УДК 517.95

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА-БИЦАДЗЕ С НЕИЗВЕСТНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Г.Ю. Удалова [16)]

Самарский государственный архитектурно-строительный университет,
ул. Молодогвардейская, 194, Самара, 443001, Россия, e-mail: yeyeg@yandex.ru

Аннотация. В работе изучена задача для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа в прямоугольной области с разными неизвестными правыми частями. Установлен критерий единственности решения этой обратной задачи. Само решение построено в виде суммы ряда по системе собственных функций соответствующей одномерной задачи на собственные значения. Доказана устойчивость решения по граничным функциям.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, обратная задача, спектральный метод, единственность, существование, устойчивость.

1. Введение. Рассмотрим уравнение Лаврентьева-Бицадзе с разными неизвестными правыми частями

$$Lu \equiv u_{xx} + (\operatorname{sgn} y)u_{yy} = f(x,y) = \begin{cases} f_1(x), & y > 0\,; \\ f_2(x), & y < 0 \end{cases} \tag{1}$$

в прямоугольной области $D = \{(x,y) \mid 0 < x < 1, -\alpha < y < \beta\}$, где α, β – заданные положительные числа, и связанную с ним следующую задачу.

Обратная задача. Найти в области D функции $u(x,y)$ и $f(x,y)$, удовлетворяющие условиям:

$$u(x,y) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_- \cup D_+)\,, \qquad\qquad f_i(x) \in C(0,1) \cap L[0,1]\,; \tag{2}$$

$$Lu(x,y) = f(x,y)\,, \qquad (x,y) \in D_- \cup D_+\,; \tag{3}$$

$$u_x(0,y) = u_x(1,y) = 0\,, \qquad -\alpha \leqslant y \leqslant \beta\,; \tag{4}$$

$$u(x,-\alpha) = \psi(x), \quad u(x,\beta) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1\,; \tag{5}$$

$$u_y(x,-\alpha) = g(x), \quad u_y(x,\beta) = h(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1\,; \tag{6}$$

где $\psi(x)$, $\varphi(x)$, $g(x)$, $h(x)$ – заданные достаточно гладкие функции, $\psi'(0) = \psi'(1) = \varphi'(0) = \varphi'(1) = 0$, $D_- = D \cap \{y < 0\}$, $D_+ = D \cap \{y > 0\}$.

Вопросы разрешимости обратных задач для различных типов дифференциальных уравнений в частных производных изучались в работах А.Н. Тихонова [1], М.М. Лаврентьева [2], В.К. Иванова [3] и др. Подробная библиография работ, посвященных теории

[16] Удалова Г.Ю., ассистент Самарского государственного архитектурно-строительного университета.

обратных задач, приведена в монографии А.М. Денисова [4].

К.Б. Сабитов [5] предложил новый подход для обоснования существования и единственности решения прямых задач для уравнений смешанного типа в прямоугольной области - метод спектральных разложений. Этим методом изучены обратные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа [6] – [8] и эллиптико-гиперболического типа [9] – [12].

В настоящей работе в отличии от работ [9] – [12] изучается обратная задача (2) – (6) для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа (1) с разными правыми частями и граничными условиями второго рода. Установлен критерий единственности решения задачи, и само решение построено в виде суммы ряда Фурье по собственным функциям соответствующей одномерной задачи на собственные значения. Отметим, что аналогичная задача для уравнения (1) в случае $f_1(x) = f_2(x) = f(x)$ изучена в работе [12].

2. Критерий единственности решения задачи. Разделяя переменные в уравнении (1) при $f(x,y) \equiv 0$, получим относительно функции $X(x)$ спектральную задачу:

$$X''(x) + \mu X(x) = 0\,, \quad 0 < x < 1\,, \tag{7}$$

$$X'(0) = X'(1) = 0\,, \tag{8}$$

где μ – постоянная разделения. Задача (7), (8) имеет следующую систему собственных чисел и собственных функций:

$$\sqrt{\mu_k} = \pi k\,, \qquad k = 0, 1, 2, \dots\ ,$$

$$X_0(x) = 1\,, \quad X_k(x) = \sqrt{2}\cos \pi k x\,, \quad k = 1, 2, \dots\ . \tag{9}$$

Система (9) ортонормирована, полна и образует базис в пространстве $L_2[0,1]$.

Пусть существует решение задачи (2) – (6). Будем искать его в виде суммы ортогональных рядов:

$$u(x,y) = u_0 + \sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty} u_k(y)\cos \pi k x\,, \tag{10}$$

$$f_i(x) = f_{i,0} + \sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty} f_{i,k}\cos \pi k x\,, \quad i = 1, 2\,, \tag{11}$$

где

$$u_0(y) = \int_0^1 u(x,y)\,dx, \tag{12}$$

$$u_k(y) = \sqrt{2}\int_0^1 u(x,y)\cos \pi k x\,dx,\ k \in N, \tag{13}$$

$$f_{i,0} = \int_0^1 f_i(x)\,dx\,, \quad i = 1, 2\,, \tag{14}$$

$$f_{i,k} = \sqrt{2}\int_0^1 f_i(x)\cos\pi kx\,dx,\ i=1,2\,,\quad k\in N\,. \tag{15}$$

На основании (12) и (13) введем следующие вспомогательные функции:

$$u_{0,\varepsilon}(y) = \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} u(x,y)\,dx\,, \tag{16}$$

$$u_{k,\varepsilon}(y) = \sqrt{2}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} u(x,y)\cos\pi kx\,dx,\quad k\in N\,. \tag{17}$$

Дважды дифференцируя функции (16) и (17) при $y>0$ и $y<0$ и учитывая уравнение (1), получим

$$u''_{0,\varepsilon}(y) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} u_{yy}\,dx = \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} f_1(x)\,dx - \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} u_{xx}\,dx\,, & y>0\,,\\[2ex] \displaystyle\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} u_{yy}\,dx = -\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} f_2(x)\,dx + \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} u_{xx}\,dx\,, & y<0\,, \end{cases} \tag{18}$$

$$u''_{k,\varepsilon}(y) = \begin{cases} \displaystyle\sqrt{2}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} u_{yy}\cos\pi kx\,dx = \sqrt{2}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} f_1(x)\cos\pi kx\,dx - \sqrt{2}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} u_{xx}\cos\pi kx\,dx\,, & y>0,\\[2ex] \displaystyle\sqrt{2}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} u_{yy}\cos\pi kx\,dx = -\sqrt{2}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} f_2(x)\cos\pi kx\,dx + \sqrt{2}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} u_{xx}\cos\pi kx\,dx\,, & y<0. \end{cases} \tag{19}$$

Интегрируя последние слагаемые в формулах (18) и (19) по частям два раза и с учетом условий (4) переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$, получим

$$u''_0(y) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 f_1(x)\,dx\,, & y>0\,,\\[2ex] \displaystyle-\int_0^1 f_2(x)\,dx\,, & y<0\,; \end{cases} \tag{20}$$

$$u''_k(y) = \begin{cases} \displaystyle\sqrt{2}(\pi k)^2\int_0^1 u(x,y)\cos\pi kx\,dx + \sqrt{2}\int_0^1 f_1(x)\cos\pi kx\,dx\,, & y>0\,,\\ \displaystyle-\sqrt{2}(\pi k)^2\int_0^1 u(x,y)\cos\pi kx\,dx - \sqrt{2}\int_0^1 f_2(x)\cos\pi kx\,dx\,, & y<0\,. \end{cases} \tag{21}$$

