УДК 531.1

ТОПОЛОГИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ОДНОМЕРНЫХ СЕПАРАБЕЛЬНЫХ ЗАМКНУТЫХ МНОЖЕСТВ

Ю.П. Вирченко, О.Л. Шпилинская

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru
Институт монокристаллов НАНУ,
пр. Ленина, 60, Харьков, Украина, e-mail: spilolga@isc.kharkov.ua

Аннотация. Доказывается теорема об общем устройстве распределения вероятностей случайных замкнутых сепарабельных множеств, пространством погружения которых является отрезок действительной оси.

Ключевые слова: случайные замкнутые множества, множества сепарабельности, сепарабельные множества.

В теории случайных множеств особое место, в силу своей прикладной значимости, занимают замкнутые сепарабельные множества (см. [1]). Их определение состоит в том, что, для фиксированного топологического пространства T погружения этих множеств X, они замкнуты с вероятностью единица, и в T существует счетное всюду плотное множество $R \subset T$ точек такое, для которого с той же вероятностью выполняется условие

$$\mathsf{cl}(X \cap R) = X\,, \tag{1}$$

$\mathsf{cl}(\cdot)$ – операция замыкания. При построении конкретных моделей замкнутых сепарабельных множеств, то есть при явном определении соответствующего распределения вероятностей очень важна информация о том, как устроены типичные случайные реализации. В настоящей работе мы отвечаем на этот вопрос в том случае, когда пространством погружения T является отрезок действительной прямой. Ясно, что при этом достаточно ограничиться случаем, когда в качестве такого отрезка выбирается отрезок $[0,1]$. При решении указанной чисто топологической задачи мы используем более сильное определение сепарабельности случайного множества, которое аналогично понятию сепарабельного случайного процесса (см. [2]). А именно, мы требуем чтобы условие (1) удовлетворялось для любого счетного плотного на $[0,1]$ множества R. Оказывается, что множества X, удовлетворяющие такому жесткому ограничению, устроены очень просто с топологической точки зрения – их случайные реализации представимы с вероятностью единица однозначным образом в виде

$$X = \mathsf{cl}\Big(\bigcup_j (a_j, b_j)\Big) \tag{2}$$

на основе, вообще говоря, счетного случайного множества интервалов. Так как формулировки условия (1) и результата (2) такови, что они справедливы для случайных реализаций с вероятностью единица, что в дальнейшем можно элиминировать вероятностную природу задачи – давать формулировки условия и результата, а также проводить все рассуждения в чисто топологической форме.

Доказательство основного утверждения основано на нескольких простых общих топологических фактах, которые мы сформулируем в виде отдельных лемм.

Лемма 1. *Пусть U – открытое множество в топологическом пространстве T и D – плотное в T множество. Тогда*

$$\mathsf{cl}(D \cap U) = \mathsf{cl}(U)\,.$$

□ Так как $D \cap U \subset U$ и, следовательно, такое же включение имеет место для замыканий $\mathsf{cl}(D \cap U) \subset \mathsf{cl}(U)$, то нужно доказать выполнимость обратного включения.

Пусть $x \in \mathsf{cl}(U)$. Так как U – открытое множество, то для любой окрестности V точки x выполняется $V \cap U \neq \varnothing$. Так как $V \cap U$ – открытое множество и D плотно в T, то $D \cap (V \cap U) \neq \varnothing$. Следовательно, для любой окрестности V точки x имеет место $V \cap (D \cap U) \neq \varnothing$ и, следовательно, $x \in \mathsf{cl}(D \cap U)$. ■

Следствие. *Пусть в условиях леммы для множества $X \subset T$ имеют место включения $U \subset X \subset \mathsf{cl}(U)$. Тогда*

$$\mathsf{cl}(D \cap X) = \mathsf{cl}(X)\,.$$

□ Справедливость этого равенства следует из цепочки включений

$$U \cap D \subset X \cap D \subset X \subset \mathsf{cl}(U)$$

применением операции замыкания

$$\mathsf{cl}(U \cap D) \subset \mathsf{cl}(X \cap D) \subset \mathsf{cl}(X) \subset \mathsf{cl}(\mathsf{cl}(U)) = \mathsf{cl}(U)$$

с использованием утверждения леммы. ■

Определение. *Открытое множество U из топологического пространства T назовем исчерпывающим T, если $\mathsf{cl}(U) = T$.*

Лемма 2. *Пусть X – замкнутое множество в топологическом пространстве T не имеет внутренних точек. Тогда $U = \complement X$ исчерпывает T.*

□ Так как $X \cup \complement X = T$, то достаточно доказать, что любая точка $x \in X$ содержится в $\mathsf{cl}(\complement X)$. Допустим, что x не содержится в $\mathsf{cl}(\complement X)$. Тогда x содержится в открытом множестве $\complement\mathsf{cl}(\complement X)$. Но это множество содержится в X, в чем убеждаемся применяя операцию дополнения к обеим частям включения $\complement X \subset \mathsf{cl}(\complement X)$, $\complement\mathsf{cl}(\complement X) \subset X$. Отсюда следует, что x – внутренняя точка X, что противоречит условию леммы. ■

Обратное, вообще говоря, неверно. Однако, такое утверждение справедливо, если топология порождается метрикой.

