Таким образом можно сделать вывод, что алгоритм определения основного тона на основе производных первого и второго порядка адекватно определяет моменты прихода импульсов основного тона.

Литература

1. Сорокин В.Н. Цыплихин А.И. Сегментация речи на кардинальные элементы. – "Информационные процессы", 2006, Т. 6, № 3, с. 177-207.

2. Аграновский А.В., Леднов Д.А. Теоретические аспекты алгоритмов обработки и классификации речевых сигналов. М., Радио и связь, 2004. 164 с.

3. Kaiser J.F. Acoustics, Speech, and Signal Processing. ICASSP-90. Internat. Conf., 3-6 Apr 1990.

Выполнено при поддержке проекта РНП ВШ 8.2251.2011.

Статья поступила 11.12.2012

Д.т.н., проф. Е.Г. Жиляков, к.т.н. А.А. Черноморец
(НИУ «БелГУ»)

E.G. Zhilyakov, A.A. Chernomorets

АЛГОРИТМ МАСШТАБИРОВАНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ

IMAGE SCALING ALGORITHM

В статье разработан метод масштабирования изображений на основе субполосного анализа-синтеза, позволяющий учитывать частотные свойства изображений.

The image scaling algorithm based on subband analysis-synthesis is given in the article. It allows to take into account the frequency properties of images.

Ключевые слова: изображение, масштабирование, интерполяция, собственные векторы.

Key word: image, scaling, interpolation, eigenvectors.

При решении многих задач обработки изображений в цифровой форме зачастую возникает необходимость детального визуального анализа полученных изображений, что возможно осуществить при увеличении их масштаба. Во многих случаях для решения этой задачи не существует возможности получить новое изображение наблюдаемой сцены с большим разрешением, тогда для масштабирования изображений необходимо применять интерполяционные методы, заключающиеся в вычислении значений интерполирующей функции в некотором фиксированном наборе точек, которые располагаются между пикселями исходных изображений [1].

Изображение, подлежащее интерполяции, представим в виде прямоугольной матрицы вещественных чисел $U=(u_{m1,m2})$, $m_1=1,2,\dots,M_1$, $m_2=1,2,\dots,M_2$. Значения интерполирующего изображения $\hat{U}=(\hat{u}_{n1,n2})$, $n_1=1,2,\dots,N_1$, $n_2=1,2,\dots,N_2$, следует вычислять в D_1 и D_2 промежуточных точках между исходными пикселями вдоль соответствующих осей координат, то есть размерности исходного и интерполирующего изображений связаны следующими соотношениями

$$N_1 = D_1(M_1 - 1) + 1, \qquad (1)$$
$$N_2 = D_2(M_2 - 1) + 1.$$

При этом в узлах интерполяции должны выполняться следующие равенства

$$\hat{u}_{D_1(m_1-1)+1, D_2(m_2-1)+1} = u_{m_1 m_2}, \qquad (2)$$
$$m_1 = 1,2,\dots,M_1,\ m_2 = 1,2,\dots,M_2.$$

Для решения задачи интерполяции разработаны различные методы, среди которых в настоящее время наибольшее распространение получила интерполяция на основе бикубических сплайнов. Следует, однако, отметить, что такой подход не позволяет учесть частотные свойства исходных изображений $U=(u_{m1,m2})$, $m_1=1,2,\dots,M_1$, $m_2=1,2,\dots,M_2$, которые можно описать с помощью трансформанты Фурье

$$V(\omega_1,\omega_2) = \sum_{m_1=1}^{M_1} \sum_{m_2=1}^{M_2} u_{m_1 m_2} e^{-j\omega_1(m_1-1)} e^{-j\omega_2(m_2-1)}, \qquad (3)$$

где ω_1, ω_2 – пространственные круговые частоты.