Отсюда следует, что функции $u_k(y)$, $k \in N_0 = N \cup \{0\}$, являются решениями следующих дифференциальных уравнений:

$$u_0''(y) = f_{1,0}\,, \qquad y > 0\,, \tag{22}$$
$$u_0''(y) = -f_{2,0}\,, \qquad y < 0\,, \tag{23}$$
$$u_k''(y) - (\pi k)^2 u_k(y) = f_{1,k}\,, \qquad y > 0\,, \tag{24}$$
$$u_k''(y) + (\pi k)^2 u_k(y) = -f_{2,k}\,, \qquad y < 0\,. \tag{25}$$

$$u_0(y) = \begin{cases} f_{1,0}\dfrac{y^2}{2} + a_0 y + b_0\,, & y > 0\,; \\ -f_{2,0}\dfrac{y^2}{2} + c_0 y + d_0\,, & y < 0\,, \end{cases} \tag{26}$$

Дифференциальные уравнения (22) – (25) имеют общие решения

$$u_k(y) = \begin{cases} a_k e^{\pi k y} + b_k e^{-\pi k y} - \dfrac{f_{1,k}}{(\pi k)^2}\,, & y > 0\,; \\ c_k \cos \pi k y + d_k \sin \pi k y - \dfrac{f_{2,k}}{(\pi k)^2}\,, & y < 0, \quad k \in N, \end{cases} \tag{27}$$

где a_k, b_k, c_k, d_k – произвольные постоянные, $k \in N_0$.

В силу (2) решения (26), (27) должны удовлетворять условиям склеивания:

$$u_k(0-0) = u_k(0+0), \quad u_k'(0-0) = u_k'(0+0), \quad k \in N_0.$$

Удовлетворяя их этим условиям, получим $d_0 = b_0$, $c_0 = a_0$, $c_k = a_k + b_k + \dfrac{f_{2,k} - f_{1,k}}{(\pi k)^2}$, $d_k = a_k - b_k$. Тогда решения (26), (27) примут вид:

$$u_0(y) = \begin{cases} f_{1,0}\dfrac{y^2}{2} + a_0 y + b_0\,, & y > 0\,; \\ -f_{2,0}\dfrac{y^2}{2} + a_0 y + b_0\,, & y < 0\,, \end{cases} \tag{28}$$

$$u_k(y) = \begin{cases} a_k e^{\pi k y} + b_k e^{-\pi k y} - \dfrac{f_{1,k}}{(\pi k)^2}\,, & y > 0; \\ \left(a_k + b_k + \dfrac{f_{2,k} - f_{1,k}}{(\pi k)^2}\right) \cos \pi k y + (a_k - b_k) \sin \pi k y - \dfrac{f_{2,k}}{(\pi k)^2}\,, & y < 0. \end{cases} \tag{29}$$

На основании (5), (6) и (12), (13) имеем

$$u_k(-\alpha) = \psi_k, \quad u_k(\beta) = \varphi_k, \quad u_k'(-\alpha) = g_k, \quad u_k'(\beta) = h_k, \tag{30}$$

где ψ_k, φ_k, g_k, h_k – коэффициенты разложения функций $\psi(x)$, $\varphi(x)$, $g(x)$, $h(x)$ соответственно в ряд по системе (9), то есть

$$\psi_0 = \int_0^1 \psi(x)\,dx, \quad \psi_k = \sqrt{2}\int_0^1 \psi(x)\cos\pi kx\,dx, \tag{31}$$

$$\varphi_0 = \int_0^1 \varphi(x)\,dx, \quad \varphi_k = \sqrt{2}\int_0^1 \varphi(x)\cos\pi kx\,dx, \tag{32}$$

$$g_0 = \int_0^1 g(x)\,dx, \quad g_k = \sqrt{2}\int_0^1 g(x)\cos\pi kx\,dx, \tag{33}$$

$$h_0 = \int_0^1 h(x)\,dx, \quad h_k = \sqrt{2}\int_0^1 h(x)\cos\pi kx\,dx, \quad k\in N. \tag{34}$$

Удовлетворим решения (28), (29) условиям (30). Тогда получим относительно неизвестных a_k, b_k и $f_{1,k}$, $f_{2,k}$, $k\in N_0$, системы линейных уравнений

$$\begin{cases} -\alpha a_0 + b_0 - \dfrac{\alpha^2}{2} f_{2,0} = \psi_0, \\ \beta a_0 + b_0 + \dfrac{\beta^2}{2} f_{1,0} = \varphi_0, \\ a_0 + \alpha f_{2,0} = g_0, \\ a_0 + \beta f_{1,0} = h_0, \end{cases} \tag{35}$$

$$\begin{cases} (\cos\pi k\alpha - \sin\pi k\alpha)a_k + (\cos\pi k\alpha + \sin\pi k\alpha)b_k - \dfrac{\cos\pi k\alpha}{(\pi k)^2} f_{1,k} + \dfrac{\cos\pi k\alpha - 1}{(\pi k)^2} f_{2,k} = \psi_k\,, \\ e^{\pi k\beta}a_k + e^{-\pi k\beta}b_k - \dfrac{1}{(\pi k)^2} f_{1,k} = \varphi_k\,, \\ (\sin\pi k\alpha + \cos\pi k\alpha)a_k + (\sin\pi k\alpha - \cos\pi k\alpha)b_k - \dfrac{\sin\pi k\alpha}{(\pi k)^2} f_{1,k} + \dfrac{\sin\pi k\alpha}{(\pi k)^2} f_{2,k} = \dfrac{g_k}{\pi k}\,, \\ e^{\pi k\beta}a_k - e^{-\pi k\beta}b_k = \dfrac{h_k}{\pi k}\,. \end{cases} \tag{36}$$

Определители $\Delta_{\alpha\beta}(0)$, $\Delta_{\alpha\beta}(k)$ систем (35), (36) равны соответственно:

$$\frac{\alpha\beta}{2}\Delta_{\alpha\beta}(0) = \frac{1}{2}\alpha\beta(\alpha+\beta)\,, \tag{37}$$

$$\frac{2}{(\pi k)^4}\Delta_{\alpha\beta}(k) = \frac{2}{(\pi k)^4}(-\sin\pi k\alpha + \operatorname{sh}\pi k\beta + \sin\pi k\alpha\operatorname{ch}\pi k\beta - \cos\pi k\alpha\operatorname{sh}\pi k\beta)\,. \tag{38}$$

