УДК 517.958

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ СИУ 2D ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ НА МНОГОСЛОЙНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ОТРАЖАЮЩИХ СТРУКТУРАХ.
Часть II. Случай Н-поляризации

Ю.В. Гандель, В.Д. Душкин

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина,
пл. Свободы, 4, Харьков, 61077, Украина, e-mail: Yuriy.V.Gandel@univer.kharkov.ua
Академия ВВ МВС Украины,
пл. Восстания 3, Харьков, 61005, Украина, e-mail: Dushkin_V_and_V@mail.ru

Аннотация. Задачи дифракции электромагнитных волн на многослойных отражающих структурах в 2D случае приводят к краевым задачам для уравнений Гельмгольца. В случае Н-поляризации эти краевые задачи сведены к системам граничных сингулярных интегральных уравнений первого рода с логарифмическими дополнительными условиями и системам граничных сингулярных интегральных уравнений с интегральными дополнительными условиями, для решения которых применяется вариант эффективного и строго обоснованного численного метода дискретных особенностей.

Ключевые слова: задачи дифракции, многослойные отражающие структуры, краевые задачи, сингулярные интегральные уравнения.

Также как и в случае Е-поляризации [1], сведение исходных краевых задач к системам сингулярных интегральных уравнений (СИУ) основывается на методе параметрических представлений сингулярных интегралов [2]-[4].

Как уже было отмечено в первой части статьи, подбор соотношений размеров элементов многослойных решёток, позволяют получать электромагнитные поля с необходимыми физическими характеристиками. Поэтому актуальной задачей для исследователей является создание численно-аналитических моделей, позволяющих провести численный эксперимент в широком диапазоне частот и геометрических параметров структуры.

Как и в случае Е-поляризации, характерной особенностью систем СИУ задач дифракции Н-поляризованных волн является наличие нескольких неизвестных функций, каждая из которых связана с характеристикой поля на одном из слоёв. Каждое из СИУ зависит от двух неизвестных функций, и фактически представляет уравнение связи полей на двух соседних слоях.

Рассмотрим следующую дифракционную структуру (см. рис. 1). В плоскости $z' = D$ лежит бесконечный экран, на котором расположены два слоя диэлектриков. Первый слой диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ε_1, заполняет область $d'_- < z' < d'_+$, второй слой диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ε_2, заполняет область $D < z' < d'_-$.

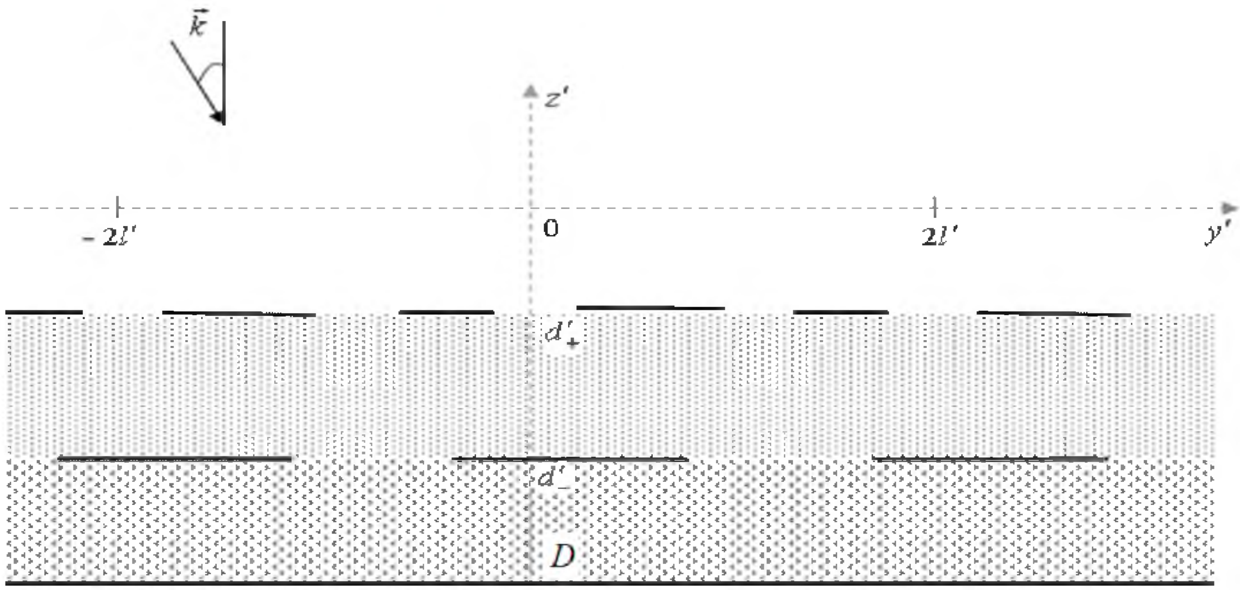

Рис. 1. Сечение электродинамической структуры плоскостью $Y'OZ'$.

