УДК 517.968

ОБ УРАВНЕНИЯХ ВОЛЬТЕРРА В ПРОСТРАНСТВЕ ЧАСТИЧНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ С ОПЕРАТОРАМИ ЧАСТИЧНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

И.В. Барышева, А.С. Калитвин

Липецкий государственный педагогический университет,
ул. Ленина 42, Липецк, 398020, Россия, e-mail:barysheva_iv@mail.ru

Аннотация. Получены условия обратимости линейных уравнений Вольтерра с интегралами частного вида в пространстве частично дифференцируемых функций. Дана оценка приближённого решения таких уравнений. Показано, что однородное линейное интегральное уравнение Вольтерра второго рода с интегралами, рассматриваемого типа, определяющимися непрерывными ядрами, имеет только нулевое суммируемое решение, но может иметь несуммируемые решения.

Ключевые слова: интегро-дифференциальные уравнения, уравнения Вольтерра, пространства частично дифференцируемых функций, спектральный радиус, резольвентные ядра.

1. Введение

В работе изучается интегральное уравнение

$$\lambda x = Kx + f\,, \tag{1}$$

где оператор K определяется равенством

$$\begin{aligned}(Kx)(t,s) = \int_0^t l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau \, + \\ + \int_0^s m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma \, + \int_0^t\int_0^1 n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\sigma d\tau\,,\end{aligned} \tag{2}$$

в котором $(t,s) \in D = [0,1] \times [0,1]$, $0 \le \tau \le t$, $0 \le \sigma \le s$, $l(t,s,\tau)$, $m(t,s,\sigma)$ и $n(t,s,\tau,\sigma)$ – заданные функции и интегралы понимаются в смысле Лебега.

Наличие в правой части равенства (2) интегралов, в которых функция $x(t,s)$ интегрируется по части переменных (одномерных частных интегралов), приводит к принципиальному отличию оператора Вольтерра с частными интегралами K от обычных интегральных операторов Вольтерра

$$(Ax)(t) = \int_0^t l(t,\tau)x(\tau)d\tau, \quad (Bx)(t,s) = \int_0^t\int_0^1 n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\sigma d\tau\,.$$

Например, оператор K с частными интегралами и ненулевыми непрерывными ядрами l, m, n не является компактным ни в пространстве непрерывных по совокупности переменных функций, ни в пространствах $L^p(D)$ $(1 \le p \le \infty)$, тогда как интегральные операторы Вольтерра A и B с непрерывными ядрами компактны в таких же пространствах функций одной и двух переменных соответственно.

Линейные операторы Вольтерра с одномерными частными интегралами исследовались в [1,2], в [3] изучались линейные и нелинейные операторы Вольтерра с одномерными и многомерными частными интегралами. Для изучаемых в этих работах линейных операторов получены условия обращения в нуль их спектрального радиуса. При этом линейные операторы Вольтерра с частными интегралами рассматриваются в пространствах непрерывных функций, в пространствах $L^p(D)$ $(1 \le p \le \infty)$, в банаховых идеальных пространствах (БИП) и в других пространствах, а линейные интегральные уравнения с такими операторами имеют единственное решение в рассматриваемых пространствах.

Приводимый ниже пример показывает, что, наряду с решениями в выбранных пространствах, уравнения Вольтерра с частными интегралами вида (1) могут иметь решения, которые не принадлежат таким пространствам. Поэтому выбор заранее пространства, в котором отыскиваются решения уравнений Вольтерра с частными интегралами, может привести к потере решений.

Пусть заданные функции $l(t,s,\tau)$, $m(t,s,\sigma)$ и $n(t,s,\tau,\sigma)$ непрерывны. При этом условии оператор K непрерывен в пространстве $C(D)$ — непрерывных на D функций и в пространствах $L^p(D)$ $(1 \le p \le \infty)$, а его спектральный радиус равен нулю: $r(K) = 0$ [1,2]. Поэтому при каждом $\lambda \ne 0$ и любой функции $f \in C(D)$ уравнение (1) имеет единственное непрерывное решение.

Следующий пример показывает, что уравнение (1) может иметь несуммируемые решения.

