $F_0(\Gamma)$) пару x_{2m-1}, x_{2m}, привязанную к последнему ребру, а потому не принадлежащую $\hat\Gamma$, можно дополнить до базисного набора

$$\{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{k-1}}, x_{i_k}, \ldots, x_{i_{m-2}}, x_{2m-1}, x_{2m}\}.$$

Причем можно считать, что координаты x_{i_j} при $j \geq k$ привязаны к ребрам из $\Gamma \setminus \hat\Gamma$ (это следует из второй части условия b)).

Т.к. все координаты, привязанные к ребрам из $\Gamma \setminus \hat\Gamma$ обращаются в нуль на функции $u \in F_0(\hat\Gamma)$ (поскольку на таких ребрах функция u обращается в нуль тождественно), то равенства $x_{i_j} = 0$ при $j \leq k - 1$ влекут равенство нулю всех координат $\{x_1, \ldots, x_{2m+1}\}$ и тем более части этих координат $\{x_1, \ldots, x_{2k+1}\}$, относящейся к ребрам из $\hat\Gamma$. Последнее как раз и означает, что в рассматриваемой вершине имеется базис (по отношению к $F_0(\hat\Gamma)$) из $k - 1$ элементов, т.е. $\dim_{\hat\Gamma} < \deg_{\hat\Gamma}$.

Проверка второй части условия b) осуществляется аналогичными рассуждениями. Это относится и к условию a). $\blacksquare$

Имеет место следующее тривиальное утверждение.

Лемма 2. *Пусть $\deg v = n$, $u \in F_0$ и n координат некоторого базисного набора координат равны нулю в рассматрпваемой вершине. Тогда $u \equiv 0$ на звезде*

$$S(v) = \{v\} \cup (\bigcup_{e \in E(v)} e)\,.$$

Из него получаем следующую лемму.

Лемма 3. *Пусть* Γ *является графом-цепочкой, т.е. представляет собой множество, составленное из точек ребер* $e_1, \dots, e_n$*, последовательно соединенных в вершинах* $v_0, \dots, v_n$*. Тогда, если в вершине* v_0 *базисная координата функции* $u \in F_0$ *равна нулю, то* $u \equiv 0$ *на* Γ.

□ В силу леммы 2 $u \equiv 0$ на звезде $S(v_0)$. Но тогда в вершине v_1 имеем $u_{e_1} = u'_{e_1} = 0$. Но эта пара является базисной в этой вершине, поэтому в силу леммы 2 $u \equiv 0$ на звезде $S(v_1)$. Продолжая это рассуждение, получим $u \equiv 0$ на любой звезде кроме, возможно, последней – $S(v_n)$. Но $u \equiv 0$ на e_n (т.к. $u \equiv 0$ на $S(v_{n-1})$), а потому в последней вершине v_n имеем $x_1(\vec{u}) = x_2(\vec{u}) = 0$. Одна из этих координат является базисной (в силу b), т.к. степень этой вершины равна 1), поэтому и $u(v_n) = 0$, что завершает доказательство. ■

Замечание 2. *Допустим, что условия a),b) выполняются во всех вершинах цепочки, кроме вершины* v_n*. Тогда равенство* $u(v_n) = 0$ *в условиях леммы 3 не обязано выполняться. Однако, из доказательства видно, что* $u \equiv 0$ *на* $\Gamma \setminus \{v_n\}$.

Отсюда легко получаем такое следствие.

Лемма 4. *Пусть* Γ *является графом-цепочкой. Тогда* $\dim F_0 \le 1$.

□ Предположим, вопреки доказываемому, что имеется линейно независимое семейство, состоящее их двух функций $u, w \in F_0$. Возьмем в начальной вершине v рассматриваемой цепочки базисную координату x_k. Если $x_k(w) = 0$, то из предыдущей леммы следует, что $w \equiv 0$, а это невозможно. В противном случае возьмем нетривиальную линейную комбинацию $z = u - (x_k(u)/x_k(w))w$ для которой $x_k(z) = 0$. В силу леммы 3 эта линейная комбинация тождественно равна нулю, что вновь невозможно (в силу предположения о линейной независимости набора u, w). ■

Следующая лемма в контексте задачи Штурма-Лиувилля на графе с непрерывными склейками решений в вершинах (см. пример выше) была доказана Ю.В. Покорным (см., например, [1]).