Над описанной структурой, в области $z' > d'_+$ – полупространство с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_0 = 1$. Между верхним и нижним слоями диэлектрика и на верхнем слое диэлектрика расположены $2l'$-периодические системы, состоящие из бесконечно тонких идеально проводящих лент.

Пусть

$$\mathrm{L}^+ = \left\{ \mathrm{y}' \in \mathrm{R} |\ y' \in \bigcup_{\mathrm{q}=1}^{M^+} (a_q^+, b_q^+),\ 0 < a_1^+ < b_1^+ < \ldots < a_q^+ < b_q^+ \ldots < a_{M^+}^+ < b_{M^+}^+ < 2l' \right\} \tag{1}$$

координаты y' точек плоскости $z = d'_+$, лежащих на отрезке $y' \in [0, 2l']$ и свободных от лент.

Пусть также

$$\mathrm{L}^- = \left\{ \mathrm{y}' \in \mathrm{R} |\ y' \in \bigcup_{\mathrm{p}=1}^{M^-} (a_p^-, b_p^-),\ 0 < a_1^- < b_1^- < \ldots < a_p^- < b_p^- \ldots < a_{M^-}^- < b_{M^-}^- < 2l' \right\} \tag{2}$$

координаты y' точек плоскости $z = d'_-$, лежащих на отрезке $y' \in [0, 2l']$ и свободных которых от лент.

Вообще говоря, $a_q^+ \neq a_s^-$ и $b_q^+ \neq b_s^-$, если $q = s$.

Введём обозначения для областей:

$$\Omega_0 = \left\{(y', z') \in R^2 \mid z' > d'_+,\ 0 < y' < 2l'\right\}, \tag{3}$$

$$\Omega_1 = \left\{(y', z') \in R^2 \mid d'_- < z' < d'_+,\ 0 < y' < 2l'\right\}, \tag{4}$$

$$\Omega_2 = \left\{(y', z') \in R^2 \mid D' < z' < d'_-,\ 0 < y' < 2l'\right\}. \tag{5}$$

Рассматривается стационарная задача - зависимость поля от времени задаётся множителем $e^{-i\omega t}$.

Пусть из бесконечности сверху на дифракционную структуру наклонно падает E-поляризованная плоская электромагнитная волна единичной амплитуды:

$$U(y', z') = E_x(y', z') = \exp\left(ik\left(y' \cdot \sin\varphi - \left(z' - d'_+\right) \cdot \cos\varphi\right)\right). \tag{6}$$

Необходимо найти полное поле $u(y', z')$, возникшее в результате рассеяния волны рассматриваемой дифракционной структуре. Оно удовлетворяет в областях Ω_i, $i = 0, 1, 2)$ уравнению Гельмгольца:

$$\Delta u + k^2\sqrt{\varepsilon_i} \cdot u = 0, \quad (y', z') \in \Omega_i, \quad (i = 0, 1, 2), \quad k = \frac{\omega}{c}, \tag{7}$$

условию Майкснера на ребре; разность полного и падающего полей удовлетворяет условию излучения Зоммерфельда:

$$\lim_{r\to\infty} \sqrt{r} \cdot \left(\frac{\partial\,(u - U)}{\partial r} - ik \cdot (u - U)\right) = 0, \quad r = \sqrt{(y')^2 + (z')^2}. \tag{8}$$

Введём в рассмотрение функцию $u_0(y', z')$ — решение в области Ω_0 вспомогательной краевой задачи дифракции плоской монохроматической волны $U(y', z')$, определённой формулой (6), на бесконечном плоском идеально проводящем экране, лежащем в плоскости $z' = d'_+$. Функция $u_0(y', z')$ на поверхности экрана удовлетворяет граничному условию:

$$\frac{\partial u_0}{\partial z'}(y', d'_+) = 0, \quad y' \in R'. \tag{9}$$

Поле $u_0(y', z')$ имеет представление:

$$u_0(y', z') = \exp\left(ik\left(y' \cdot \sin\varphi - \left(z' - d'_+\right) \cdot \cos\varphi\right)\right) - \exp\left(ik\left(y' \cdot \sin\varphi + \left(z' - d'_+\right) \cdot \cos\varphi\right)\right), \tag{10}$$