Пример. Пусть в уравнении (1) $\lambda = 2$, $f(t,s) = 0$ на D, $l(t,s,\tau) = a(t,\tau)$, $m(t,s,\sigma) = 0$, $n(t,s,\tau,\sigma) = a(t,\tau)$, где

$$a(t,\tau) = \begin{cases} 0 & , \text{ если } t = 0, \\ \tau e^{1/t^2-1} & , \text{ если } 0 \le \tau \le t e^{1-1/t^2}, \\ t & , \text{ если } t e^{1-1/t^2} \le \tau \le 1\,. \end{cases}$$

Непосредственно проверяется непрерывность функции $a(t,\tau)$. Тогда $r(K) = 0$, если оператор K рассматривается в $C(D)$ или в $L^p(D)$ $(1 \le p \le \infty)$ [1,2]. Поэтому уравнение $2x = Kx$ имеет в $C(D)$ и в $L^p(D)$ $(1 \le p \le \infty)$ только нулевое решение.

Функция

$$y(t) = \begin{cases} 0 & , \text{ если } t = 0, \\ t^{-1} & , \text{ если } 0 < t \le 1, \end{cases}$$

является решением уравнения [4, с. 14]

$$y(t) = \int_0^t a(t,\tau)y(\tau)d\tau$$

и не суммируема. Легко убедиться, что функция $x(t,s) = y(t)$ есть несуммируемое решение уравнения $2x = Kx$, однако $x \in L^p(D)$ при $0 < p < 1$.

В приведённом примере оператор K не действует в пространстве $L^p(D)$ при $0 < p < 1$, но он действует в некотором его нетривиальном подпространстве, при этом $r(K) \neq 0$.

Действительно, пусть u_0 — некоторая положительная функция из $X = L^p(D)$ $(0 < p < 1)$, т.е. $u_0 \in X$ и $u_0(t,s) > 0$ почти всюду на D. Через E_{u_0} обозначим множество функций из X, удовлетворяющих неравенству $|x(t,s)| \leq \alpha u_0(t,s)$, где постоянная α зависит от x. E_{u_0} является банаховым идеальным пространством [4] относительно нормы

$$\|x\|_{E_{u_0}} = \inf\left\{\alpha : |x(t,s)| \leq \alpha u_0(t,s)\,, \quad x \in L^p(D),\ 0 < p < 1\right\}.$$

Положим $u_0(t,s) = y(t)$. Тогда оператор K действует, следовательно, и непрерывен в E_{u_0} [1], причём его спектральный радиус $r(K) \geq 2$, а пространства $C(D)$ и $L^p(D)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ не вложены в E_{u_0}. Поэтому для нахождения множества решений уравнения (1) полезно использовать более широкие пространства, например, сумму пространств $G = L^p(D)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ и $H = E_{u_0}$.

Отметим, что под суммой Z БИП G и H с носителем D [1,5] понимается множество функций z, представимых в виде суммы $g + h$, где $g \in G$, а $h \in H$. При этом Z является БИП [5] относительно нормы

$$\|z\| = \inf\left\{\|g\|_G + \|h\|_H :\ z = g + h,\ g \in G,\ h \in H\right\}.$$

Легко видеть, что оператор

$$(Kx)(t,s) = \int_0^t a(t,\tau)x(\tau,s)d\tau + \int_0^t\int_0^1 a(t,\tau)x(\tau,\sigma)d\sigma d\tau \tag{3}$$

действует в пространстве $Z = G + H$, если $G = L^p(D)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ и $H = E_{u_0}$, при этом его спектральный радиус удовлетворяет неравенству $r(K) \geq 2$, а уравнение $2x = Kx + f$ с $f \in C(D)$ имеет в Z единственное непрерывное решение x_0 и бесконечное множество решений вида

$$x(t,s) = x_0(t,s) + cy(t),$$

где c — произвольная постоянная.

Интегральные операторы Вольтерра A и B с непрерывными ядрами $l(t,s,\tau) = a(t,\tau)$ и $n(t,s,\tau,\sigma) = a(t,\tau)$ компактны в $C([0,1])$, $L^p([0,1])$ $(1 \leq p \leq \infty)$ и в $C(D)$, $L^p(D)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ соответственно. Существуют примеры некомпактных в этих пространствах интегральных операторов Вольтерра A и B, для которых $r(A) = r(B) = 0$.

Различные условия обращения в ноль спектрального радиуса линейного оператора Вольтерра с частными интегралами (2) можно найти в [1-3].