Лемма 3. *Пусть T – метрическое пространство с расстоянием $\rho(\cdot,\cdot)$ и U исчерпывает T. Тогда $T \setminus U$ не имеет внутренних точек.*

□ Наличие внутренней точки $x \in T \setminus U$ означает, что для достаточно малых $\varepsilon > 0$ для всех точек y, для которых имеет место $\rho(x, y) < \varepsilon$, выполняется $y \in T \setminus U$. А это противоречит наличию сходящейся последовательности $\langle y_n \in U; \in \mathbb{N}\rangle$, $\rho(x, y_n) \to 0$. ■

Следствие. *Если U исчерпывает метрическое пространство T и D – плотное в T множество, то множество $U \cap D$ плотно в T.*

□ Пусть x – произвольная точка из U и V – ее окрестность. Рассмотрим открытое множество $U \cap V$. Оно не пусто в силу утверждения леммы. Так как D плотно в T, то существует точка $z \in D$, принадлежащая $V \cap U$. Тогда $z \in D \cap U$ и одновременно $z \in V$. Ввиду произвольности открытого множества заключаем, что $D \cap U$ – плотное множество в T. ■

Докажем теперь анонсированный выше результат.

Теорема. *Для того чтобы множество $X \subset [0, 1]$ удовлетворяло равенству (1) для любого счетного плотного в $[0, 1]$ множества R необходимо и достаточно чтобы оно было представимо в виде (2). Причем существует единственное множество интервалов $\{\{a_i, b_i\}; i \in \mathbb{N}\}$, на основе которого строится представление (1).*

Достаточность.

□ Обозначим

$$U = \bigcup_j (a_j, b_j)\,.$$

Это множество открыто в $T = [0, 1]$. Воспользовавшись следствием Леммы 1, где в качестве D нужно положить множество R получим $\mathsf{cl}(R \cap X) = \mathsf{cl}(X)$. Но так как X, определяемое равенством (2), замкнуто, то имеет место (1). ■

Необходимость.

□ Пусть имеет место (1) для любого счетного плотного в $[0, 1]$ множества точек. Тогда $\complement X$ открыто.

Рассмотрим два случая: $\mathrm{Int}[X] = \varnothing$ и $\mathrm{Int}[X] \neq \varnothing$.

Пусть имеет место $\mathrm{Int}[X] = \varnothing$. Если множество $Y = \complement\mathsf{cl}(\complement X)$ не пусто, то оно не имеет внутренних точек. Если бы в этом множестве существовала внутренняя точка z, то при достаточно малом $\varepsilon > 0$ выполнялось $\complement\mathsf{cl}(\complement X) \supset \Delta_\varepsilon(z) \equiv (z - \varepsilon, z + \varepsilon)$. Отсюда следует $\mathsf{cl}(\complement X) \subset \complement\Delta_\varepsilon(z)$, $\complement X \subset \complement\Delta_\varepsilon(z)$, $X \supset \Delta_\varepsilon(z)$, что противоречит пустоте $\mathrm{Int}[X]$.

С другой стороны, согласно определению, множество Y открыто. В результате, получаем противоречие. Это означает, что $Y = \varnothing$, то есть $\mathsf{cl}(\complement X) = [0, 1]$, где множество $\complement X$ открыто. Это означает, что множество $\complement X$ исчерпывает $[0, 1]$.

Согласно следствию Леммы 3, можно сузить наперед заданное счетное, плотное в $[0, 1]$ множество R на $\complement X$ и при этом такое сужение $R' = R \cap \complement X$ останется плотным в $[0, 1]$. Для этого нужно положить в утверждении леммы $D = R$. Тогда $R' \cap X = \varnothing$, а это противоречит условию $\mathsf{cl}(R' \cap X) = X$. Таким образом, в рассматриваемом случае $\mathrm{Int}[X] = \varnothing$, удовлетворить условию (1) невозможно.

Пусть имеет место $\mathrm{Int}[X] \neq \varnothing$. Открытое множество $\mathrm{Int}[X]$ представимо в виде дизъюнктивного не более чем счетного дизъюнктивного объединения

$$\mathrm{Int}[X] = \bigcup_j (a_j, b_j) \equiv U\,.$$

Причем такое представление единственно. Тот факт, что в нем не более чем счетного множество компонент следует из неравенства $\sum_j (b_j - a_j) < 1$.