причём

$$u_0(y', d'_+) = 2 \cdot \exp\left(iky' \cdot \sin\varphi\right). \tag{11}$$

Полное поле $u(y', z')$, возникшее в результате дифракции волны на решётках $u(y', z')$, будем искать в виде:

$$u(y', z') = \begin{cases} u_0(y', z') + u^+(y', z'), & (y', z') \in \Omega_0; \\ u_1(y', z'), & (y', z') \in \Omega_1; \\ u_2(y', z'), & (y', z') \in \Omega_2. \end{cases} \tag{12}$$

Поле $u^+(y',z')$ в области Ω_0 ищем в виде:

$$u^+(y',z') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n^+}{\gamma_{0,n}} \cdot e^{-\gamma'_{0,n}\left(z'-d'_+\right)} \cdot e^{i\cdot p'_n y'}\,, \tag{13}$$

где

$$p'_n = k\cdot\sin\varphi + \frac{\pi n}{l'}\,, \quad \gamma'_{0,n} = \sqrt{\left(p'_n\right)^2 - k^2}\,, \quad \gamma_{0,n} = \frac{l'}{\pi}\gamma'_n \quad n\in Z\,. \tag{14}$$

Условия излучения Зоммерфельда будут выполнены, если ветвь радикала выбрать так, чтобы $\mathrm{Re}\left(\gamma'_{0,n}\right) \geqslant 0, \quad \mathrm{Im}\left(\gamma'_{0,n}\right) \leqslant 0, \quad n\in Z$.

Пусть $\vartheta_i \quad i=1,2$ — угол между волновым вектором в области Ω_i, заполненной диэлектриком и вектором противоположным оси OZ. В силу закона Снеллиуса справедливы равенства:

$$k\cdot\sin\varphi = k\sqrt{\varepsilon_1}\cdot\sin\vartheta_1 = k\sqrt{\varepsilon_2}\cdot\sin\vartheta_2\,. \tag{15}$$

Учитывая соотношение (15) поле $u_1(y',z')$ в области Ω_1 ищем в виде:

$$u_1(y',z') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{1,n}} \left(b_n^+ \cdot \frac{\mathrm{ch}\left(\gamma'_{1,n}\left(z'-d'_-\right)\right)}{\mathrm{sh}\left(\gamma'_{1,n}\left(d'_+-d'_-\right)\right)} + b_n^- \cdot \frac{\mathrm{ch}\left(\gamma'_{1,n}\left(z'-d'_+\right)\right)}{\mathrm{sh}\left(\gamma'_{1,n}\left(d'_+-d'_-\right)\right)} \right) \cdot e^{i\cdot p'_n y'}\,, \tag{16}$$

где

$$\gamma'_{1,n} = \sqrt{\left(p'_n\right)^2 - k^2\cdot\varepsilon_1}, \quad \gamma_{1,n} = \frac{l'}{\pi}\gamma'_{1,n}, \quad n\in Z\,. \tag{17}$$

Поле $u_2(y',z')$ в области Ω_2 ищем в виде:

$$u_2(y',z') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n^-}{\gamma_{2,n}} \cdot \frac{\mathrm{ch}\left(\gamma'_{2,n}\left(z'-D'\right)\right)}{\mathrm{sh}\left(\gamma'_{2,n}\left(d'_--D'\right)\right)} \cdot e^{i\cdot p'_n y'}\,, \tag{18}$$

где

$$\gamma'_{2,n} = \sqrt{\left(p'_n\right)^2 - k^2\cdot\varepsilon_2}\,, \quad \gamma_{2,n} = \frac{l'}{\pi}\gamma'_{2,n}\,, \quad n\in Z\,. \tag{19}$$

Введём безразмерные координаты и параметры:

$$\partial\ell = \frac{l'k}{\pi} = \frac{2l'}{\lambda}\,, \qquad y = \frac{\pi}{l'}y'\,, \qquad z = \frac{\pi}{l'}z'\,, \qquad d'_\pm = \frac{\pi}{l'}d'_\pm\,; \tag{20}$$

$$\alpha_q^+ = \frac{\pi}{l'}a_q^+\,, \qquad \beta_q^+ = \frac{\pi}{l'}b_q^+\,, \qquad q=1,\ldots,M^+\,; \tag{21}$$

$$\alpha_s^- = \frac{\pi}{l'}a_s^-\,, \qquad \beta_s^- = \frac{\pi}{l'}b_s^-\,, \qquad s=1,\ldots,M^-\,; \tag{22}$$

$$p_n = \frac{l\cdot p'_n}{\pi} = \partial\ell\cdot\sin\varphi + n\,, \qquad n\in Z\,; \tag{23}$$