2. О разрешимости и приближённом решении уравнения Вольтерра с частными интегралами в пространстве частично дифференцируемых функций

К интегральным уравнениям Вольтерра с частными интегралами приводятся задачи теории упругих оболочек [6], дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений с частными производными [6-9] и некоторые другие задачи [6,8]. Постановка ряда таких задач приводит к необходимости изучения понимаемых в различных смыслах решений соответствующих интегральных уравнений. В частности, для интегрального уравнения Вольтерра с частными интегралами теории упругих оболочек рассматриваются голоморфные решения [6].

Изучение понимаемых в классическом смысле решений интегро-дифференциальных уравнений Барбашина приводит к изучению непрерывных на D вместе со своей частной производной по одной из переменных решений уравнений Вольтерра с частными интегралами.

Действительно, рассмотрим линейное интегро-дифференциальное уравнение Барбашина

$$\frac{\partial x(t,s)}{\partial t} = c(t,s)x(t,s) + \int_0^1 k(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma + h(t,s)\,, \tag{4}$$

где $t, s, \sigma \in [0,1]$, $c(t,s)$, $k(t,s,\sigma)$ и $h(t,s)$ – заданные непрерывные функции, а неизвестная функция $x(t,s)$ непрерывна вместе со своей частной производной по переменной t на $D = [0,1]\times[0,1]$. Это уравнение изучалось в книге [9]. Пусть функция $x(t,s)$ удовлетворяет начальному условию $x(t_0,s) = x_0(s)$, где $t_0 \in [0,1]$ и $x_0(s)$ – заданная непрерывная функция. Проинтегрировав (4) по отрезку $[t_0,t] \subset [0,1]$, получим уравнение

$$x(t,s) = \int_{t_0}^t c(\tau,s)x(\tau,s)d\tau \; + \int_{t_0}^t\!\!\int_0^1 k(\tau,s,\sigma)x(\tau,\sigma)d\sigma d\tau + g(t,s)\,, \tag{5}$$

где $g(t,s) = \displaystyle\int_{t_0}^t h(\tau,s)d\tau + x_0(s)$. Уравнение (4) с начальным условием $x(t_0,s) = x_0(s)$, очевидно, равносильно уравнению (5), если под решением этих уравнений понимается непрерывная на D вместе со своей частной производной по t функция $x(t,s)$.

Уравнение (5) представляет собой частный случай уравнения Вольтерра с частными интегралами (1). В связи с этим и приведённым выше примером представляет интерес рассмотрение уравнения (1) в пространстве частично дифференцируемых функций двух переменных, т.е. в пространстве непрерывных на D вместе со своей частной производной по t функций $x(t,s)$.

Через U обозначим множество функций $x(t,s)$, непрерывных на D вместе с частной производной по переменной t. U – банахово пространство относительно нормы

$$\|x\|_U = \sup_{s,t}\sum_{k=0}^{1}\left|\frac{\partial^k x(t,s)}{\partial t^k}\right| = \sup_s \sup_t \sum_{k=0}^{1}\left|\frac{\partial^k x(t,s)}{\partial t^k}\right| .$$

Очевидно неравенство $\|x\|_{C(D)} \le \|x\|_U \;\; (x \in U)$, которое показывает, что пространство U непрерывно вложено в $C(D)$.

Теорема 1. *Пусть заданные в уравнении (1) функции $l(t,s,\tau)$, $m(t,s,\sigma)$ и $n(t,s,\tau,\sigma)$ непрерывны вместе со своими частными производными по t. Тогда для любой функции $f \in U$ уравнение (1) имеет в U единственное решение.*

□ При сделанных предположениях относительно ядер операторы

$$(Lx)(t,s) = \int_0^t l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau\,, \quad (Mx)(t,s) = \int_0^s m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma\,,$$

$$(Nx)(t,s) = \int_0^t \int_0^1 n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma$$

и $K = L + M + N$ действуют в пространстве U [10, 11], а также в пространстве $C(D)$, и их спектральные радиусы равны нулю, если они рассматриваются в $C(D)$ [1-3]. Тогда при любой непрерывной функции f уравнение (1) имеет единственное решение

$$\begin{aligned} x(t,s) = f(t,s) + \int_0^t \varphi(t,s,\tau)f(\tau,s)d\tau + \int_0^s \psi(t,s,\sigma)f(t,\sigma)d\sigma\, + \\ + \int_0^t \int_0^1 \phi(t,s,\tau,\sigma)f(\tau,\sigma)d\tau d\sigma\,, \end{aligned} \tag{6}$$