Лемма 5. *Пусть* Γ *является деревом. Тогда если во всех вершинах с единичной кратностью, исключая, возможно, одну из них –* v_0*, базисные координаты обращаются в нуль на функции* $u \in F_0$ *(точнее, на порождаемом ей векторе* $\vec{u}(v)$*), то* $u \equiv 0$ *на* Γ.

□ Пусть $v_0, v_1, \dots, v_k$ – все вершины кратности единица. Если дерево не является цепочкой, то v_1 обязательно является концевой вершиной некоторой цепочки γ (промежуточные вершины которой имеют кратность два в исходном графе), соединяющей v_1 с некоторой вершиной v, кратность которой больше двух. В силу замечания 2, $u \equiv 0$ на $\gamma \setminus \{v\}$.

Положим $\hat{\Gamma} = \Gamma \setminus (\gamma \setminus \{v\})$. В силу леммы 1, пространство $F_0(\hat{\Gamma})$ удовлетворяет условиям a), b). Заметим также, что количество вершин кратности единица в графе $\hat{\Gamma}$ меньше, чем в исходном графе. Поскольку это будут в точности вершины $v_0, v_2, \dots, v_k$, то на графе $\hat{\Gamma}$ выполнены все условия доказываемого утверждения. Теперь можно повторить это рассуждение, начиная с вершины v_2. Продолжая этом процесс мы придем к графу-цепочке, соединяющей v_0 с v_k. Остается сослаться на лемму 3 (в которой роль v_0 сейчас играет v_k), в силу которой $u \equiv 0$ на этой последней цепочки. ■

Замечание 3. *Как и в предыдущем замечании можно отметить, что если вместо функции из F_0 взять функцию из F, удовлетворяющую условиям a),b) в вершинах из $V \setminus \{v_0\}$, то при обращении в нуль базисных координат векторов $\vec{u}(v)$ в вершинах из $V \setminus \{v_0\}$ с единичными кратностями, будем иметь $u \equiv 0$ на $\Gamma \setminus \{v_0\}$.*

Из доказанного утверждения получаем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть граф Γ является деревом. Тогда $\dim F_0 \le d_1 - 1$, где d_1 – количество вершин степени 1.*

□ Предположив противное можно найти линейно независимое семейство d_1 функций из F_0 Линейными комбинациями, как и в лемме 4 из них можно построить ненулевую функцию, обращающую в нуль $d_1 - 1$ базисных координат в вершинах единичной кратности. Но это противоречит предыдущей лемме. ■

Пусть теперь Γ – произвольный граф. Вершину v, лежащую на каком-либо цикле, назовем разбивающей, если $\Gamma \setminus \{v\}$ не является связным. Пусть G_i^v – одна из получающихся компонент связности множества $\Gamma \setminus \{v\}$. Множество $G_i = G_i^v \cup \{v\}$ является подграфом графа Γ, который также может иметь циклы. Он также может разбиваться на связные компоненты некоторыми вершинами лежащими на его циклах. После такого разбиения снова образуем подграфы типа G_i, присоединяя к ним вершины, с помощью которых они разбивались. Продолжая этот процесс и далее мы получим некоторое количество подграфов. Каждый из низ является либо деревом, либо является связным объединением циклов, не допускающим дальнейшего разбиения описанного выше типа. Такое объединение циклов назовем гнездом. Гнездо $\Gamma_0 \subset \Gamma$ назовем граничным, если ему принадлежит лишь одна разбивающая вершина. Количество таких гнезд обозначим через $\mu(\Gamma)$. Остальные гнезда назовем внутренними (их количество не играет принципиальной роли для дальнейшего). Будем также граф называть графом-гнездом, если он имеет циклы, но не имеет разбивающих вершин.