Очевидно, что $\Delta_{\alpha\beta}(0) > 0$. Тогда при условии, что при всех $k\in N$

$$\Delta_{\alpha\beta}(k) \neq 0\,, \tag{39}$$

системы (35) и (36) имеют единственные решения:

$$a_0 = \frac{2(\varphi_0 - \psi_0) - \alpha g_0 - \beta h_0}{\Delta_{\alpha\beta}(0)}, \tag{40}$$

$$b_0 = \frac{2(\beta\psi_0 + \alpha\varphi_0) + \alpha\beta(g_0 - h_0)}{\Delta_{\alpha\beta}(0)}, \tag{41}$$

$$f_{1,0} = \frac{2(\psi_0 - \varphi_0) + \alpha g_0 + (\alpha + 2\beta)h_0}{\beta\Delta_{\alpha\beta}(0)}, \tag{42}$$

$$f_{2,0} = \frac{2(\psi_0 - \varphi_0) + (2\alpha + \beta)g_0 + \beta h_0}{\alpha\Delta_{\alpha\beta}(0)}, \tag{43}$$

$$a_k = \Delta^{-1}_{\alpha\beta}(k)\Big(e^{-\pi k\beta}\sin\pi k\alpha(\psi_k - \varphi_k) + (1 - \cos\pi k\alpha)e^{-\pi k\beta}g_k/\pi k\Big) + \\ + \ \Delta^{-1}_{\alpha\beta}(k)\Big(1 + \sin\pi k\alpha - \cos\pi k\alpha - e^{-\pi k\beta}\sin\pi k\alpha\Big)h_k/\pi k, \tag{44}$$

$$b_k = \Delta^{-1}_{\alpha\beta}(k)\Big(\sin\pi k\alpha e^{\pi k\beta}(\psi_k - \varphi_k) + (1 - \cos\pi k\alpha)e^{\pi k\beta}g_k/\pi k\Big) + \\ + \ \Delta^{-1}_{\alpha\beta}(k)\Big(1 - \sin\pi k\alpha - \cos\pi k\alpha + \sin\pi k\alpha e^{\pi k\beta}\Big)h_k/\pi, \tag{45}$$

$$f_{1,k} = \Delta^{-1}_{\alpha\beta}(k)(\pi k)^2\left[\sin\pi k\alpha\cdot\psi_k + (\cos\pi k\alpha\,\mathrm{sh}\,\pi k\beta - \sin\pi k\alpha\,\mathrm{ch}\,\pi k\beta - \mathrm{sh}\,\pi k\beta)\varphi_k\right] + \\ + \ \Delta^{-1}_{\alpha\beta}(k)\pi k\left[(1 - \cos\pi k\alpha)g_k + (\sin\pi k\alpha\,\mathrm{sh}\,\pi k\beta - \cos\pi k\alpha\,\mathrm{ch}\,\pi k\beta + \mathrm{ch}\,\pi k\beta)h_k\right], \tag{46}$$

$$f_{2,k} = \Delta^{-1}_{\alpha\beta}(k)(\pi k)^2\left[(\sin\pi k\alpha + \cos\pi k\alpha\,\mathrm{sh}\,\pi k\beta - \sin\pi k\alpha\,\mathrm{ch}\,\pi k\beta)\psi_k - \mathrm{sh}\,\pi k\beta\varphi_k\right] + \\ + \ \Delta^{-1}_{\alpha\beta}(k)(\pi k)\left[(-\cos\pi k\alpha + \sin\pi k\alpha\,\mathrm{sh}\,\pi k\beta - \cos\pi k\alpha\,\mathrm{ch}\,\pi k\beta)g_k + (\mathrm{ch}\,\pi k\beta - 1)h_k\right]. \tag{47}$$

Таким образом, функции (28) и (29) построены однозначно. Докажем теперь единственность решения задачи (2) – (6). Пусть $\psi(x) = \varphi(x) = g(x) = h(x) \equiv 0$ и выполнены условия (39). Тогда в силу (31) – (34) $\psi_k = \varphi_k = g_k = h_k \equiv 0$, $k \in N_0$, а значит, системы (35) (36) имеет нулевое решение: $a_k = b_k = f_{1,k} = f_{2,k} \equiv 0$, $k \in N_0$. Тогда из равенств (12) – (15) получаем, что при всех $y \in [-\alpha, \beta]$

$$\int_0^1 u(x,y)\,dx = 0\,, \quad \int_0^1 f_i(x)\,dx = 0\,,\ i = 1,2\,,$$

$$\sqrt{2}\int_0^1 u(x,y)\cos\pi kx\,dx = 0\,, \quad \sqrt{2}\int_0^1 f_i(x)\cos\pi kx\,dx = 0\,,\ i = 1,2\,, \quad k \in N\,.$$

Отсюда в силу полноты системы (9) в пространстве $L_2[0,1]$ и условий (2) следует, что $u(x,y) \equiv 0$ и $f(x,y) \equiv 0$ в $\overline{D}$.

Пусть для некоторых α, β и $k = p$ выражение $\Delta_{\alpha\beta}(p) = 0$, тогда задача (2) – (6), где $\varphi(x) = \psi(x) = g(x) = h(x) \equiv 0$, имеет ненулевое решение

$$u_p(x,y) = u_p(y)\cos\pi px\,, \tag{48}$$

$$u_p(y)=\begin{cases}\dfrac{\sin\pi p\alpha(\operatorname{ch}\pi p(y-\beta)-1)}{(\pi p)^2\overline{\Delta}_p}\,f_{2,p}\,, & y>0\,,\\[2ex] \dfrac{\operatorname{sh}\pi p\beta\cos\pi p(y+\alpha)-\overline{\Delta}(p)}{(\pi p)^2\overline{\Delta}_p}\,f_{2,p}\,, & y<0\,,\end{cases} \tag{49}$$

$$f_{1,p}(x)=\frac{\sin\pi p\alpha}{\overline{\Delta}(p)}\,f_{2,p}\cos\pi px\,, \tag{50}$$

$$f_{2,p}(x)=f_{2,p}\cos\pi px\,, \tag{51}$$

где $\overline{\Delta}(p)=\cos\pi p\alpha\operatorname{sh}\pi p\beta+\sin\pi p\alpha-\sin\pi p\alpha\operatorname{ch}\pi p\beta$, $f_{2,p}$ – произвольная, отличная от нуля постоянная.

Естественно возникает вопрос при каких α и β выражение $\Delta_{\alpha\beta}(k)$ обращается в нуль. Для этого представим $\Delta_{\alpha\beta}(k)$ в следующем виде:

$$\Delta_{\alpha\beta}(k)=4\sin\frac{\pi k\alpha}{2}\operatorname{sh}\frac{\pi k\beta}{2}\sqrt{\operatorname{ch}\pi k\beta}\sin\left(\frac{\pi k\alpha}{2}+\theta_k\right), \tag{52}$$

где $\theta_k=\arcsin\dfrac{\operatorname{sh}\pi k\beta/2}{\sqrt{\operatorname{ch}\pi k\beta}}\to\dfrac{\pi}{4}$ при $k\to+\infty$. Из представления (52) видно, что выражение $\Delta_{\alpha\beta}(k)=0$ тогда и только тогда, когда $\sin\dfrac{\pi k\alpha}{2}=0$ или $\sin\left(\dfrac{\pi k\alpha}{2}+\theta_k\right)=0$. В результате, получаем две серии корней $\Delta_{\alpha\beta}(k)=0$: $\alpha_{n_1}=\dfrac{2n_1}{k}$, $\alpha_{n_2}=\dfrac{2n_2}{k}-\dfrac{2\theta_k}{\pi k}$, $n_1,n_2\in N$, $k=1,2,\ldots$. Таким образом, доказана следующая

Теорема 1. *Если существует решение задачи (2) – (6, то оно единственно тогда и только тогда, когда выполнены условия (39) при всех $k\in N$.*

3. Существование решения задачи. Решение задачи (2) – (6) при условии (39) получено формально в виде сумм ортогональных рядов (10), (11). Поскольку $\Delta_{\alpha\beta}(k)$ входит в знаменатель коэффициентов этих рядов, то для обоснования существования решения задачи (2) – (6) необходимо показать существование чисел α и β таких, что при больших k выражение $\Delta_{\alpha\beta}(k)$ отделено от нуля. В противном случае может возникнуть проблема малых знаменателей [6, 13].

