УДК 519.3

СЕРЕНДИПОВЫ АППРОКСИМАЦИИ. ПОУЧИТЕЛЬНЫЕ ОШИБКИ И КОНТРПРИМЕРЫ

И.А. Астионенко, Е.И. Литвиненко, А.Н. Хомченко

Херсонский национальный технический университет,
Бериславское шоссе, 24, Херсон, 73008, Украина, e-mail: mmkntu@gmail.com

Аннотация. В работе приведены контрпримеры, доказывающие ошибочность некоторых утверждений теории серендиповых аппроксимаций.

Ключевые слова: конечный элемент серендипова семейства, лагранжево семейство, многопараметрическая интерполяция, модифицированный базис, «скрытые» параметры.

1. Введение. Серендиповы аппроксимации — малоизученная составляющая теории приближения функций двух и трех аргументов. Возникли серендиповы аппроксимации в связи с появлением и развитием метода конечных элементов (МКЭ). История МКЭ началась с замечательной идеи выдающегося математика Р. Куранта, которую он опубликовал в 1943 г. Сначала идея Куранта не заинтересовала исследователей, поскольку ее реализация требовала небывалых объемов вычислительной работы. После появления ЭВМ метод стал активно разрабатываться преимущественно усилиями инженеров. Именно инженеры и ученые-прикладники, а не математики-теоретики сразу же оккупировали вычислительные машины с целью получить на них ответы на практические вопросы. Большинство из них были хорошо знакомы с методами сопротивления материалов и строительной механики, в том числе и с матричными методами. Поэтому МКЭ, возникший как переложение для ЭВМ матричных методов, использовавшихся при расчетах стержневых и балочных систем, органично, быстро и легко вошел в практику инженерных расчетов. По мнению А.Н. Линькова быстрое развитие и популярность МКЭ были предопределены профессиональной и психологической подготовкой потребителей. Многие считают (и не без оснований), что именно недостаток математических знаний у инженерно ориентированных специалистов стал главной причиной появления и распространения в МКЭ неверных гипотез, неадекватных моделей, сомнительных результатов и откровенных ошибок. Понадобилось более 20 лет, чтобы некоторые заинтересованные исследователи пришли к пониманию того, что разработчики основ МКЭ слишком переоценили возможности матричной алгебры. Оказалось, что далеко не все результаты теории приближения функций одного аргумента автоматически распространяются на функции двух и трех аргументов. Нам кажется, что наибольшее количество ошибок связано с конструированием функций формы (базисных функций) конечных элементов, в частности, элементов серендипова семейства. Эти элементы стали настоящим открытием в МКЭ. Серендиповы аппроксимации интересны и привлекательны как неиссякаемый источник оригинальных идей и новых результатов. Ниже рассматриваются лишь некоторые повторяющиеся в книгах ошибочные утверждения, для которых нам удалось подобрать надлежащие контрпримеры.

2. Анализ предшествующих публикаций. История серендиповых элементов началась с применения параметрического отображения порождающего стандартного элемента в элемент с криволинейными границами. Один из первых изопараметрических элементов был использован Тейгом в 1961 г. [1]. Эту идею затем обобщили и подробно разработали Эргатудис, Айронс, Зенкевич [2]. Изопараметрические элементы на основе квадрата (для двумерных задач) и куба (для трехмерных задач) по предложению Зенкевича стали называть элементами серендипова семейства. Происхождение термина «серендипов» объясняется в книге Зенкевича [3]. Построение изопараметрических (серендиповых) КЭ основано на порождающих элементах в форме квадрата и куба и осуществляется подбором [1,3,4] полиномиальных кривых и поверхностей, проходящих через заданные узлы на сторонах криволинейного четырехугольника или на ребрах искривленного гексаэдра. Подбор осуществляется так же, как и аппроксимация финитной функции на элементе. В этом отражена двойственная роль базиса изопараметрического элемента. В основной части статьи мы полемизируем с авторами книг [3,5-7].