$$L^+ = \left\{ y\in\bigcup_{\mathrm{q}=1}^{M^+}(\alpha_q^+,\beta_q^+) \;\middle|\; 0<\alpha_1^+<\beta_1^+<\ldots<\alpha_q^+<\beta_q^+<\ldots<\alpha_{M^+}^+<\beta_{M^+}^+<2\pi \right\}\,, \tag{24}$$

$$L^- = \left\{ y \in \bigcup_{q=1}^{M^-} (\alpha_q^-, \beta_q^-) \middle| \quad 0 < \alpha_1^- < \beta_1^- < \ldots < \alpha_s^- < \beta_s^- < \ldots < \alpha_{M^-}^- < \beta_{M^-}^- < 2\pi \right\}. \tag{25}$$

Из граничного условия обращения полного поля на поверхности идеально проводящей структуры в ноль следуют равенства:

$$\frac{\partial u^+}{\partial z}(y, d_+) = \frac{\partial u_1}{\partial z}(y, d_+) = 0\,, \qquad y \in CL^+ = [0, 2\pi] \setminus L^+\,; \tag{26}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial z}(y, d_-) = \frac{\partial u_2}{\partial z}(y, d_-) = 0\,, \qquad y \in CL^- = [0, 2\pi] \setminus L^-\,. \tag{27}$$

Из условий связи полей на границе раздела двух сред в «щелях» между ленточными структурами получаем равенства:

$$u_0(y, d_+) + u^+(y, d_+) = u_1(y, d_+)\,, \qquad y \in L^+\,; \tag{28}$$

$$u_1(y, d_-) = u_2(y, d_-)\,, \qquad y \in L^-\,; \tag{29}$$

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial u^+}{\partial z}(y, d_+) = \frac{1}{\varepsilon_1}\frac{\partial u_1}{\partial z}(y, d_+)\,, \qquad y \in L^+\,; \tag{30}$$

$$\frac{1}{\varepsilon_1}\frac{\partial u_1}{\partial z}(y, d_-) = \frac{1}{\varepsilon_2}\frac{\partial u_2}{\partial z}(y, d_-)\,, \qquad y \in L^-\,. \tag{31}$$

Из представлений полей (13), (16), (18), граничных условий (26), (27), и условий связи полей на границе раздела двух сред (28) – (31) для коэффициентов a_n^+, a_n^-, b_n^+, b_n^- получаем следующие соотношения:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^+ \exp(ip_n y) = 0\,, \quad y \in CL^+\,; \tag{32}$$

$$-\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^+ \exp(ip_n y) = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n^+ \exp(ip_n y)\,, \quad y \in L^+\,; \tag{33}$$

$$2 \cdot e^{i\partial\ell \sin\varphi \cdot y} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n^+}{W_{0,n}} \exp(ip_n y) =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{b_n^+}{W_{1,n}} + \frac{b_n^-}{\operatorname{sh}(\gamma_{1,n}(d_+ - d_-))} \right) \cdot \exp(ip_n y)\,, \quad y \in L^+\,; \tag{34}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^- \exp(ip_n y) = 0, \quad y \in CL^-\,; \tag{35}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^- \exp(ip_n y) = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n^- \exp(ip_n y)\,, \quad y \in L^-\,; \tag{36}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n^-}{W_{2,n}} \cdot \exp(ip_n y) =$$
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{b_n^-}{W_{1,n}} + \frac{b_n^+}{\operatorname{sh}(\gamma_{1,n}(d_+ - d_-))} \right) \cdot \exp(ip_n y), \quad y \in L^-; \tag{37}$$

где

$$\frac{1}{W_{0,n}} = \frac{1}{\gamma_{0,n}}, \quad \frac{1}{W_{1,n}} = \frac{\operatorname{cth}(\gamma_{1,n}(d_+ - d_-))}{\gamma_{1,n}}, \quad \frac{1}{W_{2,n}} = \frac{\operatorname{th}(\gamma_{2,n}(d_- - D))}{\gamma_{2,n}}, \quad n \in Z. \tag{38}$$

Из представлений (17), (19), (38) следуют асимптотические равенства:

$$\frac{1}{W_{i,n}} = \frac{1}{|n|}\left(1 - \partial\ell \sin\varphi \cdot \frac{1}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad n \to \infty, \quad i = 0, 1, 2. \tag{39}$$

Учитывая (39), введём величины:

$$\Delta_{i,n} = \frac{1}{W_{i,n}} - \frac{1}{|n|}\left(1 - \partial\ell \sin\varphi \cdot \frac{1}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad n \to \infty, \quad i = 0, 1, 2. \tag{40}$$