Если компонента G_i является деревом и примыкает только к одной разбивающей вершине v, то $G_i \setminus \{v\}$ называется ветвью.

На приведенном ниже рисунке имеется три разбивающих вершины и два граничных гнезда; $\mu(\Gamma) = 2$.

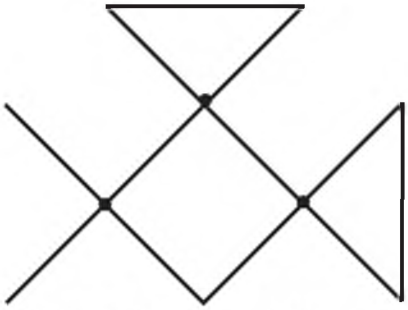

Рис. 1. $\nu(\Gamma) = 3$, $\mu(\Gamma) = 2$

Через $\nu(\Gamma)$ обозначим количество циклов в графе Γ. Это значит, что последовательно удаляя ребра из циклов (не нарушая связности графа), можно за $\nu(\Gamma)$ шагов получить дерево (так называемое остовное дерево), но нельзя сделать этого за меньшее число шагов. На приведенном рисунке $N = 3$. В теории графов $\nu(\Gamma)$ называют цикломатическим числом (см. [5]). Из формулы Эйлера для графов легко следует, что для связных графов

$$\nu(\Gamma) = |V| - |E| + 1\,. \tag{2}$$

Здесь, $|V|$ и $|E|$ – количество вершин и, соответственно, ребер.

Получить оценку размерности F_0 в случае графа с циклами значительно сложнее, чем это было в случае графа-дерева. Мы начнем со следующего утверждения.

Теорема 2. *Пусть* $d_1(\Gamma) = 0$, $\mu(\Gamma) = 0$ *(т.е.* Γ *является графом–гнездом). Тогда* $\dim F_0 \leq \nu(\Gamma) + 1$.

□ Для наглядности будем иллюстрировать наши рассуждения рис. 2. Фиксируем произвольную вершину v_0 кратности k_0. Обозначая $d = \dim F_0(\Gamma)$ мы можем (переходя, как обычно, к линейным комбинациям) из d линейно независимых функций пространства $F_0(\Gamma)$ построить $(d - k_0)$ линейно независимых функций u_i, обращающихся в нуль на звезде $S(v_0)$.

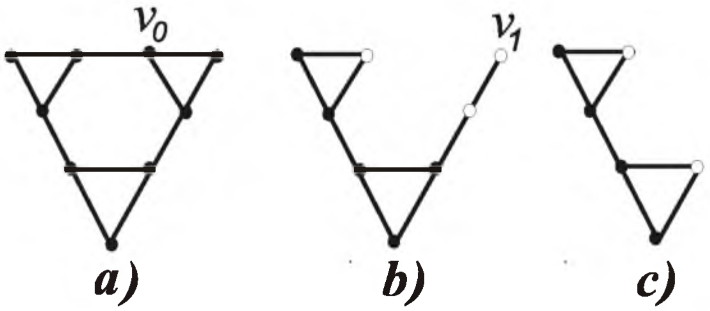

Рис. 2. $d_1(\Gamma) = \mu(\Gamma) = 0$

В графе $\Gamma_1 = \Gamma \setminus S(v_0)$ – он изображен на рисунке $b)$ – могут быть вершины единичной кратности (на рисунке это вершина v_1), но они заведомо дефектные, поскольку являются концевыми вершинами звезды $S(v_0)$, на которой рассматриваемые функции обращаются в нуль тождественно. Все такие вершины лежат на некоторых ветвях (на рисунке такая ветвь оказалась цепочкой), прикрепленных к вершинам, лежащим на некоторых циклах. В силу замечания 3 на таких ветвях функции u_i обращаются в нуль (исключая, возможно, точки прикрепления к циклам). Устраняя эти ветви (опять же исключая точки прикрепления) из Γ_1 мы приходим к графу $\hat{\Gamma}_1$ у которого количество циклов $\nu(\hat{\Gamma}_1)$ равно $\nu(\Gamma) - (k_0 - 1)$.