Популярность МКЭ неуклонно растет, трудными проблемами метода уже давно интересуются профессиональные математики. Появились книги по МКЭ, написанные математиками, например, [4,6,8,9]. Однако в теории серендиповых аппроксимаций спорных вопросов и противоречивых утверждений не стало меньше. Не случайно многие авторы сходятся на том, что серендиповы элементы плохо поддаются какой-либо формализации. Нам кажется, что сегодня есть основания утверждать обратное. Цель статьи -– показать на конкретных примерах, что привлечение новых идей и новых методов в теорию серендиповых аппроксимаций способно изменить (иногда радикально) некоторые привычные представления.

3. Основная часть. О серендиповых конечных элементах (СКЭ) пишут многие авторы, правда, не все применяют термин “серендипово семейство”. За последние 40 лет в многочисленных книгах по МКЭ не появилось ничего нового об СКЭ. Все авторы в точности повторяют результаты 1968 г. [2], полученные Зенкевичем и его коллегами. Как ни странно, ни в одном источнике нет четкого определения СКЭ. Поэтому мы приводим здесь наиболее простое определение из [4,10]: серендиповы конечные элементы – это прямоугольники и прямоугольные призмы, не имеющие внутренних узлов. Сразу вспоминается гранецентрированный куб, который не имеет внутренних узлов, однако в серендипово семейство не входит.

Наш краткий обзор мы начнем с замечательной книги Зенкевича [3] – самого авторитетного специалиста по МКЭ. Напомним, что в центре нашего внимания находится серендипово семейство конечных элементов. Для примера возьмем элемент бикубической интерполяции (3-го порядка). Стандартный квадрат имеет размеры $2\times 2(|\xi|\leqslant 1, |\eta|\leqslant 1)$ и 12 равномерно расположенных узлов на границе (рис. 1).

Стандартный базис бикубической интерполяции первоначально был получен подбором благодаря удивительной изобретательности и фантастической интуиции авторов работы [2]. Функции этого базиса имеют вид:

для угловых узлов

$$N_i(\xi_i,\eta_i)=\frac{1}{32}(1+\xi\xi_i)(1+\eta_i\eta)\left[9(\xi^2+\eta^2)-10\right], \tag{1}$$

$$i = 1, 4, 7, 10\,; \quad \xi_i\,\eta_i = \pm 1\,.$$

для промежуточных узлов

$$N_i(\xi_i, \eta_i) = \frac{9}{32}(1 - \xi^2)(1 + \eta_i\eta)(1 + 9\xi_i\xi)\,, \tag{2}$$

$$i = 2, 3, 8, 9\,; \quad \xi = \pm\frac{1}{3}\,; \eta_i = \pm 1\,.$$

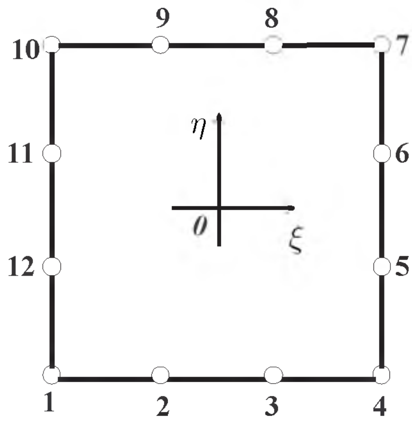

Рис. 1. СКЭ 3-го порядка

Остальные функции получаются из (2) перестановкой ξ и η.

Нагрузка, вызванная силой тяжести элемента, локализуется по узлам в соответствии с формулой:

$$p_i = \frac{1}{S}\iint\limits_S N_i(\xi, \eta)d\xi d\eta\,, \tag{3}$$

где D – область, занимаемая элементом; S – площадь элемента.

