УДК 517.927

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ МЕРЫ В ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СТИЛТЬЕСОВОЙ СТРУНЫ

Н.Н. Рябцева, А.С. Харченко

Белгородский университет кооперации, экономики и права,
ул. Садовая, 116-а, Белгород, 308000, Россия, e-mail: riabceva-nn@ yandex.ru,
rkharchenko-as@yandex.ru

Аннотация. Исследуется вариационная задача стилтьесовой струны, в которой, ввиду невозможности пользования методов теории распределений, применяется преобразование меры. Это преобразование существенно при построении аналога условия Якоби и анализе вариационных условий второго порядка.

Ключевые слова: дифференцирование по мере, интегральный функционал, уравнение Эйлера, вторая вариация, уравнение Якоби, теорема Якоби.

1. Будем рассматривать поперечные деформации в одной плоскости невесомой упругой нити с жестко закрепленными концами, натянутой вдоль отрезка $[0, l]$ с натяжением $p(x) > 0$. Рассмотрим ее функционал энергии, зависящий от отклонение $u(x)$ точки x от положения равновесия под влиянием внешней силы, общую величину которой слева от точки x обозначим через $F(x)$. Так как на элемент $[x, x+dx]$ струны действует сила $dF(x) = F(x+dx) - F(x)$, совершающая работу udF при смещении элемента $[x, x+dx]$ на $u(x)$, то для изменения энергии в результате перемещения, вызванного действием силы F, равно $\int_0^l u\,dF$. Поэтому функционал имеет вид

$$\Phi(u) = \int_0^l \frac{pu'^2}{2}\,dx + \int_0^l \frac{u^2}{2}\,dQ - \int_0^l u\,dF\,, \tag{1}$$

где $Q(x)$ определяет распределение упругой реакции внешней среды.

Функционал (1) представляет собой частный случай функционала

$$\Phi(u) = \int_0^l \frac{pu'^2}{2}\,dx + \int_0^l Ruu'\,dx + \int_0^l \frac{u^2}{2}\,dS + \int_0^l u\,dM \tag{2}$$

при $R = 0$, $S = Q$, $M = -F$.

Всюду далее p, R, S и M – функции ограниченной вариации на $[0, l]$, причем $\inf\limits_{[0,l]} p > 0$. В этом случае функционал (2) определен на множестве E абсолютно непрерывных функций, удовлетворяющих условиям $u(0) = A$, $u(l) = B$, и производные которых имеют на $[0; l]$ ограниченную вариацию. Интегралы понимаются по Стилтьесу.

2. Согласно принципу Лагранжа-Гамильтона, реальная форма струны $u_0(x)$ должна являться минималью функционала (2). На $u_0(x)$ первая вариация должна быть нулевой, что приводит к равенству

$$\delta\Phi(u_0)h = \int_0^l pu_0'\,dh - \int_0^l u_0 h\,dR + \int_0^l u_0 h\,dS + \int_0^l h\,dM = 0\,, \tag{3}$$

где h – произвольные функции из $E_0 = \big\{h \in E \,\big|\, h(0) = 0 = h(l)\big\}$. Равенство (3) нам позволит получить аналог уравнения Эйлера. Методами, аналогичными [1, 2], на основе подхода, изложенного в [3, гл. 7] и [4], доказывается следующая теорема о преобразовании меры.

Теорема 1. *Пусть λ и μ – меры Лебега-Стилтьеса (т. е. λ п μ порождены функциями ограниченной вариации), причем μ является абсолютно непрерывной, п пусть функции f и $\dfrac{d\mu}{d\lambda}$ непрерывны на $[0,l]$, где $\dfrac{d\mu}{d\lambda}$ означает производную Радона-Нпкодпма. Тогда для любого μ-измеримого множества A*