Действуя также как и в [5], введём в рассмотрение функции:

$$F^+(y) = \frac{\partial u^+}{\partial z}(y, d_+) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^+ \exp(ip_n y), \quad y \in [0, 2\pi]; \tag{41}$$
$$F^-(y) = \frac{\partial u^-}{\partial z}(y, d_-) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^- \exp(ip_n y), \quad y \in [0, 2\pi]. \tag{42}$$

В силу граничных условий (26), (27) функции $F^+(t)$ и $F^-(t)$ обладают свойствами:

$$F^+(y) = 0, \quad y \in CL^+, \quad F^-(y) = 0, \quad y \in CL^-. \tag{43}$$

Из (32)—(33), (35) – (36) следует, что $a_n^+ = -\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} b_n^+$, $a_n^- = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} b_n^-$, $n \in Z$ и, следовательно, справедливы интегральные представления:

$$a_n^+ = -\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} b_n^+ = -\frac{1}{2\pi} \int_{L^+} F^+(t) \exp(-ip_n t)\, dt, \quad n \in Z; \tag{44}$$
$$a_n^- = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} b_n^- = \frac{1}{2\pi} \int_{L^-} F^-(t) \exp(-ip_n t)\, dt, \quad n \in Z. \tag{45}$$

Производя преобразования, аналогичные тем, которые были проведены в работах [6] - [10], получаем:

$$u^+(y, d_+) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n^+}{W_{0,n}} \exp(ip_n y) =$$

$$
= -\left[-\frac{1}{\pi}\int_{L^+}\exp\left(i\partial\ell\sin\varphi\left(y-t\right)\right)\ln\left(2\cdot\sin\frac{y-t}{2}\right)F^+(t)dt+\right.
$$

$$
+\frac{i\partial\ell\sin\varphi}{\pi}\int_{L^+}\exp\left(i\partial\ell\sin\varphi\left(y-t\right)\right)\int_0^{y-t}\ln\left(2\cdot\sin\frac{s}{2}\right)dsF^+(t)dt+
$$

$$
+\frac{1}{\pi}\int_{L^+}\frac{\exp\left(i\partial\ell\sin\varphi\left(y-t\right)\right)}{2W_{0,0}}F^+(t)dt+
$$

$$
\left.+\frac{1}{\pi}\int_{L^+}\exp\left(i\partial\ell\sin\varphi\left(y-t\right)\right)\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{\Delta_{0,n}}{2}\exp\left(in\left(y-t\right)\right)F^+(t)dt\right], \tag{46}
$$

$$
u_2(y,d_-)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{a_n^-}{W_{2,n}}\exp\left(ip_n y\right)=
$$

$$
=-\frac{1}{\pi}\int_{L^-}\exp\left(i\partial\ell\sin\varphi\left(y-t\right)\right)\ln\left(2\cdot\sin\frac{y-t}{2}\right)F^-(t)dt+
$$

$$
+\frac{i\partial\ell\sin\varphi}{\pi}\int_{L^-}\exp\left(i\partial\ell\sin\varphi\left(y-t\right)\right)\int_0^{y-t}\ln\left(2\cdot\sin\frac{s}{2}\right)dsF^-(t)dt+
$$

$$
+\frac{1}{\pi}\int_{L^-}\frac{\exp\left(i\partial\ell\sin\varphi\left(y-t\right)\right)}{2W_{2,0}}F^-(t)dt+
$$

$$
+\frac{1}{\pi}\int_{L^-}\exp\left(i\partial\ell\sin\varphi\left(y-t\right)\right)\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{\Delta_{2,n}}{2}\exp\left(in\left(y-t\right)\right)F^-(t)dt. \tag{47}
$$

Действуя аналогично, для функции $u_1\left(y,d_+\right)$ находим следующее интегральное представление:

$$
u_1(y,d_+)=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\cdot\left[-\frac{1}{\pi}\int_{L^+}\exp\left(i\partial\ell\sin\varphi\left(y-t\right)\right)\ln\left(2\cdot\sin\frac{y-t}{2}\right)F^+(t)dt+\right.
$$

$$
+\frac{i\partial\ell\sin\varphi}{\pi}\int_{L^+}\exp\left(i\partial\ell\sin\varphi\left(y-t\right)\right)\int_0^{y-t}\ln\left(2\cdot\sin\frac{s}{2}\right)dsF^+(t)dt+
$$

$$
\left.+\frac{1}{\pi}\int_{L^+}\frac{\exp\left(i\partial\ell\sin\varphi\left(y-t\right)\right)}{2W_{1,0}}F^+(t)dt+\frac{1}{\pi}\int_{L^+}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{\Delta_{1,n}}{2}\exp\left(ip_n\left(y-t\right)\right)F^+(t)dt\right]-
$$

$$
-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\frac{1}{\pi}\int_{L^-}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left(ip_n\left(y-t\right)\right)}{2\,\mathrm{sh}\left(\gamma_{1,n}\left(d_+-d_-\right)\right)}F^-(t)dt. \tag{48}
$$