Для обоснования существования решения докажем следующее утверждение.

Лемма 1. *Если $\alpha>0$ является алгебраическим числом степени $n\geqslant 2$, то существуют положительные постоянные β_0 и C_0, вообще говоря зависящие от α, такие, что при всех $\beta>\beta_0$ и $k\in N$ справедливы оценки*

$$|\Delta_{\alpha\beta}(k)|\geqslant e^{\pi k\beta}\frac{C_0}{k^{2+\varepsilon}}\,,\quad n>2\,, \tag{53}$$

$$|\Delta_{\alpha\beta}(k)|\geqslant e^{\pi k\beta}\frac{C_0}{k^{2}}\,,\quad n=2\,, \tag{54}$$

где $\varepsilon>0$ – достаточно малое число.

□ Представим выражение (52) в виде:

$$\Delta_{\alpha\beta}(k) = e^{\pi k\beta}\sqrt{2}\left(1 - e^{-\pi k\beta}\right)\sqrt{1 + e^{-2\pi k\beta}}\ \sin \pi k\alpha_1 \sin\left(\pi k\alpha_1 + \theta_k\right), \tag{55}$$

где $\alpha_1 = \alpha/2$. Заметим, что для любых $k \in N$

$$2 > \sqrt{2}\left(1 - e^{-\pi k\beta}\right)\sqrt{1 + e^{-2\pi k\beta}} > \sqrt{2}\left(1 - e^{-\pi\beta}\right) = C_1, \tag{56}$$

C_i здесь и далее положительные постоянные, вообще говоря, зависящие от β и α.

Рассмотрим теперь множитель $\sin \pi k\alpha_1$ выражения (55) и представим в виде

$$|\sin \pi k\alpha_1| = |\sin(\pi k\alpha_1 - \pi n)| = \left|\sin \pi k\left(\alpha_1 - \frac{n}{k}\right)\right|, \quad n \in N.$$

Для любого $k \in N$ существует натуральное n такое, что

$$\left|\alpha_1 - \frac{n}{k}\right| < \frac{1}{2k}. \tag{57}$$

В самом деле, чтобы выполнялось неравенство (57) достаточно положить

$$n = \begin{cases} [\alpha_1 k], & \{\alpha_1 k\} < \dfrac{1}{2}, \\[2ex] [\alpha_1 k] + 1, & \{\alpha_1 k\} > \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Из теории чисел известно [14, с.268], что для любого алгебраического числа α_1 степени $n \geqslant 2$ и произвольного положительного числа γ найдется положительное число C_2, зависящее от α и γ такое, что при любых целых p, q $(q > 0)$ будет иметь место неравенство

$$\left|\alpha_1 - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{C_2}{q^{2+\gamma}}. \tag{58}$$

Пусть $n \in N$ такое, что выполнено неравенство (57). Отсюда имеем

$$\pi k\left|\alpha_1 - \frac{n}{k}\right| < \frac{\pi}{2}. \tag{59}$$

Тогда с учетом неравенства

$$\sin x > \frac{2}{\pi}x, \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \tag{60}$$

и оценки (58) при всех $k \in N$ будем иметь

$$\sin\left(\pi k\left|\alpha_1 - \frac{n}{k}\right|\right) > 2k\left|\alpha_1 - \frac{n}{k}\right| > \frac{2C_2}{k^{1+\gamma}}. \tag{61}$$

Теперь рассмотрим следующий множитель выражения (55):

$$|\sin(\pi k\alpha_1 + \theta_k)| = |\sin(\pi k\alpha_1 - \pi n + \theta_k)| = \left|\sin\left[\pi k\left(\alpha_1 - \frac{n}{k}\right) + \theta_k\right]\right|.$$

Функции $y = \arcsin u$ и $u = \dfrac{\operatorname{sh} x/2}{\sqrt{\operatorname{ch} 2x}}$ возрастают, следовательно, имеет место неравенство

$$\theta_1 \leqslant \theta_k < \frac{\pi}{4}\,. \tag{62}$$

Учитывая оценки (58) и (59) можем записать

$$\frac{\pi C_2}{k^{1+\gamma}} < \pi k\left|\alpha_1 - \frac{m}{k}\right| < \frac{\pi}{2}\,. \tag{63}$$

Тогда, в силу (62) и (63), возможны два случая:

1). $$\frac{\pi}{2} < \left|\pi k\left(\alpha_1 - \frac{m}{k}\right) + \theta_k\right| \leqslant \pi k\left|\alpha_1 - \frac{m}{k}\right| + |\theta_k| < \frac{3\pi}{4}\,;$$

2). $$0 < \left|\pi k\left(\alpha_1 - \frac{m}{k}\right) + \theta_k\right| < \frac{\pi}{2}\,.$$

В первом случае в силу убывания функции $y = \sin x$ при $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$ верно неравенство

$$\left|\sin\left[\pi k\left(\alpha_1 - \frac{m}{k}\right) + \theta_k\right]\right| > \sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,. \tag{64}$$

Рассмотрим теперь второй случай. Учитывая неравенство (60), имеем

$$\begin{gathered}\sin|\pi k\alpha_1 - \pi m + \theta_k| > \frac{2}{\pi}|\pi k\alpha_1 - \pi m + \theta_k| = \frac{2}{\pi}\left|\pi k\alpha_1 - \frac{4m-1}{4}\pi + \theta_k - \frac{\pi}{4}\right| \geqslant \\ \geqslant \frac{2}{\pi}\left(\left|\pi k\alpha_1 - \frac{4m-1}{4}\pi\right| - \left|\theta_k - \frac{\pi}{4}\right|\right).\end{gathered} \tag{65}$$

Используя оценку (58), оценим снизу первое слагаемое неравенства (65):

$$\left|\pi k\alpha_1 - \frac{4m-1}{4}\pi\right| = \pi k\left|\alpha - \frac{4m-1}{2k}\right| > \frac{\pi C_2}{(2k)^{1+\gamma}}\,. \tag{66}$$

Теперь, применяя формулу разности арксинусов $\arcsin x - \arcsin y = \arcsin(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2})$, $xy > 0$, оценим сверху второе слагаемое (65):

$$\begin{gathered}\left|\theta_k - \frac{\pi}{4}\right| = \left|\arcsin\frac{\operatorname{sh}\pi k\beta/2}{\sqrt{\operatorname{ch}\pi k\beta}} - \arcsin\sqrt{2}\right| = \\ = \left|\arcsin\frac{1}{e^{\pi k\beta}\sqrt{1+e^{-2\pi k\beta}}}\right| < \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{e^{\pi k\beta}\sqrt{1+e^{-2\pi k\beta}}} < \frac{\pi}{2e^{\pi k\beta}}\,,\end{gathered} \tag{67}$$

так как $|\arcsin x| < \dfrac{\pi}{2}x$, $0 < |x| < 1$.