Если граф $\hat{\Gamma}_1$ пуст, то мы получаем, что $d \leq k_0$. Но из формулы (2) следует $k_0 = \nu(\Gamma) + 1$, и мы приходим к доказываемому утверждению.

Если же граф $\hat{\Gamma}_1$ непуст, то он обязательно имеет циклы. Если он является графом–гнездом, то мы можем повторить предыдущее рассуждение. При этом начальную вершину – обозначим ее v_1 – нужно взять дефектной. Пусть ее кратность равна k_1. Поскольку исходная вершина дефектна, то на первом этапе мы линейными комбинациями строим $d-k_0-(k_1-1)$ линейно независимых функций, обращающихся в нуль на $S(v_1)$. А далее рассуждение проводится без изменений.

Если граф $\hat{\Gamma}_1$ не является графом гнездом, то он обязательно имеет разбивающие вершины и, как следствие, имеет, по крайней мере, одно граничное гнездо χ, прикрепленное к остальной части графа в некоторой разбивающей вершине v. Мы утверждаем, что на этом гнезде имеется по крайней мере одна дефектная вершина v_1 – это будет одна из вершин, примыкающая к выброшенной на первом шаге части $\Gamma\setminus\hat{\Gamma}_1$ – , отличная от v. В самом деле, в противном случае гнездо χ не имело бы контакта с $\Gamma\setminus\hat{\Gamma}_1$, но тогда v была бы разбивающей вершиной исходного графа Γ, что по условию теоремы невозможно. Как и в предыдущем абзаце обозначим через k_1 кратность вершины v_1 и после повторения приведенного там рассуждения получим $d-k_0-(k_1-1)$ линейно независимых функций, обращающихся в нуль на звезде $S(v_1)$. Далее рассуждая как в начале доказательства, придем к графу $\hat{\Gamma}_2$ на котором также найдется неразбивающая дефектная вершина.

В конечном итоге мы придем к пустому графу и, как следствие, получим оценку $d\le k_0+(k_1-1)+\cdots+(k_l-1)$. Остается заметить, что на каждом этапе нашего рассуждения число k_i (степень вершины v_i) равнялось ν_i+1, где ν_i равно количеству циклов, устраненных на i-ом шаге. Но тогда очевидно, что $d\le k_0+(k_1-1)+\cdots+(k_l-1)\le \nu_0+1+\nu_1+\cdots+\nu_l=\nu(\Gamma)+1$. ■

Замечание 4. *Если на графе-гнезде Γ изначально существует дефектная вершина, то из доказательства видно, что* $\dim F_0\le\nu(\Gamma)$.

Некоторый аналог следующей теоремы был анонсирован М.Г. Завгородним и вторым из авторов настоящей статьи (см. [6]). Значительно позже, аналогичная теорема была приведена в [7], но в этих работах рассматривались только непрерывные решения задачи Штурма-Лиувилля при специальных условиях согласования описанных нами в первом примере, иллюстрирующем требование b). Приводимый нами результат не зависит от конкретного типа условий согласования, а потому пригоден для очень широкого их класса, подпадающего только под требования a),b).

Теорема 3. *Если Γ не является графом-гнездом, то* $\dim F_0\le\mu(\Gamma)+\nu(\Gamma)+d_1(\Gamma)-1$.

□ Пусть $d=\dim F_0(\Gamma)$. Доказательство теоремы разбивается на несколько однотипных шагов.