Отсюда легко показать справедливость свойства периодичности по обоим аргументам характеристики (4)

$$V(\omega_1 + 2\pi k_1, \omega_2 + 2\pi k_2) = V(\omega_1,\omega_2). \qquad (4)$$

В свою очередь, трансформанта Фурье интерполирующего изображения

$$\hat{V}(x_1,x_2)=\sum_{i_1=1}^{N_1}\sum_{i_2=1}^{N_2}\hat{u}_{i_1 i_2}e^{-jx_1(i_1-1)/D_1}e^{-jx_2(i_2-1)/D_2}, \qquad (5)$$

будет также периодической функцией с периодами

$$X_1=2\pi D_1, \qquad (6)$$

$$X_2=2\pi D_2. \qquad (7)$$

Однако, ввиду соотношения (4), в идеале должно выполняться тождество

$$\hat{V}(x_1,x_2)\equiv 0, \qquad (8)$$

вне области пространственных частот

$$Z=\{(x_1,x_2)\,|\,(|\,x_1\,|\le\pi)\cup(|\,x_2\,|\le\pi), \qquad (9)$$

т.к. в исходном изображении не содержится информация о соответствующих частотных свойствах.

Из-за ограниченности размеров изображений в точности выполнить условие (8) невозможно (в силу соотношения неопределенности), однако можно добиться, в некотором смысле, наилучшего приближения к нему.

Выполнению условия (8) способствует представление интерполирующего изображения в виде

$$\hat{u}_{i_1 i_2}=u_{11}+\sum_{k_1=1}^{i_1-1}\sum_{k_2=1}^{i_2-1}f_{k_1 k_2}, \qquad (10)$$

при

$$i_1=2,3,\ldots,N_1,\quad i_2=2,3,\ldots,N_2,$$

и

$$\hat{u}_{1i}-u_{11}=\sum_{k_2=1}^{i-1}\varphi_{1,k_2},\quad i=2,3,\ldots,N_2, \qquad (11)$$

$$\hat{u}_{k1}-u_{11}=\sum_{k_1=1}^{k-1}\varphi_{k_1,1},\quad k=2,3,\ldots,N_1, \qquad (12)$$

когда речь идет о начальных строке и столбце.

При этом интерполяционные равенства принимают соответствующий вид

$$\hat{u}_{m_1 m_2} - u_{11} = \sum_{k_1=1}^{D_1(m_1-1)} \sum_{k_2=1}^{D_2(m_2-1)} f_{k_1 k_2}, \tag{13}$$

при

$$m_1 = 2,3,\ldots,M_1, \quad m_2 = 2,3,\ldots,M_2,$$

и

$$u_{1m_2} - u_{11} = \sum_{k_2=1}^{D_2(m_2-1)} \varphi_{k_2}, \quad m_2 = 2,3,\ldots,M_2, \tag{14}$$

$$u_{m_1 1} - u_{11} = \sum_{k_1=1}^{D_1(m_1-1)} \varphi_{k_1}, \quad m_1 = 2,3,\ldots,M_1, \tag{15}$$

когда речь идет о первых строке и столбце.

В самом деле, положим

$$\Phi_1(z) = \sum_{m=1}^{M_1-1} \varphi_m e^{-jz(m-1)/D_1}. \tag{16}$$

Тогда справедливо представление

$$\varphi_{k_1} = \frac{1}{2\pi D_1} \int_{-\pi D_1}^{\pi D_1} \Phi_1(z) e^{jz(k_1-1)/D_1} dz. \tag{17}$$

Постановка этого представления в (12) дает

$$\hat{u}_{k,1} - u_{11} = \frac{1}{2\pi D_1} \int_{-\pi D_1}^{\pi D_1} \Phi_1(z) \sum_{k_1=1}^{k-1} e^{jz(k_1-1)/D_1} dz, \quad k = 2,3,\ldots,N_1,$$

или

$$\hat{u}_{k,1} - u_{11} = \frac{1}{2\pi D_1} \int_{-\pi D_1}^{\pi D_1} \Phi_1(z) \frac{1 - e^{jz(k-1)/D_1}}{1 - e^{jz/D_1}} dz.$$

Тогда

$$\hat{u}_{k,1} - u_{11} = \frac{1}{2\pi D_1} \int_{-\pi D_1}^{\pi D_1} \Phi_1(z) \frac{\sin(z(k-1)/2D_1)}{\sin(z/2D_1)} e^{jzk_1/2D_1} e^{jz/D_1} dz. \tag{18}$$

Таким образом, при вычислении $\hat{u}_{k1}$ будут подавляться более высокочастотные компоненты спектра $\Phi_1(z)$.

Аналогичные выводы можно получить и для двумерных представлений вида (10).

Именно это свойство иллюстрирует целесообразность при менения представлений (10), (11) и (12) с точки зрения условия (8).