Итак, из оценок (64) – (67) имеем

$$|\sin(\pi k\alpha_1+\theta_k)|>\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi C_2}{k^{1+\gamma}}-\frac{\pi}{2e^{\pi k\beta}}\right)=\frac{C_3}{k^{1+\gamma}}-\frac{1}{e^{\pi k\beta}}\ . \tag{68}$$

Заметим, что $e^{\pi k\beta}>(\pi k\beta)^{1+\gamma}$ для всех k. Тогда из (68) имеем

$$|\sin(\pi k\alpha_1+\theta_k)|>\frac{1}{k^{1+\gamma}}\left(C_3-\frac{1}{(\pi\beta)^{1+\gamma}}\right)=\frac{C_4}{k^{1+\gamma}}\ , \tag{69}$$

где $C_4>0$ при $\beta>\beta_0=\dfrac{1}{\pi C_3^{1/(1+\gamma)}}$.

Таким образом, из (56), (61) и (69) получим оценку (53).

В случае $n=2$ более точный результат дает теорема Лиувилля [15, с.160]: для любого алгебраического числа α степени $n=2$ существует положительное число $\delta>0$ такое, что при любых целых p, q $(q>0)$ справедливо неравенство

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|>\frac{\delta}{q^2}.$$

Проводя рассуждения, аналогичные первому случаю $n>2$, получим оценку (54). ■

Отметим, что любое иррациональное число α единственным образом разлагается в бесконечную цепную дробь $\alpha=[a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots]$, при этом целые числа a_1, a_2, ... называются элементами числа α. Как известно элементы всякой квадратичной иррациональности ограничены.

Лемма 2. *Пусть $\alpha>0$ является иррациональным числом с неограниченными элементами. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует бесконечное множество натуральных чисел k таких, что*

$$|\Delta_{\alpha\beta}(k)|<e^{\pi k\beta}\frac{\varepsilon C_5}{k}\ . \tag{70}$$

□ В силу теоремы 23 [15, с.49] для любого иррационального числа α с неограниченными элементами при любом $\varepsilon>0$ существует бесконечное множество пар целых чисел (k,m), $k>0$, таких, что

$$\left|\alpha-\frac{m}{k}\right|<\frac{\varepsilon}{k^2}\ .$$

Тогда

$$|\Delta_{\alpha\beta}(k)|<e^{\pi k\beta}|\sin\pi k\alpha_1|\cdot|\sin(\pi k\alpha_1+\theta_k)|\leqslant$$

$$e^{\pi k\beta}\left|\sin\pi k\left(\alpha_1-\frac{m}{k}\right)\right|\leqslant e^{\pi k\beta}\pi k\left|\alpha_1-\frac{m}{k}\right|<e^{\pi k\beta}\frac{\varepsilon C_5}{k}\ . \ ■$$

Заметим, что из полученной оценки следует, что для $\alpha>0$, удовлетворяющих условию леммы 2, выражение $\Delta_{\alpha\beta}(k)$ может быть сколь угодно малым, а следовательно, решение задачи в виде сумм рядов (10), (11) для таких α не существует.

Далее, для доказательства существования решения задачи, из ряда (10) почленным дифференцированием составим ряды:

$$u_x(x,y) = -\sqrt{2}\sum_{k=0}^{\infty}\pi k u_k(y)\sin\pi kx\ , \tag{71}$$

$$u_y(x,y) = u_0'(y) + \sqrt{2}\sum_{k=0}^{\infty}u_k'(y)\sin\pi kx\ , \tag{72}$$

$$u_{xx}(x,y) = -\sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}(\pi k)^2 u_k(y)\cos\pi kx\ , \tag{73}$$

$$u_{yy}(x,y) = u_0''(y) + \sqrt{2}\sum_{k=0}^{\infty}u_k''(y)\cos\pi kx\ . \tag{74}$$

Лемма 3. *Пусть справедливо неравенство (53). Тогда для любых $y\in[-\alpha,\beta]$ справедливы оценки*

$$|u_k(y)| \leqslant C_6\left(k^{2+\varepsilon}|\psi_k| + k^{2+\varepsilon}|\varphi_k| + k^{1+\varepsilon}|g_k| + k^{1+\varepsilon}|h_k|\right)\ , \tag{75}$$

$$|u_k''(y)| \leqslant C_7\left(k^{4+\varepsilon}|\psi_k| + k^{4+\varepsilon}|\varphi_k| + k^{3+\varepsilon}|g_k| + k^{3+\varepsilon}|h_k|\right)\ , \tag{76}$$

$$|f_{1,k}| \leqslant C_8 k^{3+\varepsilon}\left(\frac{k|\psi_k|}{e^{\pi k\beta}} + k|\varphi_k| + \frac{|g_k|}{e^{\pi k\beta}} + |h_k|\right)\ , \tag{77}$$

$$|f_{2,k}| \leqslant C_9 k^{3+\varepsilon}\left(k|\psi_k| + k|\varphi_k| + |g_k| + |h_k|\right)\ . \tag{78}$$

Если справедлива оценка (54), то

$$|u_k(y)| \leqslant C_6 k\left(k|\psi_k| + k|\varphi_k| + |g_k| + |h_k|\right)\ , \tag{79}$$

$$|u_k''(y)| \leqslant C_7 k^3\left(k|\psi_k| + k|\varphi_k| + |g_k| + |h_k|\right)\ , \tag{80}$$

$$|f_{1,k}| \leqslant C_8 k^3\left(\frac{k|\psi_k|}{e^{\pi k\beta}} + k|\varphi_k| + \frac{|g_k|}{e^{\pi k\beta}} + |h_k|\right)\ , \tag{81}$$

$$|f_{2,k}| \leqslant C_9 k^3\left(k|\psi_k| + k|\varphi_k| + |g_k| + |h_k|\right)\ . \tag{82}$$

□ Непосредственно из равенств (44) – (47), учитывая лемму 1, имеем

$$\begin{gathered}|a_k| \leqslant \frac{k^{2+\varepsilon}}{C_0 e^{\pi k\beta}}\left(e^{-\pi k\beta}(|\psi_k| + |\varphi_k|) + e^{-\pi k\beta}\frac{|g_k|}{\pi k} + \left(1+\sqrt{2}+e^{-\pi k\beta}\right)\frac{|h_k|}{\pi k}\right) \leqslant \\ \leqslant \frac{C_6}{e^{\pi k\beta}}k^{1+\varepsilon}\left(k|\psi_k| + k|\varphi_k| + |g_k| + |h_k|\right),\end{gathered} \tag{83}$$

$$\begin{gathered}|b_k| \leqslant \frac{k^{2+\varepsilon}}{C_0 e^{\pi k\beta}}\left(e^{\pi k\beta}(|\psi_k| + |\varphi_k|) + e^{\pi k\beta}\frac{|g_k|}{\pi k} + \left(1+\sqrt{2}+e^{\pi k\beta}\right)\frac{|h_k|}{\pi k}\right) \leqslant \\ \leqslant C_7 k^{1+\varepsilon}\left(k|\psi_k| + k|\varphi_k| + |g_k| + |h_k|\right)\ ,\end{gathered} \tag{84}$$

$$|f_{1,k}| \leqslant \frac{k^{2+\varepsilon}}{C_0 e^{\pi k\beta}} \left((\pi k)^2|\psi_k| + 3(\pi k)^2 e^{\pi k\beta}|\varphi_k| + 2\pi k|g_k| + 3\pi k e^{\pi k\beta}|h_k|\right) \leqslant C_8 k^{3+\varepsilon}\left(\frac{k|\psi_k|}{e^{\pi k\beta}} + k|\varphi_k| + \frac{|g_k|}{e^{\pi k\beta}} + |h_k|\right), \tag{85}$$

$$|f_{2,k}| \leqslant \frac{k^{2+\varepsilon}}{C_0 e^{\pi k\beta}} \left((\pi k)^2\left(1+2e^{\pi k\beta}\right)|\psi_k| + e^{\pi k\beta}(\pi k)^2|\varphi_k| + \pi k\left(1+2e^{\pi k\beta}\right)|g_k| + \pi k e^{\pi k\beta}|h_k|\right) \leqslant$$
$$\leqslant C_9 k^{3+\varepsilon}\left(k|\psi_k| + k|\varphi_k| + |g_k| + |h_k|\right). \tag{86}$$