Если $d_1(\Gamma)>0$, то фиксируем одну из вершин v_0 единичной кратности. Из исходного набора d линейно независимых функций линейным комбинированием строим $d-(d_1(\Gamma)-1)$ линейно независимых функций u_i, обращающих в нуль базисные координаты во всех вершинах единичной кратности, кроме v_0. Заметим, что при этом все функции u_i обратятся в нуль на всех ветвях, не содержащих вершину v_0. Обозначим через Γ_1 подграф графа Γ, полученный удалением этих ветвей.

Теперь начинаем «разорять» граничные гнезда. Взяв любое такое гнездо χ_1 (если они есть) и фиксировав на нем вершину v_1, не являющуюся разбивающей, действуя как в доказательстве теоремы 2 (отправляясь от вершины v_1) из набора функций u_i мы можем построить набор $d-(d_1(\Gamma)-1)-(\nu(\chi_1)+1)$ функций из $F_0(\Gamma)$, обращающихся в нуль на χ_1, кроме разбивающей вершины лежащей на нем. Точно также поступим с остальными граничными гнездами. В итоге, получим $d - (d_1(\Gamma) - 1) - (\nu(\chi_1) + 1) - \cdots - (\nu(\chi_{\mu(\Gamma)} + 1)$ линейно независимых функций w_i из пространства $F_0(\Gamma)$, которые обращаются в нуль на всех граничных гнездах. Обозначим через Γ_2 граф, полученный из Γ_1 (или из Γ, если первый шаг отсутствовал в силу $d_1(\Gamma) = 0$) удалением граничных гнезд (исключая точки прикрепления этих гнезд к остальной части графа). Заметим, что новый граф может иметь ветви, отличные от ветви, содержащей v_0, но в этом случае все их вершины единичной кратности дефектны, а потому функции w_i обращаются в нуль на этих ветвей. Обозначая через $\hat{\Gamma}$ граф, полученный из Γ_2 удалением этих ветвей, получим $w_i \equiv 0$ на $\Gamma \setminus \hat{\Gamma}$.

Все, что мы до этого сделали иллюстрирует следующий рисунок.

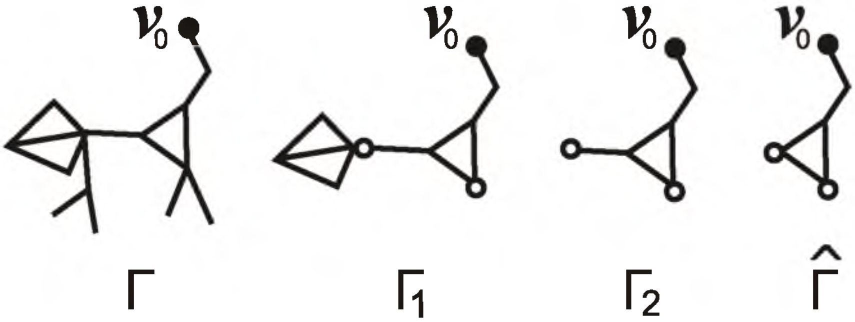

Рис. 3. Индуктивный шаг

Теперь заметим, что для нового графа все рассуждения приведенные выше могут быть повторены. Нужно только заметить, что граничные гнезда графа $\hat{\Gamma}$ заведомо имеют неразбивающие дефектные вершины (на рисунке они изображены пустыми кружками), а ветвей, не содержащих v_0 нет. В силу замечания к предыдущей теореме «разрушение» такого гнезда $\hat{\chi}_i$ приводит к сокращению набора линейно независимых функций на $\nu(\hat{\chi}_i)$ единиц. Поэтому в конечном итоге мы придем к набору линейно независимых функций в количестве $d-(d_1(\Gamma)-1)-(\nu(\chi_1)+1)-\cdots-(\nu(\chi_{\mu(\Gamma)})+1)-\nu(\hat{\chi}_1)-\cdots-\nu(\hat{\chi}_l)$ (l – количество внутренних гнезд), отличных от нуля только на ветви, содержащей v_0. Но на этой ветви только одна вершина (это v_0) может не быть дефектной, а поэтому и на этой ветви все функции, полученные на последнем шаге, обращаются в нуль. Следовательно последняя сумма неположительна. Но поскольку $\nu(\chi_1)+\cdots+\nu(\chi_{\mu(\Gamma)}+\nu(\hat{\chi}_1)+\cdots+\nu(\hat{\chi}_l) = \nu(\Gamma)$, то получаем, наконец, $d = \dim F_0 \le \mu(\Gamma) + \nu(\Gamma) + d_1(\Gamma) - 1$. ■