$$\int_A f\,d\mu = \int_A f\frac{d\mu}{d\lambda}\,d\lambda\,.$$

Прежде чем воспользоваться этим результатом для интеграла с переменным верхним пределом $\displaystyle\int_0^x \varphi\,d\mu$, где функция $\varphi(x)$ непрерывна на отрезке $[0,l]$, а порождающая меру μ функция $\mu(x)$ имеет ограниченную вариацию на $[0,l]$ и непрерывна на концах, дадим необходимые пояснения относительно множества, пробегаемого переменной x. В самом деле, если ξ – точка разрыва функции $\mu(x)$, то интеграл $\displaystyle\int_0^\xi \varphi\,d\mu$ не имеет смысла. Имеется ввиду следующая конструкция. Обозначим через $S(\mu)$ множество точек разрыва функции $\mu(x)$. Каждую точку $\xi \in S(\mu)$ заменим парой $\{\xi-0;\xi+0\}$ и обозначим полученное множество $\overline{[0,l]}_\mu$. Тогда для любой точки $x \in \overline{[0,l]}_\mu$ интеграл $\displaystyle\int_0^x \varphi\,d\mu$ однозначно определен. Причем, если ξ – точка разрыва $\mu(x)$, то $\displaystyle\int_0^{\xi-0} \varphi\,d\mu$ совпадает с интегралом Лебега-Стилтьеса по полуинтервалу $\displaystyle\int_{[0,\xi)} \varphi\,d\mu$, а $\displaystyle\int_0^{\xi+0} \varphi\,d\mu = \int_{[0,\xi]} \varphi\,d\mu$. Теперь уже стандартными рассуждениями устанавливается следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $\omega(x) = \displaystyle\int_0^x \varphi\,d\mu + const$, где $x \in \overline{[0,l]}_\mu$, функция $\varphi(x)$ непрерывна на отрезке $[0,l]$, а $\mu(x)$ имеет ограниченную вариацию на $[0,l]$ п непрерывна в точках $x = 0$ п $x = l$. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[0,l]$. Тогда для всех $x \in \overline{[0,l]}_\mu$ справедливо равенство*

$$\int_0^x f\,d\omega = \int_0^x f\varphi\,d\mu\,.$$

3. Опираясь на теорему 2, мы можем выписать для функционала (2) аналог уравнения Эйлера. Обозначим

$$g(x) = \int_0^x u_0\, dR, \quad \varphi(x) = \int_0^x u_0\, dS\,.$$

Согласно теореме 2 будем иметь

$$\int_0^l h\, dg = \int_0^l hu_0\, dR, \quad \int_0^l h\, d\varphi = \int_0^l hu_0\, dS\,.$$

Проинтегрировав второе, третье и четвертое слагаемые в (3) по частям, перепишем равенство (3) в виде

$$\int_0^l \left(p(x)u_0'(x) + \int_0^x u\, dR - \int_0^x u\, dS - M(x) \right)\, dh(x) = 0\,.$$

Из произвольности выбора функции $h \in E_0$ следует, что реальная форма струны $u_0(x)$ должна удовлетворять уравнению

$$p(x)u'(x) + \int_0^x u\, dR - \int_0^x u\, dS - M(x) = p(0)u'(0) - M(0)\,. \tag{4}$$

Полученное уравнение (4) является уравнением Эйлера. Приведем необходимые пояснения относительно этого уравнения. Обозначим через $\Delta z(x)$ скачок функции z в точке x, т.е. $\Delta z(x) = z(x+0) - z(x-0)$. Пусть S_Z – множество всех точек, в которых хотя бы одна из функций $p(x)$, $R(x)$, $S(x)$ и $M(x)$ имеет ненулевой простой скачок, то есть имеет несовпадающие левый и правый пределы. Заметим, что производная $u'(x)$ существует во всех $x \notin S_Z$. Если же $\xi \in S_Z$, то существуют левая и правая производные $u'_-(\xi)$ и $u'_+(\xi)$. Выбросив S_Z из $[0;l]$, заменим каждую точку $\xi \in S_Z$ парой символов $\{\xi - 0,\ \xi + 0\}$ и обозначим полученное множество $[0;l]_Z$. Тогда уравнение (4) на множестве $[0;l]_Z$ однозначно определено. Из (4) для всякой $\xi \in S_Z$ вытекает справедливость равенства

$$p(\xi+0)u'(\xi+0) - p(\xi-0)u'(\xi-0) + u(\xi)\Delta R(\xi) - u(\xi)\Delta S(\xi) - \Delta M(\xi) = 0\,,$$

где $p(\xi+0) = \lim\limits_{x\to\xi+0} p(x)$, $p(\xi-0) = \lim\limits_{x\to\xi-0} p(x)$, $u'(\xi+0) = u'_+(\xi)$, $u'(\xi-0) = u'_-(\xi)$.

4. Вторая вариация функционала (2) является квадратичным функционалом

$$I(h) = \int_0^l ph'^2\, dx - \int_0^l h^2\, dR + \int_0^l h^2\, dS\,, \tag{5}$$

где h – произвольные функции из E_0. Заметим: если функция $Q(x) = S(x) - R(x)$ монотонно не убывает на $[0,l]$, то функционал $I(h)$ неотрицателен для всех $h \in E_0$.