где резольвентные ядра φ, ψ, ϕ определяются равенствами [2,3]

$$\begin{aligned} \varphi(t,s,\tau) = \sum_{j=1}^{\infty} l^{(j)}(t,s,\tau)\,, \quad \psi(t,s,\sigma) = \sum_{j=1}^{\infty} m^{(j)}(t,s,\sigma)\,, \\ \phi(t,s,\tau,\sigma) = \sum_{j=1}^{\infty} n^{(j)}(t,s,\tau,\sigma)\,, \end{aligned} \tag{7}$$

$$l^{(1)}(t,s,\tau) = l(t,s,\tau)\,, \qquad l^{(j)}(t,s,\tau) = \int_\tau^t l(t,s,u)l^{(j-1)}(u,s,\tau)du\,,$$

$$m^{(1)}(t,s,\sigma) = m(t,s,\sigma)\,, \quad m^{(j)}(t,s,\sigma) = \int_\sigma^s m(t,s,v)m^{(j-1)}(t,v,\sigma)dv\,,$$

$$n^{(1)}(t,s,\tau,\sigma) = n(t,s,\tau,\sigma)\,,$$

$$\begin{aligned} n^{(j)}(t,s,\tau,\sigma) = l(t,s,\tau)m^{(j-1)}(\tau,s,\sigma) + m(t,s,\sigma)l^{(j-1)}(t,\sigma,\tau) + \\ + \int_\tau^t l(t,s,u)n^{(j-1)}(u,s,\tau,\sigma)du\, + \\ + \int_0^1 m(t,s,v)n^{(j-1)}(t,v,\tau,\sigma)dv + \int_\tau^t n(t,s,u,\sigma)l^{(j-1)}(u,\sigma,\tau)du + \end{aligned}$$

$$+\int_0^1 n(t,s,\tau,v)m^{(j-1)}(\tau,v,\sigma)dv+\int_\tau^t\int_0^1 n(t,s,u,v)n^{(j-1)}(u,v,\tau,\sigma)dudv\,,$$

причём функции $\varphi(t,s,\tau)$, $\psi(t,s,\sigma)$ и $\phi(t,s,\tau,\sigma)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные по переменной t. Отсюда и из равенства (6) следует, что при любой функции $f\in U$ единственное решение уравнения (1) принадлежит U. ■

В условии теоремы спектральный радиус оператора K равен нулю. Поэтому в пространстве U обратимо уравнение (1), т.е. обратим рассматриваемый в U оператор $I-K$, а решение уравнения может быть получено методом последовательных приближений.

Спектральный радиус действующего в пространстве U оператора (2) обращается в нуль и при более общих условиях на ядра.

Через $BC(L^1(\Omega))$, где $\Omega=[0,1]$ или $\Omega=D$, обозначим множество ограниченных измеримых функций $c(t,s,\omega)$, которые непрерывны по $(t,s)\in D$ как функции со значениями в $L^1(\Omega)$. $BC(L^1(\Omega))$ — банахово пространство относительно нормы $\|c\|=\sup\limits_D\displaystyle\int_\Omega|c(t,s,\omega)|d\omega$. В этом пространстве всюду плотно множество многочленов.

Аналогично теореме 1 доказывается более общая

Теорема 2. *Если функции l, m, l'_t и m'_t принадлежат пространству $BC(L^1([0,1]))$, а функции n и n'_t – пространству $BC(L^1(D))$, то при любой функции $f\in U$ уравнение* (1) *обратимо в U, а его решение может быть найдено методом итераций.*

□ Непосредственно проверяется, что операторы L, M, N и K действуют в пространстве U, функции $l^{(j)}$, $m^{(j)}$ и $n^{(j)}$ $(j=1,2,\ldots)$ принадлежат пространствам $BC(L^1([0,1]))$ и $BC(L^1(D))$ соответственно, а ряды (7) и соответствующие им ряды из производных по t мажорируются сходящимися числовыми рядами. Следовательно, функции φ, ψ, φ'_t и ψ'_t принадлежат пространству $BC(L^1([0,1]))$, функции ϕ и ϕ'_t — пространству $BC(L^1(D))$. Тогда оператор R, определяемый правой частью равенства (6), действует в пространстве U, а единственное решение уравнения (1) в U находится по формуле $x=Rf$, где f — произвольная функция из U. Поэтому оператор R является обратным к оператору $I-K$, т.е. уравнение (1) обратимо в U. ■

В условии теоремы 1 уравнение (1) имеет единственное решение не только в пространстве U, но и в более широких пространствах $C(D)$ и $L^p(D)$ $(1\le p\le\infty)$, так как спектральный радиус действующего в этих пространствах оператора K равен нулю. В перечисленных случаях единственное решение уравнения (1) суммируемо на D. Пример показывает, что уравнение (1) с непрерывными ядрами может иметь не суммируемые решения.