3. Приложение к задаче Штурма - Лиувилля

В множестве функций $F = C^1_e(\Gamma)$ определим подмножество $C^2_e(\Gamma)$, состоящее из функций, имеющих на каждом ребре непрерывную вторую производную. Через $F_0 \subset C^2_e(\Gamma) \subset F$ обозначим множество решений следующей задачи:

$$[(pu')' - (q - \lambda\rho)u](X) = 0 \quad (X \in e \subset \Gamma)\,, \tag{3}$$

$$l^v_i(u)(v) = 0 \quad (i = 1, \ldots, \deg v) \quad v \in V_0\,, \tag{4}$$

$$l_i^v(u) = 0 \quad (i = 1, 2) \quad v \in \partial\Gamma_0 \,. \tag{5}$$

Через $\partial\Gamma_0$ здесь обозначено множество, называемое далее множеством граничные вершин, состоящее из вершин единичной кратности. Так принято в большинстве работ по уравнениям на графах. Через V_0 обозначим множество остальных – называемых далее внутренними – вершин графа.

Очевидно, что F_0 является линейным подпространством пространства F, поскольку оно определяется линейными условиями.

Здесь коэффициент $p \in C_e^1(\Gamma)$ предполагается неотрицательной функцией, строго положительной на каждом ребре. Коэффициенты q, ρ предполагаются равномерно непрерывными на каждом ребре графа, причем, коэффициент ρ предполагается неотрицательным на $\Gamma_0 = \Gamma \setminus \partial\Gamma_0$ и строго положительным на каждом ребре графа. Строгая положительность на ребре или на графе означает здесь наличие оценки вида $u \geq \epsilon > 0$. Через l_i^v обозначены некоторые линейные функционалы на $C_e^1(\Gamma)$. Мы предполагаем, что функционал, «привязанный» к вершине v, зависит лишь от величин $u(v), u_e(v), u'_e(v)$ $(e \in E(v))$.

Условия 5 принято называть краевыми, а условия 4 – условиями трансмиссии.

В качестве очевидного следствия теоремы 3 получаем следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть множество решений краевой задачи* (3)-(5) *обладает свойствами* $a), b)$. *Тогда геометрические кратности собственных значений этой задачи не превосходят* $d_1(\Gamma) + \nu(\Gamma) + \mu(\Gamma) - 1$.

Приведем конкретный пример, имеющий целью показать, с одной стороны, что проверка условий $a), b)$ не представляет большого труда, а с другой – проиллюстрировать общность получаемых результатов.

Пусть, например, на границе требуется непрерывное выполнение условия Дирихле (т.е. $u(v) = u_e(v) = 0$). Очевидно тогда, что равенство координаты $x_2 = u'(v) = 0$ влечет равенство нулю всех остальных (поскольку равенство их нулю включено в определение F_0). Иными словами координата x_2 является базисной.

Пусть далее, во внутренних вершинах условия трансмиссии имеют вид:

$$(-1)^{\sigma(i)} u'_i(v) + \sum_{j \neq i} c_{ij}(u_j(v) - u_i(v)) = 0 \quad (i = 1, \ldots, \deg v) \,, \tag{6}$$

где $u_i(v)$ обозначает $u_{e_i}(v)$ и аналогично $u'_i(v)$ означает $u'_{e_i}(v)$; для простоты предполагается, что к вершине v примыкают подряд занумерованные ребра $e_1, \ldots, e_m$. Число $\sigma(i)$ равно нулю, если ребро ориентировано (напомним, что ориентация фиксировалась при определении производной на ребре), и $\sigma(i) = 1$ в противном случае.