Обратимся к общему случаю, когда $Q(x)$ – произвольная функция ограниченной вариации. Выпишем условие, достаточное для неотрицательности (5). Перепишем функционал (5) следующим образом:

$$\int_0^l (ph'^2 + 2phh'z + pz^2h^2 - 2phh'z - pz^2h^2)\,dx + \int_0^l h^2\,dQ =$$

$$= \int_0^l p(h' + zh)^2\,dx - \int_0^l (2phh'z + pz^2h^2)\,dx + \int_0^l h^2\,dQ\,.$$

где $z(x)$ – некоторая допустимая функция, определяемая ниже. Для неотрицательности $I(h)$ достаточно подобрать такую функцию ограниченной вариации $z(x)$, чтобы для всех $h \in E_0$

$$\int_0^l h^2\,dQ - \int_0^l (2phh'z + pz^2h^2)\,dx = 0\,. \tag{6}$$

Учитывая, что $d(h^2) = 2hh'\,dx$, и интегрируя по частям, перепишем равенство (6) в виде

$$\int_0^l h^2(x)\,d\left(Q(x) + p(x)z(x) - \int_0^x p(s)z^2(s)\,ds\right) = 0\,.$$

Таким образом, для неотрицательности $I(h)$ достаточно, чтобы

$$Q(x) + p(x)z(x) - \int_0^x p(s)z^2(s)\,ds = \mathrm{const}\,. \tag{7}$$

Выпишем условие, достаточное для существования функции $z(x)$, удовлетворяющей (7). Для этого будем искать $z(x)$ в виде $z(x) = -\dfrac{\omega'(x)}{\omega(x)}$, где $\omega(x)$ – строго положительная и абсолютно непрерывная на $[0,l]$ функция, такая, что $\omega'(x)$ является функцией ограниченной вариации. Подставив это представление в (7), получим равенство

$$Q(x) - \int_0^x \frac{1}{\omega(s)}\,d(p(s)\omega'(s)) = \mathrm{const}\,. \tag{8}$$

Применим к (8) теорему 2, взяв в качестве функции $f(x)$ (из теоремы 2) функцию $\omega(x)$. Получим, что (8) эквивалентно равенству

$$\int_0^x \omega\,dQ = \int_0^x \frac{1}{\omega}\cdot\omega\,d(p\omega')\,,$$

или

$$p(x)\omega'(x) - \int_0^x \omega\,dQ = \mathrm{const}\,.$$

Следовательно, для неотрицательности $I(h)$ достаточно, чтобы уравнение

$$p(x)u'(x) - \int_0^x u\,dQ = \mathrm{const} \tag{9}$$

имело решение без нулей в классе абсолютно непрерывных функций, производные которых являются функциями ограниченной вариации.

Итак, нами доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть уравнение (9) имеет решение без нулей на* $[0, l]$. *Тогда для любого* $h \in E_0$ *выполнено* $I(h) \geqslant 0$.

Уравнение (9) является аналогом уравнения Якоби.

Будем называть уравнение (9) неосциллирующим на $[0, l]$, если всякое его нетривиальное решение имеет на $[0, l]$ не более одного нуля. Заметим, что для отсутствия осцилляций (9), достаточно, чтобы функция $Q(x)$ не убывала.

Далее нам потребуется следующий аналог теоремы Штурма о перемежаемости нулей, полученный в [3, гл. 7].

Теорема 4. *Для любых двух линейно независимых решений* φ_1, φ_2 *уравнения (9) их нули в* $[0, l]$ *перемежаются, то есть между двумя соседними нулями* φ_1 *расположен по крайней мере один нуль* φ_2, *и наоборот.*

Теорема 5. *Следующие свойства эквивалентны:*
1) уравнение (9) имеет решение без нулей на $[0, l]$;
2) решение $u(x)$ *уравнения (9) при условиях* $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$ *не имеет других нулей;*
3) уравнение (9) не осциллирует на $[0, l]$.

□ Докажем цепочку следствий 1) ⇒ 2) ⇒ 3) ⇒ 1).

1) ⇒ 2). Пусть $\varphi(x)$ – решение уравнения (9) без нулей на $[0, l]$. Если решение $u(x)$ из 2) обращается в нуль в точке $\eta \in (0, l]$, то, по теореме 4, $\varphi(x)$ обязано иметь на $(0, \eta)$ нуль, что невозможно.