Следующий шаг заключается в выборе таких функций $f_{k1,k2}$, $\varphi_{1,k2}$ и $\varphi_{k1,1}$, которые изначально обладали бы малыми размерами областей определения спектров вида (16) или

$$G(z_1,z_2)=\sum_{m_1=1}^{M_1-1}\sum_{m_2=1}^{M_2-1} f_{m_1m_2}e^{-jz_1(m_1-1)/D_2}e^{-jz_2(m_2-1)/D_1} \qquad (19)$$

Для простоты рассмотрим сначала одномерный вектор, имея в виду (12), (16) и (17).

Прежде всего, отметим, что изображения регистрируются с помощью физических приборов. Поэтому упомянутая выше матрица вещественных чисел U является результатом выборки значений некоторой двумерной функции $u(t_1,t_2)$ в точках, заданных с шагом Δ_1 и Δ_2 так, что

$$u_{m_1m_2}=u(m_1\Delta_1;m_2\Delta_2). \qquad (20)$$

При этом, в силу физической природы этой функции, она является положительной и бесконечное число раз дифференцируемой, а соотношения (10), (11) и (12) являются оценками интегралов

$$u(t_1,t_2)=u_{11}t\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} z(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2, \qquad (21)$$

$$u(0,t_2)=u_{11}t\int_0^{t_2} z(0,\tau_2)d\tau_2, \qquad (22)$$

$$u(t_1,0)=u_{11}t\int_0^{t_1} z(\tau_1,0)d\tau_1, \qquad (23)$$

$$0\le t_1\le (M_1-1)\Delta_1,$$
$$0\le t_2\le (M_2-1)\Delta_2,$$

в которых подынтегральные функции имеют смысл производных, а следовательно, также являются бесконечное число раз дифференцируемыми.

Любую одномерную бесконечное число раз дифференцируемую функцию можно представить в виде линейной комбинации функций $g_k^{\Omega}(\tau)$, т.е.

$$\varphi(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k g_k^{\Omega}(\tau),\ 0 \le \tau \le T, \qquad (24)$$

которые являются собственными функциями субполосного ядра так, что имеет место

$$\lambda_k^{\Omega} g_k^{\Omega}(t) = \int_0^T A_{\Omega}(t-\tau) g_k^{\Omega}(\tau) d\tau, \qquad (25)$$

где

$$A_{\Omega}(\tau) = \sin(\Omega\tau)/\pi\tau, \qquad (26)$$

$$\lambda_k > \lambda_{k+1} > 1, \quad k \in 1,2,...$$

Ω – параметр, размерность $[\Omega]$ которого удовлетворяет условию

$$[\Omega] = 1/[t]. \qquad (27)$$

Иными словами, в случае изображений величину Ω можно считать круговой пространственной частотой (ПЧ).

В качестве аппроксимации представления (24) предлагается использовать

$$\varphi_i = \sum_{k=1}^{N-1} \beta_k g_{ik}^{\overline{\Omega}}, \qquad (28)$$

где $g_{ik}^{\overline{\Omega}}$ – компоненты соответствующих собственных векторов субполосной матрицы [2]

$$\lambda_k^{\overline{\Omega}} \vec{g}_k^{\overline{\Omega}} = A_{\overline{\Omega}} \vec{g}_k^{\overline{\Omega}}, \qquad (29)$$

$$\overline{\Omega} = \Omega\Delta;$$

$$A_{\overline{\Omega}} = \{a_{im}\} = \left\{ \frac{\sin(\overline{\Omega}(i-m))}{\pi(i-m)} \right\}, \qquad (30)$$

$$i,m = 1,..,N,$$

где: N – некоторая размерность.