Из формул (28), (29) и неравенств (83) – (86) получим оценку (75) для u_k. Для того, чтобы получить оценку (76), найдем производные:

$$u_k'(y) = \begin{cases} \pi k\left(a_k e^{\pi k y} - b_k e^{-\pi k y}\right), & y > 0; \\ \pi k\left[\left(a_k + b_k + \dfrac{f_{2,k} - f_{1,k}}{(\pi k)^2}\right)\sin \pi k y + (a_k - b_k)\cos \pi k y\right], & y < 0, \end{cases}$$

$$u_k''(y) = \begin{cases} (\pi k)^2\left(a_k e^{\pi k y} + b_k e^{-\pi k y}\right), & y > 0; \\ (\pi k)^2\left[-\left(a_k + b_k + \dfrac{f_{2,k} - f_{1,k}}{(\pi k)^2}\right)\sin \pi k y - (a_k - b_k)\sin \pi k y\right], & y < 0. \end{cases}$$

Отсюда и из оценок (83) – (86) следует справедливость (76).

Неравенства (79) – (82) выводятся аналогичным образом. ■

Из последней леммы следует, что ряды (10), (11), (71) – (74) мажорируются числовым рядом

$$C_{10}\sum_{k=1}^{\infty}\left(k^{4+\varepsilon}|\psi_k| + k^{4+\varepsilon}|\varphi_k| + k^{3+\varepsilon}|g_k| + k^{3+\varepsilon}|h_k|\right). \tag{87}$$

Лемма 4. *Пусть* $\psi(x), \varphi(x) \in C^5[0,1]$, $g(x), h(x) \in C^4[0,1]$, $\psi'''(0) = \psi'''(1) = \varphi'''(0) = \varphi'''(1) = g'(0) = g'(1) = g'''(0) = g'''(1) = h'(0) = h'(1) = h'''(0) = h'''(1) = 0$. *Тогда справедливы представления*

$$\psi_k = -\frac{\psi_k^{(5)}}{(\pi k)^5}, \quad \varphi_k = -\frac{\varphi_k^{(5)}}{(\pi k)^5}, \tag{88}$$

$$g_k = \frac{g_k^{(4)}}{(\pi k)^4}, \quad h_k = \frac{h_k^{(4)}}{(\pi k)^4}, \tag{89}$$

где

$$\psi_k^{(5)} = \sqrt{2}\int_0^1 \psi^V(x)\sin \pi k x\, dx, \quad \varphi_k^{(5)} = \sqrt{2}\int_0^1 \varphi^V(x)\sin \pi k x\, dx, \tag{90}$$

$$g_k^{(4)} = \sqrt{2}\int_0^1 g^{IV}(x)\cos \pi k x\, dx, \quad h_k^{(4)} = \sqrt{2}\int_0^1 h^{IV}(x)\cos \pi k x\, dx, \tag{91}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\psi_k^{(5)}|^2 \leqslant 16\|\psi^V(x)\|^2_{L_2[0,1]}\,, \quad \sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_k^{(5)}|^2 \leqslant 16\|\varphi^V(x)\|^2_{L_2[0,1]}\,, \tag{92}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}|g_k^{(4)}|^2 \leqslant 16\|g^{IV}(x)\|^2_{L_2[0,1]}\,, \quad \sum_{k=1}^{\infty}|h_k^{(4)}|^2 \leqslant 16\|g^{IV}(x)\|^2_{L_2[0,1]}\,. \tag{93}$$

□ Интегрируя вторые интегралы формул (31), (32) по частям пять раз, а интегралы формул (33), (34) – четыре раза, получим непосредственно выражения (88), (89).

Поскольку системы функций (9) и $\{\sqrt{2}\sin \pi kx\}_{k=1}^{\infty}$ ортонормированы в пространстве $L_2[0,1]$, то справедливость оценок (92), (93) следует из неравенства Бесселя по этим системам. ■

При выполнении условий леммы 4 ряд (87) мажорируется числовым рядом

$$C_{11}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{1-\varepsilon}}\left(|\psi_k^{(5)}|+|\varphi_k^{(5)}|+|g_k^{(4)}|+|h_k^{(4)}|\right). \tag{94}$$

Лемма 5. *Пусть функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ удовлетворяют условиям леммы 4 и $\psi(x), \varphi(x) \in C^{5+\delta}[0,1]$, $g(x), h(x) \in C^{4+\delta}[0,1]$, $\varepsilon < \delta < 1$. Тогда справедливы оценки:*

$$|\psi_k^{(5)}| \leqslant \frac{C_{13}}{k^{\delta}}\,, \quad |\varphi_k^{(5)}| \leqslant \frac{C_{14}}{k^{\delta}}\,, \tag{95}$$

$$|g_k^{(4)}| \leqslant \frac{C_{15}}{k^{\delta}}\,, \quad |h_k^{(4)}| \leqslant \frac{C_{16}}{k^{\delta}}\,. \tag{96}$$

□ следует из теоремы о скорости убывания коэффициентов ряда Фурье функции, удовлетворяющей на $[0,1]$ условию Гельдера с показателем $\delta \in (0,1)$ [16, с.81]. ■

В силу леммы 5 ряд (94) мажорируется сходящимся числовым рядом

$$C_{16}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{1+\delta-\varepsilon}}\,.$$

Тогда ряд (94), а значит и ряд (87) сходятся. Из сходимости этих рядов в силу признака Вейерштрасса сходятся равномерно ряды (10), (71), (72) в замкнутой области $\overline{D}$, ряды (73), (74) – в замкнутых областях $\overline{D}_+$ и $\overline{D}_-$, ряды (11) – на отрезке $[0,1]$. Следовательно функции $u(x,y)$ и $f(x,y)$ удовлетворяют условиям (2). Подставляя ряды (10), (11) в уравнение (1), убеждаемся, что эти функции удовлетворяют условию (3).

В случае, когда α является алгебраическим числом степени $n=2$, в приведенных выше формулах $\varepsilon = 0$, и ряд (94) сходится. Тогда построенные функции $u(x,y)$ и $f_i(x)$, $i=1,2$, аналогично являются решением задачи (2) – (6), причем, для этого достаточно, чтобы функции $\psi(x)$, $\varphi(x)$, $g(x)$, $h(x)$ обладали гладкостью, указанной в лемме 4.

Итак, доказаны следующие утверждения.