2) ⇒ 3). Если существует решение $v(x)$, которое в точках η_1 и η_2 обращается в нуль, то, по теореме 4, функция $u(x)$ из 2) обязана иметь нуль на $(\eta_1, \eta_2]$, что невозможно.

3) ⇒ 1). Пусть $u_1(x)$ – решение уравнения (9), удовлетворяющее условиям $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$, а $u_2(x)$ – решение уравнения (9), удовлетворяющее условиям $u(l) = 0$, $u'(l) = -1$. Тогда $u(x) = u_1(x) + u_2(x)$ – решение уравнения (9) без нулей на $[0, l]$ (строго положительное). ■

Для функционала (5) справедлив следующий аналог усиленной теоремы Якоби.

Теорема 6. *Пусть уравнение (9) не осциллирует на* $[0, l]$. *Тогда существует число* $\alpha_0 > 0$ *такое, что для всех* $h \in E_0$

$$I(h) \geqslant \alpha_0 \cdot \int_0^l h'^2\, dx\,.$$

□ Достаточно рассмотреть функционал

$$I_\alpha(h) = \int_0^l (p - \alpha) h'^2\, dx + \int_0^l h^2\, dQ$$

и заметить, что при достаточно малых α для $I_\alpha(h)$ выполнены те же условия, что и для $I(h)$. Единственная тонкость состоит в необходимости доказать корректность задачи Коши для уравнения (9). Но эта корректность установлена в [3, гл. 7]. ■

Аналогом классической теоремы Якоби оказывается следующая теорема.

Теорема 7. *Пусть u_0 – допустимое решение уравнения (4), а уравнение (9) не осциллирует. Тогда u_0 дает минимум функционала (2) на множестве E_0.*

□ Пусть u_0 удовлетворяет уравнению (4) и условиям $u(0) = A$, $u(l) = B$. Достаточно показать, что $\Phi(u_0 + h) - \Phi(u_0) \geqslant 0$ для любой $h \in E_0$.

После несложных преобразований получим:

$$\begin{gathered}\Phi(u_0+h)-\Phi(u_0)=\int_0^l pu_0'\,dh-\int_0^l u_0h\,dR+\int_0^l u_0h\,dS- \\ -\int_0^l M\,dh+\frac{1}{2}\left(\int_0^l ph'^2\,dx+\int_0^l h^2\,dS-\int_0^l h^2\,dR\right).\end{gathered} \tag{10}$$

Пусть

$$g(x)=\int_0^x u_0\,dR, \quad \psi(x)=\int_0^x u_0\,dS\,.$$

Тогда

$$\int_0^l u_0h\,dR=\int_0^l h\,dg=(hg)\Big|_0^l-\int_0^l g\,dh\,, \tag{11}$$

$$\int_0^l u_0h\,dS=\int_0^l h\,d\psi=(h\psi)\Big|_0^l-\int_0^l \psi\,dh\,. \tag{12}$$

Внеинтегральные члены в (11) и (12) равны нулю, так как $h \in E_0$. В результате (10) примет вид

$$\begin{gathered}\Phi(u_0+h)-\Phi(u_0)=\int_0^l\left(pu_0'+\int_0^x u_0\,dR-\int_0^x u_0\,dS-M\right)dh+ \\ +\frac{1}{2}\left(\int_0^l ph'^2\,dx+\int_0^l h^2\,dS-\int_0^l h^2\,dR\right).\end{gathered}$$

Выражение, стоящее под знаком первого интеграла, равно нулю в силу того, что u_0 удовлетворяет уравнению (4). Второе слагаемое неотрицательно в силу теоремы 3. ■

Литература

1. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. I. Общая теория / М.: ИЛ, 1962. – 896 с.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. - М.: Наука, 1976. – 544 с.
3. Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 272 с.
4. Покорный Ю.В. Интеграл Стильтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях // Докл. РАН. – 1999. – 364;2. – С.167–169.

ON MEASURE TRANSFORMATION IN VARIATIONAL PROBLEM FOR STIELTJES' STRING

N.N. Riabceva, A.S. Kharchenko

Belgorod university of cooperation, economy and the right,
Sadovaya st., 116-a, Belgorod, 308000, Russia, e-mail: e-mail: riabceva-nn@ yandex.ru,
rkharchenko-as@yandex.ru

Abstract. The variation problem of Stieltjes' string type is studied. Due to using impossibility of distribution theory methods the measure transformation is applied. This transformation is essential when the analog of Jacobi's condition is constructed for analysis of variation conditions of second order.

Key words: differentiation on measure, integral functional, Euler's equation, second variation, Jacobi's equation, Jacobi's theorem.