В частности, такие аппроксимации предлагается использовать для реализации соотношений (11) и (12), которым можно придать вид

$$\hat{\vec{u}}_{1\bullet} - u_{11}\vec{e}_2 = B_2 Q_2 \vec{\beta}_2, \qquad (31)$$

$$\hat{\vec{u}}_{\bullet 1} - u_{11}\vec{e}_1 = B_1 Q_1 \vec{\beta}_1, \qquad (32)$$

где:

$$Q_2 = \left(\vec{q}_1^{\,\overline{\Omega}_2}, \vec{q}_2^{\,\overline{\Omega}_2}, ..., \vec{q}_{L_2}^{\,\overline{\Omega}_2}\right);$$

$$Q_1 = \left(\vec{q}_1^{\,\overline{\Omega}_1}, ..., \vec{q}_{L_1}^{\,\overline{\Omega}_1}\right),$$

т.е. Q_1 и Q_2 – матрицы, состоящие из L_1 и L_2 собственных векторов субполосных матриц $A_{\overline{\Omega}2}$ и $A_{\overline{\Omega}1}$; B_1 и B_2 – квадратные нижние треугольные матрицы, состоящие из единиц и нулей, размерностей $(N_1-1)\text{x}(N_1-1)$ и $(N_2-1)\text{x}(N_2-1)$ соответственно.

$\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ – состоящие из единиц векторы размерностей (N_1-1) и (N_2-1) соответственно,

$$\overline{\beta}_1 = (\beta_{11}, \beta_{21}, ..., \beta_{L_1,1})^T,$$

$$\overline{\beta}_2 = (\beta_{12}, ..., \beta_{1,L_2})^T,$$

$$\hat{\vec{u}}_{1\bullet} = (\hat{u}_{12}, u_{13}, ..., \hat{u}_{1N_2})^T,$$

$$\hat{\vec{u}}_{\bullet 1} = (\hat{u}_{21}, u_{31}, ..., \hat{u}_{N_1 1})^T.$$

Тогда интерполяционные равенства (14) и (15) принимают вид системы линейных уравнений

$$\vec{u}_{1\bullet} - u_{11} \cdot \vec{\gamma}_2 = \hat{B}_2 Q_2 \vec{\beta}_2, \tag{33}$$

$$\vec{u}_{\bullet 1} - u_{11} \cdot \vec{\gamma}_1 = \hat{B}_1 Q_1 \vec{\beta}_1, \tag{34}$$

где: $\vec{u}_{1\bullet} = (u_{12}, ..., u_{1M_2})^T$; $\vec{u}_{\bullet 1} = (u_{21}, ..., u_{M_1,1})^T$,

$\vec{\gamma}_1$, $\vec{\gamma}_2$ – векторы, размерностей M_1-1 и M_2-1, состоящие из единиц,

$\hat{B}_1$, $\hat{B}_2$ – матрицы размерностей $(M_1-1)\text{x}(N_1-1)$ и $(M_2-1)\text{x}(N_2-1)$ соответственно, состоящие из строк матриц B_1 и B_2 с номерами D_1+1, $2D_1+1,...$, $(M_1-1)D_1+1$ и D_2+1, $2D_2+1,...$, $(M_2-1)D_2+1$, соответственно.

Ввиду ортогональности собственных векторов субполосных матриц матрицы $C_1 = \hat{B}_1 Q_1$ и $C_2 = \hat{B}_2 Q_2$ будут иметь ранги $\min(M_1-1, L_1)$ и $\min(M_2-1, L_2)$, соответственно. Поэтому для точного выполнения интерполяционных равенств (33) и (34) необходимо положить

$$L_1 = M_1 - 1, \tag{35}$$

$$L_2 = M_2 - 1, \tag{36}$$

что позволяет получить соотношения для искомых векторов коэффициентов

$$\vec{\beta}_2 = (\hat{B}_2 Q_2)^{-1}(\vec{u}_{1\bullet} - u_{11}\vec{\gamma}_1), \qquad (37)$$

$$\vec{\beta}_1 = (\hat{B}_1 Q_1)^{-1}(\vec{u}_{\bullet 1} - u_{11}\vec{\gamma}_1). \qquad (38)$$

Это и завершает рассмотрение задачи интерполяции первого столбца и первой стоки исходного изображения в окончательном виде

$$\vec{u}_{\bullet 1} = u_{11}\vec{e}_1 + B_2 Q_2 \cdot (B_2 Q_2)^{-1}\left(\vec{u}_{\bullet 1} - u_{11}\vec{\gamma}_2\right), \qquad (39)$$

$$\vec{u}_{1\bullet} = u_{11}\vec{e}_2 + B_1 Q_1 \cdot (B_1 Q_1)^{-1}\left(\vec{u}_{1\bullet} - u_{11}\vec{\gamma}_1\right). \qquad (40)$$