Из соотношений (45), (47) получаем следующее интегральное представление:

$$u_1(y,d_-) = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0}\cdot\left[-\frac{1}{\pi}\int_{L^-}\exp\left(i\partial\ell\sin\varphi\,(y-t)\right)\ln\left(2\cdot\sin\frac{y-t}{2}\right)F^-(t)dt+\right.$$
$$+\frac{i\partial\ell\sin\varphi}{\pi}\int_{L^-}\exp\left(i\partial\ell\sin\varphi\,(y-t)\right)\int_0^{y-t}\ln\left(2\cdot\sin\frac{s}{2}\right)dsF^-(t)dt+$$
$$\left.+\frac{1}{\pi}\int_{L^-}\frac{\exp\left(i\partial\ell\sin\varphi\,(y-t)\right)}{2W_{1,0}}F^-(t)dt+\frac{1}{\pi}\int_{L^-}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{\Delta_{1,n}}{2}\exp\left(ip_n\,(y-t)\right)F^-(t)dt\right]-$$
$$-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\frac{1}{\pi}\int_{L^+}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left(ip_n\,(y-t)\right)}{2\,\mathrm{sh}\left(\gamma_{1,n}\,(d_+-d_-)\right)}F^+(t)dt. \tag{49}$$

Введём обозначения:

$$Q_0\,(y,t) = -\frac{\exp\left(i\partial\ell\sin\varphi\,(y-t)\right)}{2\left(\varepsilon_0+\varepsilon_1\right)}\left(\frac{\varepsilon_0}{W_{0,0}}+\frac{\varepsilon_1}{W_{1,0}}\right)-$$
$$-\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{\Delta_{0,n}\cdot\varepsilon_0+\varepsilon_1\cdot\Delta_{1,n}}{2\left(\varepsilon_0+\varepsilon_1\right)}\exp\left(ip_n\,(y-t)\right), \tag{50}$$

$$Q_2\,(y,t) = -\frac{\exp\left(i\partial\ell\sin\varphi\,(y-t)\right)}{2\left(\varepsilon_2+\varepsilon_1\right)}\left(\frac{\varepsilon_2}{W_{2,0}}+\frac{\varepsilon_1}{W_{1,0}}\right)-$$
$$\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{\Delta_{2,n}\cdot\varepsilon_2+\varepsilon_1\cdot\Delta_{1,n}}{2\left(\varepsilon_2+\varepsilon_1\right)}\exp\left(ip_n\,(y-t)\right), \tag{51}$$

$$Q_1\,(y,t) = \frac{\varepsilon_0\cdot\varepsilon_1}{2\varepsilon_2\left(\varepsilon_0+\varepsilon_1\right)}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left(ip_n\,(y-t)\right)}{sh\left(\gamma_{1,n}\,(d_+-d_-)\right)},$$

$$Q_3\,(y,t) = \frac{\varepsilon_1}{2\left(\varepsilon_2+\varepsilon_0\right)}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left(ip_n\,(y-t)\right)}{sh\left(\gamma_{1,n}\,(d_+-d_-)\right)}. \tag{52}$$

В результате подстановки в соотношения (34), (37) интегральных представлений (46) — (49) получаем систему интегральных уравнений первого рода с логарифмической особенностью:

$$\frac{1}{\pi}\int_{L^+}\exp\left(i\partial\ell\sin\varphi\,(y-t)\right)\ln\left|2\cdot\sin\frac{y-t}{2}\right|F^+(t)\,dt-$$
$$-\frac{i\partial\ell\sin\varphi}{\pi}\int_{L^+}\exp\left(i\partial\ell\sin\varphi\,(y-t)\right)\left(\int_0^{y-t}\ln\left(2\cdot\sin\frac{s}{2}\right)ds\right)F^+(t)dt+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{L^+}Q_0\left(y,t\right)F^+(t)dt+\frac{1}{\pi}\int_{L^-}Q_1\left(y,t\right)F^-(t)dt=-\frac{2\cdot\varepsilon_0}{(\varepsilon_0+\varepsilon_1)}\cdot e^{i\partial\ell\sin\varphi\cdot y},\quad y\in L^+; \tag{53}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{L^-}\exp\left(i\partial\ell\sin\varphi\,(y-t)\right)\ln\left|2\cdot\sin\frac{y-t}{2}\right|F^-(t)dt-$$
$$-\frac{i\partial\ell\sin\varphi}{\pi}\int_{L^-}\exp\left(i\partial\ell\sin\varphi\,(y-t)\right)\left(\int_0^{y-t}\ln\left(2\cdot\sin\frac{s}{2}\right)ds\right)F^-(t)dt+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{L^-}Q_2\left(y,t\right)F^-(t)dt+\frac{1}{\pi}\int_{L^+}Q_3\left(y,t\right)F^+(t)dt=0\,,\quad y\in L^-\,. \tag{54}$$