Парадокс всех стандартных СКЭ высших порядков в том, что в угловых точках всегда получается отрицательная нагрузка — противоестественный результат. Зенкевич [3, с. 183] соглашается с тем, что такое распределение противоречит здравому смыслу, однако советует смириться с этим, поскольку результат согласован с теорией. Ситуация напоминает гидродинамику 19 века, когда инженеры наблюдали то, чего не могли объяснить, а математики объясняли то, чего не могли наблюдать. И все же мы благодарны Зенкевичу за то, что он первый и единственный, кто указал на этот недостаток СКЭ высших порядков. Для многих последователей этот парадокс послужил стимулом к поиску альтернативных СКЭ. Ниже мы приводим один из первых альтернативных базисов, полученных в 1982 г. [11]. Эти базисы реабилитировали серендипово семейство и положили начало последовательному устранению других недостатков СКЭ.

$$N_i(\xi_i, \eta_i) = \frac{1}{32}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta_i\eta)\left[9(1 - \xi_i\xi - \eta_i\eta)^2 - 1\right]\,, \tag{4}$$

$$i = 1, 4, 7, 10\,; \quad \xi_i\,\eta_i = \pm 1\,;$$

$$N_i(\xi_i,\eta_i)=\frac{9}{32}(1-\xi^2)(1+\eta_i\eta)(9\xi_i\xi+\eta_i\eta)\,, \tag{5}$$

$$i=2,3,8,9\,;\quad \xi=\pm\frac{1}{3}\,;\eta_i=\pm1\,.$$

Так было получено отвечающее здравому смыслу поузловое распределение равномерной массовой силы — физически правдоподобное и математически безупречное. Здесь трудно устоять перед соблазном привести слова известного ученого Е.С. Вентцель: «Из двух крайностей: «математика без здравого смысла» и «здравый смысл без математики» предпочтение, безусловно, надо отдать второй [12]».

Следующая книга [5] написана известными математиками МГУ им. М.В.Ломоносова. Она выдержала три издания с исправлениями и дополнениями. Найти ошибку в такой книге очень трудно. Остается надеяться на какую-либо неточность или устаревшее утверждение. Наше внимание, естественно, привлек материал, посвященный специфически трудным задачам интерполирования функций многих независимых переменных. На с. 133 авторы замечают, что задача интерполирования может иметь множество решений, если не требовать, чтобы степень интерполяционного многочлена была наименьшей. Возможно, авторы имели в виду лагранжево семейство элементов, однако они абсолютно точно предсказали неоднозначность интерполирования задолго до появления СКЭ. А вот ослаблять требования к степени интерполяционного полинома совсем не обязательно. Сравнение стандартного базиса (1), (2) и альтернативного (4), (5) показывает, что они имеют одну и ту же степень – четвертую. Появление «скрытого» параметра -– результат применения нового вероятностно-геометрического метода конструирования базисов СКЭ. Этот параметр позволяет управлять рельефом поверхности, «нависающей» над СКЭ. Оказалось, что благодаря «скрытому» параметру можно изменить поузловое распределение нагрузки, матрицу Грама, след матрицы жесткости КЭ, конструировать базисы, гармонические по Привалову или Кёбе и т.п. Доказано, что на бикубическом элементе число «скрытых» параметров колеблется от 1 до 4. В этой связи мы должны вернуться к [3], чтобы процитировать ошибочное утверждение Зенкевича. На с. 127 автор пишет: «... каждому элементу можно поставить в соответствие несколько неузловых параметров. Этот прием обычно не имеет больших преимуществ, так как введение неузловых параметров не изменяет функцию формы на границах». Здесь Зенкевич явно недооценивает изменения функции формы, происходящие внутри КЭ. Теперь мы должны уточнить смысл терминов «интерполяция» и «аппроксимация». В случае СКЭ реализуются обе процедуры одновременно: на границах элемента – интерполяция, внутри – аппроксимация.

Обратимся к книге [6], написанной математиками из Великобритании. Книга написана не только специалистов, но также студентам математических и инженерных специальностей. Как и следовало ожидать, при описании изопараметрических аппроксимаций (глава 4) авторы даже не упоминают о возможности интуитивного подбора подходящих полиномов. Они рекомендуют достаточно общий, однако, весьма трудоёмкий алгоритм построения изопараметрических аппроксимаций. На первом шаге решается задача интерполирования по Лагранжу. Для этого КЭ должен иметь необходимое количество узлов, в том числе и внутренних, которые по известным причинам нежелательны. На следующем шаге осуществляется исключение внутренних параметров (конденсация, сгущение). Кстати, правильно исключить внутренние параметры не так просто. Возможны варианты. Таков путь превращения элемента лагранжева семейства в элемент серендипова семейства. Непонятно, почему авторы предпочли этот (не самый лучший) метод. Тем более, что за 5 лет до выхода книги [6] Тейлор предложил свой простой, наглядный (элегантный, по мнению Галлагера) метод генерирования базиса СКЭ, исключающий необходимость составления и решения СЛАУ. Мы согласны с мнением Галлагера, однако и метод Тейлора сегодня не лучший, поскольку в традиционном виде он не приспособлен к генерированию многопараметрических полиномов. Для этого хорошо приспособлены вероятностно-геометрический, геометрический (модификации метода Уачспресса) и комбинированный алгебро-геометрический методы. Примеры стандартных базисов СКЭ можно найти в доступной литературе, например, в [3,4,7], многопараметрические (со «скрытыми» параметрами) базисы — в статье [13], которая содержит ссылки и на другие работы авторов по этой тематике.