Отметим, что свойства оператора (2) в пространствах E_{u_0} и $Z=G+H$ фактически не изучались. Из общей теории линейных операторов с частными интегралами в БИП [1,9] вытекает, что если оператор (2) действует из E_{u_0} в E_{u_1}, где E_{u_1} определяется аналогично E_{u_0}, или действует из $Z=G+H$ в $Z_1=G_1+H_1$, где G_1 и H_1 – БИП с носителем D [1,9], то оператор (2) непрерывен, а его регулярность [1,9] означает действие в рассматриваемых пространствах оператора (2) с функциями $|l|,|m|,|n|$ вместо функций l,m,n.

При приближённом решении уравнение (1) с $\lambda = 1$ заменяется уравнением

$$x(t,s) = \int_0^t \widetilde{l}(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau + \int_0^s \widetilde{m}(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma + \\ + \int_0^t\int_0^1 \widetilde{n}(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)\,d\sigma\,d\tau \ + \widetilde{f}(t,s) \equiv (\widetilde{K}x)(t,s) + \widetilde{f}(t,s)\,. \tag{8}$$

Важную роль при этом играют оценки нормы резольвент и решений уравнений (1) и (8), которые могут быть получены с применением схем, рассмотренных в [1] в случае пространства непрерывных функций.

Будем предполагать, что l, m, n, f и $\widetilde{l}$, $\widetilde{m}$, $\widetilde{n}$, $\widetilde{f}$ – непрерывные вместе со своими частными производными по переменной t функции. Тогда операторы K и $\widetilde{K}$ действуют в пространстве U. Пусть $\widetilde{L}$, $\widetilde{M}$ и $\widetilde{N}$ – операторы L, M и N с ядрами $\widetilde{l}$, $\widetilde{m}$ и $\widetilde{n}$ вместо ядер l, m и n соответственно.

При сделанных предположениях относительно ядер операторы L, M, N, K, $\widetilde{L}$, $\widetilde{M}$, $\widetilde{N}$ и $\widetilde{K}$ действуют в пространстве непрерывных на $[0,1]\times[0,1]$ функций и их спектральные радиусы равны нулю [1-3]. Поэтому спектр этих операторов состоит из единственной точки ноль. Так как перечисленные операторы действуют в U, то из работы [12] следует, что и в U спектр этих операторов состоит из нуля. Поэтому уравнения (1) и (8) обратимы в U. Пусть $\mathcal{K} = (I-K)^{-1}$, $\widetilde{\mathcal{K}} = (I-\widetilde{K})^{-1}$, а x и $\widetilde{x}$ – решения уравнений (1) и (8). Очевидно неравенство

$$\|\widetilde{\mathcal{K}} - \mathcal{K}\| \le \|\widetilde{\mathcal{K}}\|\|\mathcal{K}\|\|K-\widetilde{K}\| \le c\|K-\widetilde{K}\|\,, \tag{9}$$

где c – некоторая константа.

Тогда

$$\|\widetilde{\mathcal{K}} - \mathcal{K}\| \le c\cdot\sup_{t,s}\Bigg[\int_0^t \big|(l-\widetilde{l})(t,s,\tau)\big|d\tau + \int_0^t\left|\frac{\partial(l-\widetilde{l})(t,s,\tau)}{\partial t}\right|d\tau + \\ + \big|(l-\widetilde{l})(t,s,t)\big| + 2\int_0^s\big|(m-\widetilde{m})(t,s,\sigma)\big|d\sigma + \int_0^s\left|\frac{\partial(m-\widetilde{m})(t,s,\sigma)}{\partial t}\right|d\sigma + \\ + \int_0^t\int_0^1\big|(n-\widetilde{n})(t,s,\tau,\sigma)\big|d\sigma d\tau + \int_0^t\int_0^1\left|\frac{\partial(n-\widetilde{n})(t,s,\tau,\sigma)}{\partial t}\right|d\sigma d\tau + \\ + \int_0^1\big|(n-\widetilde{n})(t,s,t,\sigma)\big|d\sigma\Bigg]\,. \tag{10}$$