Для удобства записи последующих преобразований введём обозначения:

$$K_{1,i}\left(y,t\right)=e^{i\partial\ell\sin\varphi(y-t)}\cdot\ln\left|2\cdot\sin\frac{y-t}{2}\right|-$$
$$-\frac{i\partial\ell\sin\varphi}{\pi}\exp\left(i\partial\ell\sin\varphi\,(y-t)\right)\int_0^{y-t}\ln\left|2\cdot\sin\frac{s}{2}\right|ds+Q_i\left(y,t\right)\,,\quad i=0,2; \tag{55}$$

$$K_{1,i}\left(y,t\right)=Q_i\left(y,t\right)\,,\quad i=1,3; \tag{56}$$

$$K_{2,i}\left(y,t\right)=-\frac{\partial K_{1,i}\left(y,t\right)}{\partial y}=-\frac{\partial}{\partial y}Q_i\left(y,t\right)+\frac{e^{i\partial\ell\sin\varphi(y-t)}}{2}ctg\left(\frac{t-y}{2}\right)-$$
$$-\left(\partial\ell\sin\varphi\right)^2e^{i\partial\ell\sin\varphi(y-t)}\int_0^{y-t}\ln\left|2\cdot\sin\frac{s}{2}\right|ds\,,\quad i=0,2; \tag{57}$$

$$K_{2,i}\left(y,t\right)=\frac{\partial}{\partial y}Q_i\left(y,t\right)\,,\quad i=1,3\,. \tag{58}$$

В силу условий Майкснера на ребре:

$$F^+(y)=O\left(r_1^{-1/2}\right),\qquad r_1\to0, \tag{59}$$
$$F^-(y)=O\left(r_2^{-1/2}\right),\qquad r_2\to0, \tag{60}$$

где

$$r_1=\min_{q=1,\dots,M^+}\left(\left|y-\alpha_q^+\right|,\left|y-\beta_q^+\right|\right), \tag{61}$$
$$r_2=\min_{s=1,\dots,M^-}\left(\left|y-\alpha_s^-\right|,\left|y-\beta_s^-\right|\right). \tag{62}$$

Условия Майкснера будут выполнены, если мы будем искать сужение функции $F^+(y)$ на интервалы $\left(\alpha_q^+, \beta_q^+\right)$ и функции $F^-(y)$ на интервалы $\left(\alpha_p^-, \beta_p^-\right)$ в виде:

$$F^+(y) = \frac{\nu_q^+(y)}{\sqrt{\left(y-\alpha_q^+\right)\left(\beta_q^+ - y\right)}}\,, \qquad y \in \left(\alpha_q^+, \beta_q^+\right), \quad \left(q = 1, \ldots, M^+\right), \tag{63}$$

$$F^-(y) = \frac{\nu_p^-(y)}{\sqrt{\left(y-\alpha_p^-\right)\left(\beta_p^- - y\right)}}\,, \qquad y \in \left(\alpha_p^-, \beta_p^-\right), \quad \left(p = 1, \ldots, M^-\right), \tag{64}$$

где

$$\nu_q^+(y) \in C\left[\alpha_q^+, \beta_q^+\right], \quad \left(q = 1, \ldots, M^+\right), \quad \nu_p^-(y) \in C\left[\alpha_p^-, \beta_p^-\right], \quad \left(p = 1, \ldots, M^-\right). \tag{65}$$

Введем отображения:

$$g_q^+ : [-1,1] \to \left[\alpha_q^+, \beta_q^+\right], \quad g_q^+(t) = \frac{\beta_q^+ - \alpha_q^+}{2}\tau + \frac{\beta_q^+ + \alpha_q^+}{2}\,, \quad \left(q = 1, \ldots, M^+\right), \tag{66}$$

$$g_p^- : [-1,1] \to \left[\alpha_p^-, \beta_p^-\right], \quad g_q^-(t) = \frac{\beta_p^- - \alpha_p^-}{2}\tau + \frac{\beta_p^- + \alpha_p^-}{2}\,, \quad \left(p = 1, \ldots, M^-\right), \tag{67}$$