Положим

$$Z = X \setminus \mathsf{cl}(U)\,.$$

Пусть $z \in Z$. Если при достаточно малом $\varepsilon > 0$ выполняется $\Delta_\varepsilon(z) \subset Z$, то $\Delta_\varepsilon(z) \subset X$ и, следовательно, $\Delta_\varepsilon(z) \subset \mathrm{Int}[X] \subset \mathsf{cl}(\mathrm{Int}[X])$. Но, в этом случае, $\Delta_\varepsilon(z) \cap Z = \varnothing$. Полученное противоречие указывает на то, что множество Z не имеет внутренних точек, и поэтому $\mathrm{Int}[\complement Z] \neq \varnothing$.

Рассмотрим $\complement\mathrm{Int}[\complement Z]$. Если для достаточно малого $\varepsilon > 0$ имеет место $\Delta_\varepsilon(z) \subset \complement\mathrm{Int}[\complement Z]$, то есть $\Delta_\varepsilon(z) \cap \mathrm{Int}[\complement Z] = \varnothing$ для некоторой точки z. Тогда $\Delta_\varepsilon(z) \cap \complement Z = \varnothing$ и, следовательно, $\Delta_\varepsilon(z) \subset Z$, то есть точка z внутренняя для Z, что по доказанному выше не так. Следовательно, предположение $\Delta_\varepsilon(z) \subset \complement\mathrm{Int}[\complement Z]$ неверно. Это означает, что замкнутое множество $\complement\mathrm{Int}[\complement Z]$ не имеет внутренних точек. Поэтому, согласно Лемме 2, множество $\mathrm{Int}[\complement Z]$ исчерпывает $[0, 1]$, $\mathsf{cl}(\mathrm{Int}[\complement Z]) = [0, 1]$.

Согласно следствию Леммы 3, в множестве $\mathrm{Int}[\complement Z]$ имеется счетное, плотное в $[0, 1]$ множество точек $R'' = R \cap \mathrm{Int}[\complement Z]$, где R – рассматриваемое счетное, плотное в $[0, 1]$ множество. Тогда $R'' \subset \complement Z$, и поэтому $R'' \cap Z = \varnothing$. Подставим в это равенство явное выражение множества Z,

$$(R'' \cap X) \setminus (R'' \cap \mathsf{cl}(\mathrm{Int}[X])) = \varnothing\,.$$

Так как X замкнуто, то вычитаемое множество не шире чем $R'' \cap X$. Тогда отсюда следует

$$R'' \cap X = R'' \cap \mathsf{cl}(\mathrm{Int}[X]\,.$$

Применив к обеим частям этого равенства операцию замыкания и воспользовавшись (1), имеем

$$X = \mathsf{cl}(R'' \cap X) = \mathsf{cl}(R'' \cap \mathsf{cl}(\mathrm{Int}[X]))\,.$$

В силу следствия Леммы 1, правая часть этого равенства принимает вид

$$\mathsf{cl}(\mathsf{cl}(\mathrm{Int}[X])) = \mathsf{cl}(\mathrm{Int}[X])\,.$$

Отсюда следует, что

$$X = \mathsf{cl}(\mathrm{Int}[X]) = \mathsf{cl}(U)\,. \qquad \blacksquare$$

Следствие. *Из (2) следует, что замкнутое сепарабельное множество X не содержит изолированных точек.*

Замечание. Так как $a_j, b_j \in \mathsf{cl}(a_j, b_j)$, то из (2) получаются следующие, равноправные с (2) представления для замкнутого сепарабельного множества X,

$$X = \mathsf{cl}\Big(\bigcup_j [a_j, b_j]\Big)\,, \qquad X = \mathsf{cl}\Big(\bigcup_j [a_j, b_j)\Big)\,.$$

Литература

1. Matheron G. Random Sets and Integral Geometry / G.Matheron. – New York: John Wiley and Sons, 1975.
2. Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов / А.В. Булинский, А.Н. Ширяев. – М.: Физматлит, 2003.

TOPOLOGICAL DESCRIPTION OF ONE-DIMENSIONAL CLOSED SEPARABLE SETS

Yu.P. Virchenko, O.L. Shpilinskaya

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: virch@bsu.edu.ru
Single Crystal Institute of NASU,
Lenin Av., 60, Kharkov, Ukraine, e-mail: spilolga@isc.kharkov.ua

Abstract. The theorem concerning the general structure of probability distribution of random closed separable sets is proved when their embedding space is the segment of real axe.

Key words: random closed sets, separability sets, separable sets.