Если теперь

$$\left|\frac{\partial^i(l-\widetilde{l})(t,s,\tau)}{\partial t^i}\right| < \frac{\varepsilon}{9c}\,, \qquad \left|\frac{\partial^i(m-\widetilde{m})(t,s,\sigma)}{\partial t^i}\right| < \frac{\varepsilon}{9c}\,, \\ \left|\frac{\partial^i(n-\widetilde{n})(t,s,\tau,\sigma)}{\partial t^i}\right| < \frac{\varepsilon}{9c} \qquad (i=0,1)\,, \tag{11}$$

то из (9) и (10) следует неравенство $\|\widetilde{\mathcal{K}}-\mathcal{K}\| < \varepsilon$. Таким образом, резольвенты уравнений (1) и (8) отличаются по норме сколь угодно мало, если ядра уравнения (8) «достаточно близки» к соответствующим ядрам уравнения (1).

Из (9) и неравенства

$$\|x - \widetilde{x}\|_U \leq \|\mathcal{K}\|\big(\|\widetilde{\mathcal{K}}\|\,\|K - \widetilde{K}\|\|\widetilde{f}\|_U + \|f - \widetilde{f}\|_U\big)$$

вытекает следующая оценка:

$$\|x - \widetilde{x}\|_U \leq c\|K - \widetilde{K}\|\|\widetilde{f}\|_U + \|\mathcal{K}\|\|f - \widetilde{f}\|_U\,,$$

где $c = \|\mathcal{K}\|\,\|\widetilde{\mathcal{K}}\|$, которая показывает, что число $\|x - \widetilde{x}\|_U$ достаточно мало, если выполнены условия (11) и $\widetilde{f}$ выбрано достаточно близко к f. В частности, если $\widetilde{f} = f \neq 0$ и в (11) в качестве ε выбрано $\dfrac{\varepsilon}{c\|f\|_U}$, то $\|x - \widetilde{x}\|_U < \varepsilon$.

Литература

1. Калитвин А.С. Линейные операторы с частными интегралами / Воронеж: ЦЧКИ, 2000. – 252 с.
2. Калитвин А.С., Фролова Е.В. Линейные операторы с частными интегралами. C-теория / Липецк: ЛГПУ, 2004. – 196 с.
3. Калитвин А.С., Калитвин В.А. Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтерра-Фредгольма с частными интегралами / Липецк: ЛГПУ, 2007. – 178 с.
4. Красносельский М.А. и др. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций / М.: Наука, 1966. – 552 с.
5. Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семёнов Е.М. Интерполяция линейных операторов / М.: Наука, 1978. – 400 с.
6. Векуа И.Н. Новые методы решения эллиптических уравнений / М.-Л.: ОГИЗ, Гостехиздат, 1948. – 296 с.
7. Бицадзе А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка/ М.: Наука, 1966. – 204 с.
8. Мюнтц Г. Интегральные уравнения. Т.1 / ГТТИ, 1934. – 332 с.
9. Appell J.M., Kalitvin A.S., Zabrejko P.P. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations / New York-Basel: Marcel Dekker inc., 2000. – 560 p.
10. Барышева И.В. О действии операторов с частными интегралами в пространстве $C(C^1(t))$ // Операторы с частными интегралами: Сб. науч. тр. / Липецк: ЛГПИ, 1999. – Вып.3. – С.3-7.
11. Барышева И.В. Аппроксимации операторов Вольтерра с частными интегралами // Операторы с частными интегралами: Сб. науч. тр. / Липецк: ЛГПУ, 2003. – Вып.6. – С.39-51.
12. Halberg J.R., Taylor A.E. On the spectra of linked operators // Pacific J. Math. – 1956. – 6;6. – P.283-289.

ABOUT VOLTERRA EQUATIONS WITH PARTIAL INTEGRALS IN SPACE OF PARTIALLY DIFFERENTIABLE FUNCTIONS

I.V. Barysheva, A.S. Kalitvin

Lipetsk State Pedagogical University,
Lenina, str. 42, Lipetsk, 398020, Russia, e-mail:barysheva_iv@mail.ru

Abstract. Inversability conditions of Volterra's linear equations with partial integrals in the space of partially differentiable functions are obtained. Estimates of approximate solutions of these equations are given. It is shown that the homogeneous linear Volterra equation of second type with partial integrals and with the continuous kernels has only trivial integrable solution and it can have a not integrable solution.

Key words: Volterra's operators and equations with partial integrals, integro-differential equations, spaces of partially differentiable functions, spectral radius, resolvent kernels.