Теорема 2. *Пусть функции $\varphi(x), \psi(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ удовлетворяют условиям леммы 5 и имеет место оценка (53). Тогда существует единственное решение задачи (2) – (6),* *которое определяется рядами (10), (11).*

Теорема 3. *Пусть функции $\varphi(x), \psi(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ удовлетворяют условиям леммы 4 и имеет место оценка (54). Тогда существует единственное решение задачи (2) – (6), которое определяется рядами (10), (11).*

4. Устойчивость решения задачи. Введем следующие нормы:

$$\|u\|_{L_2[0,1]} = \left(\int_0^1 |u(x,y)|^2 dx\right)^{1/2},$$

$$\|u(x,y)\|_{C(\overline{D})} = \max_{\overline{D}} |u(x,y)|,$$

$$\|f(x)\|_{W_2^n} = \left[\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} |f^{(k)}(x)|^2\right) dx\right]^{1/2}, \quad n \in N_0 .$$

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда для решения (10) и (11) задачи (2) – (6) справедливы оценки*

$$\|u(x,y)\|_{L_2} \leqslant C_{17}(\|\psi\|_{W_2^3} + \|\varphi\|_{W_2^3} + \|g\|_{W_2^2} + \|h\|_{W_2^2}), \tag{97}$$

$$\|f_i(x)\|_{L_2} \leqslant C_{18}(\|\psi\|_{W_2^5} + \|\varphi\|_{W_2^5} + \|g\|_{W_2^4} + \|h\|_{W_2^4}), \quad i = 1,2, \tag{98}$$

$$\|u(x,y)\|_{C(\overline{D})} \leqslant C_{19}(\|\psi\|_{W_2^4} + \|\varphi\|_{W_2^4} + \|g\|_{W_2^3} + \|h\|_{W_2^3}), \tag{99}$$

$$\|f_i(x)\|_{C(\overline{D})} \leqslant C_{20}(\|\psi\|_{W_2^6} + \|\varphi\|_{W_2^6} + \|g\|_{W_2^5} + \|h\|_{W_2^5}), \quad i = 1,2, \tag{100}$$

где постоянные C_i, $i = \overline{17,20}$, не зависят от функций φ, ψ, g и h.

□ Поскольку система (9) ортонормирована в $L_2[0,1]$, то из (10) и (75) получаем

$$\|u(x,y)\|_{L_2}^2 \leqslant u_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} u_k^2(y) \leqslant \widetilde{C}_1 \left[(|\psi_0| + |\varphi_0| + |g_0| + |h_0|)^2 + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{\infty} \left(k^{2+\varepsilon}|\psi_k| + k^{2+\varepsilon}|\varphi_k| + k^{1+\varepsilon}|g_k| + k^{1+\varepsilon}|h_k|\right)^2\right] \leqslant 4\widetilde{C}_1 \left[|\psi_0|^2 + |\varphi_0|^2 + |g_0|^2 + |h_0|^2 + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{\infty} \left(k^{4+2\varepsilon}|\psi_k|^2 + k^{4+2\varepsilon}|\varphi_k|^2 + k^{2+2\varepsilon}|g_k|^2 + k^{2+2\varepsilon}|h_k|^2\right)\right], \tag{101}$$

$\widetilde{C}_i$ здесь и далее положительные постоянные. Представим коэффициенты ψ_k, φ_k, g_k и h_k в виде:

$$|\psi_k| = \frac{|\psi_k^{(3)}|}{(\pi k)^3}, \quad |\varphi_k| = \frac{|\varphi_k^{(3)}|}{(\pi k)^3}, \quad |g_k| = \frac{|g_k^{(2)}|}{(\pi k)^2}, \ |h_k| = \frac{|h_k^{(2)}|}{(\pi k)^2}, \tag{102}$$

где $\psi_k^{(3)}$, $\varphi_k^{(3)}$, $g_k^{(2)}$ и $h_k^{(2)}$ – коэффициенты разложения в ряд Фурье по системам $\{\sqrt{2}\sin\pi kx\}_{k=1}^{\infty}$, (9) соответственно функций $\psi'''(x)$, $\varphi'''(x)$, $g''(x)$, $h''(x)$. Подставляя (102) в неравенство (101), получим

$$\|u(x,y)\|_{L_2}^2 \leqslant 4\widetilde{C}_1 \Bigg[|\psi_0|^2+|\varphi_0|^2+|g_0|^2+|h_0|^2+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(k^{4+2\varepsilon}\frac{|\psi_k^{(3)}|^2}{(\pi k)^6}+k^{4+2\varepsilon}\frac{|\varphi_k^{(3)}|^2}{(\pi k)^6}+k^{2+2\varepsilon}\frac{|g_k^{(2)}|^2}{(\pi k)^4}+k^{2+2\varepsilon}\frac{|g_k^{(2)}|^2}{(\pi k)^4}\right)\Bigg] < \tag{103}$$
$$< 4\widetilde{C}_1\left[|\psi_0|^2+|\varphi_0|^2+|g_0|^2+|h_0|^2+\sum_{k=1}^{\infty}\left(|\psi_k^{(3)}|^2+|\varphi_k^{(3)}|^2+|g_k^{(2)}|^2+|h_k^{(2)}|^2\right)\right].$$

Заметим, что

$$|\psi_0|^2=\left(\int_0^1\psi(x)\,dx\right)^2 \leqslant \left[\left(\int_0^1 1^2dx\right)^{\frac12}\left(\int_0^1\psi^2(x)\,dx\right)^{\frac12}\right]^2=\int_0^1\psi^2(x)\,dx=\|\psi\|_{L_2}^2,$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}|\psi_k^{(3)}|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}|\psi_k^{(3)}|^2=\int_0^1(\psi'''(x))^2dx=\|\psi'''\|_{L_2}^2.$$

Аналогично $|\varphi_0|^2 \leqslant ||\varphi||_{L_2}^2$, $|g_0|^2 \leqslant ||g||_{L_2}^2$, $|h_0|^2 \leqslant ||h||_{L_2}^2$, $\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_k^{(3)}|^2 \leqslant ||\varphi'''||_{L_2}^2$, $\sum_{k=1}^{\infty}|g_k^{(2)}|^2 \leqslant ||g''||_{L_2}^2$, $\sum_{k=1}^{\infty}|h_k^{(2)}|^2 \leqslant ||h''||_{L_2}^2$. Отсюда и из (103) следует

$$\|u(x,y)\|_{L_2}^2 < 4\widetilde{C}_1\left[\|\psi\|_{L_2}^2+\|\varphi\|_{L_2}^2+\|g\|_{L_2}^2+\|h\|_{L_2}^2+\|\psi'''\|_{L_2}^2+\|\varphi'''\|_{L_2}^2+\|g''\|_{L_2}^2+\|g''\|_{L_2}^2\right] \leqslant$$
$$\leqslant C_{17}^2(\|\psi\|_{W_2^3}^2+\|\varphi\|_{W_2^3}^2+\|g\|_{W_2^2}^2+\|h\|_{W_2^2}^2),$$

что означает справедливость оценки (97).