Подобная задача возникает при моделировании малых поперечных деформаций струнной сетки, связанной в виде графа. В местах стыковки (внутренних вершинах графа) не предполагается, что каждая струна является продолжением другой. Вместо этого, считается, что некоторые струны попарно соединены пружинками, которые могут скользить по вертикальной проволоке без трения. Из физической постановки следует, что матрица $[c_{ij}]$ должна быть симметрична, а число c_{ij} – жесткость пружины, соединяющей i-ю и j-ю струны – должно быть неотрицательно.

Значение функции u в вершине v в данной задаче несущественно, но мы положим его равным нулю с тем, чтобы выполнялось условие b). То, что это условие при данном соглашении выполняется, легко проверяется. В самом деле, в качестве базисного набора координат можно взять, например, $x_1, x_3, \ldots, x_{2m-3}, x_{2m}$. Действительно, из m-го уравнения тогда получим $x_{2m-1} = u_m(v) = 0$. Но тогда из остальных уравнений немедленно следует $x_2 = \ldots, x_{2m-2} = 0$. Последняя координата – x_{2m+1} равна нулю, потому что мы ее так определили. Дополняемость любой пары x_{2k-1}, x_{2k} проверяется столь же просто.

Условие a) следует из того, что если $u_i(v) = u_i'(v) = 0$, то в силу того, что u является решением обыкновенного линейного дифференциального уравнения (3) на ребре e_i, то $u_i \equiv 0$ на этом ребре.

Как видим, симметричность матрицы $[c_{ij}]$ и неотрицательность оказались непринципиальными.

Во всех известных нам физически осмысленных типах стыковок струн во внутренних вершинах, условие a),b) оказались выполненными для решений соответствующих краевых задач.

Вместо условий Дирихле на границе тоже можно рассматривать другие типы условий.

Литература

1. Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л. и др. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / М.:Физматлит, 2004. – 272 с.
2. Kuchment P. Quantum graphs I. Some basic structures // Waves in Random media. – 2004. – 14. – P.107-128.
3. Kuchment P., Quantum graphs II. Some spectral properties of quantum and combinatorial graphs // J.Phys. A. – 2005. – 38. – P.4887-4900.
4. Пенкин О.М., Покорный Ю.В., Провоторова Е.Н. Об одной векторной краевой задаче // Краевые задачи / Пермь, 1983. – С.64-70.
5. Татт У. Теория графов / М.:Мир, 1988 – 424 с.
6. Завгородний М.Г., Пенкин О.М., Об оценках кратностей собственных значений / Современные методы в теории краевых задач, 1992 / Тез. докладов, Воронеж: ВГУ, 1992. – С.46.
7. Lubary J.A. On the geometric and algebraic multiplicities for eigenvalue problems on graphs / Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics / Marcel Dekker, 2001, 219. – P.135-146.
8. Пенкин О.М., Покорный Ю.В., О некоторых качественных свойствах уравнений на одномерном клеточном комплексе // Матем. заметки. – 1996. – 64;5. – С.777-780.
9. Покорный Ю.В., Пенкин О.М. Теоремы Штурма для уравнений на графах // ДАН СССР. – 1989. – 309;6. – С.1306-1308.

ABOUT EIGENVALUE MULTIPLICITY IN STURM-LI0UVILLE's PROBLEM ON GRAPHS

*Adel T. Diab, **O.M. Penkin, **V.L. Pryadiev

*Ain Shams University,
Cairo, Egypt, e-mail: Adeldiab80@hotmail.com,

**Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: penkin@bsu.edu.ru, pryadiev@bsu.edu.ru

Abstract. Some special linear spaces on graphs are defined and estimates of their dimensions are proved. Moreover, some new results about geometric multiplicity of eigenvalues connected with Sturm-Liouville's problem on the graph are obtained.

Key words: Sturm-Liouville's problem, spectrum, graph.