Двумерная интерполирующая функция вида (10) по аналогии представляется в виде матрицы

$$\hat{U}_u = u_{11}\vec{e}_1\vec{e}_2^{\,T} + B_1 Q_1 \Phi (B_2 Q_2)^T, \qquad (41)$$

где матрица $\Phi=\{f_{ik}\}$, $i=1,2,\ldots,M_1-1$, $k=1,2,\ldots,M_2-1$ определяется на основе уравнения

$$U_u - u_{11}\vec{\gamma}_1\vec{\gamma}_2^{\,T} = \hat{B}_1 Q_1 \Phi Q_2^T \hat{B}_2^{\,T}. \qquad (42)$$

Здесь

$$U_u = \{u_{ik}\},\ i = 2,\ldots,M_1,\ k = 2,\ldots,M_1.$$

Из (40) в виду не особенности квадратных матриц

$\hat{B}_1 Q_1$ и $\hat{B}_2 Q_2$

при выполнении условий (35) и (36) получаем

$$\Phi = (\hat{B}_1 Q_1)^{-1}(u_u - u_{11}\vec{\gamma}_1\vec{\gamma}_2^{\,T})(Q_2^{\,T}\hat{B}_2^{\,T})^{-1}. \qquad (43)$$

Так, что соотношение (41) принимает вид

$$\hat{U}_u = u_{11}\vec{e}_1\vec{e}_2^{\,T} + B_1 Q_1 (\hat{B}_1 Q_1)^{-1}(u_u - u_{11}\vec{\gamma}_1\vec{\gamma}_2^{\,T})(Q_2^{\,T}\hat{B}_2^{\,T})^{-1} Q_2^{\,T} B_2^{\,T}. \qquad (44)$$

Существенное значение имеет выбор величины параметров $\overline{\Omega}_1$ и $\overline{\Omega}_2$ в определении (30). Очевидно, что его величина должна быть связана с условием (8). Имея в виду известные свойства собственных векторов и чисел субполосных матриц [2.3], а также основные положения теории дискретизации, можно показать, что для субполосных матриц следует положить

$$\overline{\Omega}_1 = \pi / 2D_1, \qquad (45)$$

$$\overline{\Omega}_2 = \pi / 2D_2. \qquad (46)$$

Следует отметить, что наряду с неравенствами (14) и (15) интерполяционные векторы вида (41) и (42) удовлетворяют вариационным условиям

$$\int\limits_{x\in\overline{\Omega}_1} \left|\Phi_1(x)\right|^2 dx / 2\pi = \min, \tag{47}$$

$$\int\limits_{x\in\overline{\Omega}_2} \left|\Phi_2(x)\right|^2 dx / 2\pi = \min, \tag{48}$$

т.е. обладают максимальной концентрацией энергий в выбранных частотных интервалах векторов, аппроксимирующих производные.

Для двумерной интерполяционной матрицы (42) наряду с (13) имеет место

$$\int\limits_{(x_1\in\overline{\Omega}_1)\cap(x_2\in\overline{\Omega}_2)} \left|\Phi(x_1 x_2)\right|^2 dx_1 dx_2 / 4\pi^2 = \min, \tag{49}$$

$\Phi(x_1,x_2)$ – двумерная трансформанта Фурье матрицы значений интерполирующей двумерной функции.

Литература

1. Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений. М., Техносфера, 2006. 1072 с.

2. Жиляков Е.Г., Белов С.П., Черноморец А.А. Вариационные методы анализа сигналов на основе частотных представлений. – "Вопросы радиоэлектроники", сер. ЭВТ, 2010, вып. 1, с. 10-25.

3. Жиляков Е.Г., Белов С.П., Черноморец А.А. Вариационные методы синтеза сигналов на основе частотных представлений. – "Вопросы радиоэлектроники", сер. ЭВТ, 2010, вып. 1, с. 5-10.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 12-07-00257-а.

Статья поступила 11.12.2012

К.т.н. Т.Н. Балабанова, к.т.н. И.И. Чижов, Т.С. Стецюк
(НИУ «БелГУ»)

T.N. Balabanova, I.I. Chizhov, T.S. Stecuk

ОБ АЛГОРИТМАХ ПОВЫШЕНИЯ ВИЗУАЛЬНОГО КАЧЕСТВА ИЗОБРАЖЕНИЙ