Пусть (x,y) – произвольная точка из $\overline{D}$. Учитывая (75), получим

$$|u(x,y)| \leqslant |u_0(y)|+\sum_{k=1}^{\infty}|u_k(y)| \leqslant$$
$$\leqslant \widetilde{C}_2\left[|\psi_0|+|\varphi_0|+|g_0|+|h_0|+\sum_{k=1}^{\infty}\left(k^{2+\varepsilon}|\psi_k|+k^{2+\varepsilon}|\varphi_k|+k^{1+\varepsilon}|g_k|+k^{1+\varepsilon}|h_k|\right)\right]. \tag{104}$$

Представив коэффициенты $|\psi_k|$, $|\varphi_k|$, $|g_k|$, $|h_k|$ в виде

$$|\psi_k|=\frac{|\psi_k^{(4)}|}{(\pi k)^4}\,,\quad |\varphi_k|=\frac{|\varphi_k^{(4)}|}{(\pi k)^4}\,,\quad |g_k|=\frac{|g_k^{(3)}|}{(\pi k)^3}\,,\quad |h_k|=\frac{|h_k^{(3)}|}{(\pi k)^3}\,,$$

где $\psi_k^{(4)}$, $\varphi_k^{(4)}$, $g_k^{(3)}$, $h_k^{(3)}$ – коэффициенты разложения в ряд Фурье по системам (9) и $\{\sqrt{2}\sin\pi kx\}_{k=1}^{\infty}$ соответственно функций $\psi^{IV}(x)$, $\varphi^{IV}(x)$, $g^{III}(x)$, $h^{III}(x)$, из (104) получим

$$|u(x,y)| \leqslant \widetilde{C}_2 \left[|\psi_0| + |\varphi_0| + |g_0| + |h_0| + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\infty} \left(k^{2+\varepsilon} \frac{|\psi_k^{(4)}|}{(\pi k)^4} + k^{2+\varepsilon} \frac{|\varphi_k^{(4)}|}{(\pi k)^4} + k^{1+\varepsilon} \frac{|g_k^{(3)}|}{(\pi k)^3} + k^{1+\varepsilon} \frac{|h_k^{(3)}|}{(\pi k)^3} \right) \right] < \tag{105}$$

$$< \widetilde{C}_2 \left[|\psi_0| + |\varphi_0| + |g_0| + |h_0| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(|\psi_k^{(4)}| + |\varphi_k^{(4)}| + |g_k^{(3)}| + |h_k^{(3)}| \right) \right].$$

На основании неравенства Коши-Буняковского имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(|\psi_k^{(4)}| + |\varphi_k^{(4)}| + |g_k^{(3)}| + |h_k^{(3)}| \right) \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\psi_k^{(4)}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k^{(4)}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \right.$$

$$\left. + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |g_k^{(3)}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |h_k^{(3)}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] = \left(\frac{\pi^2}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \left(||\psi^{IV}||_{L_2} + ||\varphi^{IV}||_{L_2} + ||g'''||_{L_2} + ||h'''||_{L_2} \right). \tag{106}$$

При получении оценки (106) было использовано равенство $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 = \pi^2/6$.

С учетом (106) неравенство (105) примет вид

$$|u(x,y)| \leqslant \widetilde{C}_3 \left[\|\psi\|_{L_2} + \|\varphi\|_{L_2} + \|g\|_{L_2} + \|h\|_{L_2} + \left(\|\psi^{IV}\|_{L_2} + \|\varphi^{IV}\|_{L_2} + \|g'''\|_{L_2} + \|h'''\|_{L_2} \right) \right]$$

$$\leqslant C_{19} \left(||\psi||_{W_2^4} + ||\varphi||_{W_2^4} + ||g||_{W_2^3} + ||h||_{W_2^3} \right).$$

Аналогично на основании неравенств (77), (78) устанавливается справедливость оценок (98) и (100). ■

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда для решения (10) и (11) задачи (2) – (6) справедливы оценки*

$$\|u(x,y)\|_{L_2} \leqslant C_{17}(\|\psi\|_{W_2^2} + \|\varphi\|_{W_2^2} + \|g\|_{W_2^1} + \|h\|_{W_2^1}),$$

$$\|f_i(x)\|_{L_2} \leqslant C_{18}(\|\psi\|_{W_2^4} + \|\varphi\|_{W_2^4} + \|g\|_{W_2^3} + \|h\|_{W_2^3}), \quad i = 1, 2\,,$$

$$\|u(x,y)\|_{C(\overline{D})} \leqslant C_{19}(\|\psi\|_{W_2^3} + \|\varphi\|_{W_2^3} + \|g\|_{W_2^2} + \|h\|_{W_2^2}),$$

$$\|f_i(x)\|_{C(\overline{D})} \leqslant C_{20}(\|\psi\|_{W_2^5} + \|\varphi\|_{W_2^5} + \|g\|_{W_2^4} + \|h\|_{W_2^4}), \quad i = 1, 2\,.$$

□ Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 4 с использованием оценок (79), (81) и (82). ■

Литература

1. Тихонов А.Н. Об устойчивости обратных задач // ДАН СССР. – 1943. – 39;5. – С.195-198.
2. Лаврентьев М.М. Об одной задаче для волнового уравнения // ДАН СССР. – 1964. – 157;3. – С.520-521.
3. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения / М.: Наука, 1978. – 206 с.
4. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач / М.: МГУ, 1994. – 285 с.
5. Сабитов К.Б. Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области // ДАН СССР. – 2007. – 413;1. – С.23-26.
6. Сабитов К.Б., Сафин Э.М. Обратная задача для уравнения параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // ДАН СССР. – 2009. – 429;4. – С.451-454.
7. Сабитов К.Б., Сафин Э.М. Обратная задача для уравнения параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // Известия Вузов. Математика. – 2010. – 4. – С.55-62.
8. Сабитов К.Б., Сафин Э.М. Обратная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа // Матем. заметки. – 2010. – 87;6. – С.907-918.
9. Сабитов К.Б., Мартемьянова Н.В. Нелокальная обратная задача для уравнения смешанного типа // Известия Вузов. Математика. – 2011. – 2. – С.71-85.
10. Сабитов К.Б., Хаджи И.А. Краевая задача для уравнения Лаврентьева-Бицадзе с неизвестной правой частью // Известия Вузов. Математика. – 2011. – 5. – С.44-52.
11. Мартемьянова Н.В. Нелокальная обратная задача для уравнения с оператором Лаврентьева-Бицадзе в прямоугольной области // Труды Всероссийской научной конференции с международным участием «Дифференциальные уравнения и их приложения» (28 - 30 июля 2011 г., г. Стерлитамак) / Уфа: Гилем, 2011. С.153-158.
12. Удалова Г.Ю. Обратная задача для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа // Вестник СамГУ - Естественно-научная серия. – 2010. – №4(78). – С.116-122.
13. Арнольд В.И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // УМН. – 1963. – XVIII;6(114). – С.91-192.
14. Бухштаб А.А. Теория чисел / М.: Просвещение, 1966. – 384 с.
15. Хинчин А.Я. Цепные дроби / М.: Наука, 1978. – 112 с.
16. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т.1 / М.: Мир, 1965. – 616 с.

BOUNDARY PROBLEM FOR LAVRENTYEV-BICZADZE's EQUATION WITH UNKNOWN RIGHT-HAND PART

G.Y. Udalova

Samara state architectural-construction university,
Molodogvardeyskaya St., 194, Samara, 443001, Russia, e-mail: yeyeg@yandex.ru

Abstract. Boundary problem for differential equation of mixed elliptic-hyperbolic type with various unknown right sides in the rectangular domain is studied. The criterion uniqueness of a solution is found. The solution is constructed as the sum of eigenfunctions connected with special one-dimensional boundary problem. The solution stability relative to boundary functions is proved.

Key words: mixed type equation, inverse problem, spectral method, uniqueness, solution existence, stability.