Отдельного рассмотрения заслуживает СКЭ четвертого порядка (quartic). Некоторые, наиболее осведомленные в серендиповых аппроксимациях, авторы [7] убеждают в том, что при построении базисов СКЭ четвертого и более высоких порядков без внутренних узлов не обойтись. Это означает, что для плоского СКЭ четвертого порядка 16 узлов недостаточно, а для пространственного недостаточно 44 узлов. Выходит, что без дополнительных узлов не срабатывает ни один из проверенных подходов: ни метод обратной матрицы, ни метод Тейлора. Однако, по-видимому, нельзя считать задачу в принципе неразрешимой. Сошлемся на статью [14], в которой читатель найдет контрпримеры, опровергающие утверждение Зенкевича и Моргана.

4. Выводы. В стандартных моделях СКЭ a priori заложены избыточные немотивированные ограничения, регламентирующие поведение базисных функций внутри КЭ. Эти условия предельно (до одного элемента) сокращают множество подходящих СКЭ.

Литература

1. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред / М.: Мир, 1976. – 464 с.
2. Ergatoudis I., Irons B.M., Zienkiewicz O.C. Curved isoperimetric «quadrilateral» elements for finite element analysis // Internat. J. Solids Struct. – 1968. – 4. – P.31-42.
3. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / М.: Мир, 1975. – 541 с.
4. Норри Д., де Фриз Ж. Введение в метод конечных элементов /М.: Мир, 1981. – 304 с.
5. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т.1 / М.: Наука, 1966. – 632 с.
6. Митчелл Э., Уэйт Р. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными / М.: Мир, 1981. – 216 с.
7. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация / М.: Мир, 1986. – 318 с.
8. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов / М: Мир, 1977. – 350 с.
9. Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы / М.: Наука, 1981. – 416 с.
10. Немчинов Ю.И. Расчет пространственных конструкций (метод конечных элементов) / К.: Будiвельник, 1980. – 232 с.
11. Хомченко А.Н. Некоторые вероятностные аспекты МКЭ / Ивано-Франк. ин-т нефти и газа. – Ивано-Франковск, 1982. – 9 -с. – Деп. в ВИНИТИ 18.03.82, № 1213.

12. Математики о математике: Сборник статей / М.: Знание, 1982. -– 64 с.
13. Астионенко И.А., Литвиненко Е.И., Хомченко А.Н. Конструирование многопараметрических полиномов на бикубическом элементе серендипова семейства // Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика, Физика. – 2009. – №5(60);16. – С. 15-31.
14. Хомченко А.Н., Камаєва С.О. Чи потрібний 17 вузол серендиповому елементу 4-го порядку? / Вестник Херсонского нац. техн. ун-та. – 2009. – 2(35). – С.455-461.

SERENDIPITY APPROXIMATIONS. DIDACTIC MISTAKES AND COUNTEREXAMPLES

I.A. Astionenko, Ye.I. Litvinenko, A.N. Khomchenko

Kherson National Technical University,
Berislavskoe Shosse, 24, Kherson, 73008, Ukraine, e-mail: mmkntu@gmail.com

Abstract. Counterexamples proving the falsity of some statements of serendipity approximation theory are given.

Key words: finite element of serendipity family, Lagrange's family, multiparameter interpolation, modified basis, "hidden" parameters.