и обозначения

$$V_q^+(\tau) = v_q^+\left(g_q^+(\tau)\right), \quad \left(q = 1, \ldots, M^+\right); \tag{68}$$

$$V_p^-(\tau) = v_p^-\left(g_p^-(\tau)\right), \quad \left(p = 1, \ldots, M^-\right); \tag{69}$$

$$R_{1,q,m}^+(\xi,\tau) = K_{1,0}\left(g_q^+(\xi), g_m^+(\tau)\right) - \delta_{q,m}\cdot\ln|\tau-\xi|, \qquad \left(q = 1, \ldots, M^+, \quad m = 1, \ldots, M^+\right); \tag{70}$$

$$R_{1,p,l}^-(\xi,\tau) = K_{1,2}\left(g_p^-(\xi), g_l^-(\tau)\right) - \delta_{p,l}\cdot\ln|\tau-\xi|, \qquad \left(p = 1, \ldots, M^-, \quad l = 1, \ldots, M^-\right); \tag{71}$$

$$R_{2,q,s}^+(\xi,\tau) = K_{1,1}\left(g_q^+(\xi), g_s^-(\tau)\right), \qquad \left(q = 1, \ldots, M^+, \quad s = 1, \ldots, M^-\right); \tag{72}$$

$$R_{2,p,n}^-(\xi,\tau) = K_{1,1}\left(g_p^-(\xi), g_n^+(\tau)\right), \qquad \left(p = 1, \ldots, M^-, \quad n = 1, \ldots, M^+\right). \tag{73}$$

Учитывая (63) — (64), производя замену переменных в соответствии с (66) — (67), переходим от системы ИУ (53) — (54) к системе интегральных уравнений на стандартном интервале $(-1,1)$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln|\tau-\xi|\,\frac{V_q^{+}(\tau)\,d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}+\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{M^+}\int_{-1}^{1}R_{1,q,m}^{+}(\xi,\tau)\frac{V_m^{+}(\tau)\,d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}+$$
$$+\frac{1}{\pi}\sum_{s=1}^{M^-}\int_{-1}^{1}R_{2,q,s}^{+}(\xi,\tau)\frac{V_s^{-}(\tau)\,d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}=-\frac{1}{(1+\varepsilon)}e^{i\partial\ell\sin\varphi\cdot g_q^{+}(\xi)}\,,$$
$$|\xi|<1,\quad \left(q=1,\ldots,M^{+}\right);\quad (74)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln|\tau-\xi|\,\frac{V_p^{+}(\tau)\,d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}+\frac{1}{\pi}\sum_{l=1}^{M^-}\int_{-1}^{1}R_{1,p,l}^{-}(\xi,\tau)\frac{V_l^{-}(\tau)\,d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}+$$
$$+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{M^+}\int_{-1}^{1}R_{2,p,n}^{-}(\xi_p,\tau)\frac{V_n^{-}(\tau)\,d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}=0\,,$$
$$|\xi|<1,\quad \left(p=1,\ldots,M^{-}\right).\quad (75)$$

Пусть:

$$R_{3,q,m}^{+}(\xi,\tau)=K_{2,0}\left(g_q^{+}(\xi)\,,g_m^{+}(\tau)\right)-\delta_{q,m}\cdot\left(\frac{1}{g_q^{+}(\tau)-g_q^{+}(\xi)}\right)]\,,$$
$$\left(q=1,\ldots,M^{+},\quad m=1,\ldots,M^{+}\right);\quad (76)$$

$$R_{3,p,l}^{-}(\xi,\tau)=K_{2,2}\left(g_p^{-}(\xi)\,,g_l^{-}(\tau)\right)-\delta_{p,l}\cdot\frac{1}{g_p^{-}(\tau)-g_p^{-}(\xi)}\,,$$
$$\left(p=1,\ldots,M^{-},\quad l=1,\ldots,M^{-}\right);\quad (77)$$

$$R_{4,q,s}^{+}(\xi,\tau)=K_{2,1}\left(g_q^{+}(\xi)\,,g_s^{-}(\tau)\right)\,,$$
$$\left(q=1,\ldots,M^{+},\quad s=1,\ldots,M^{-}\right);\quad (78)$$

$$R_{4,p,n}^{-}(\xi,\tau)=K_{2,1}\left(g_p^{-}(\xi)\,,g_n^{+}(\tau)\right)\,,$$
$$\left(p=1,\ldots,M^{-},\quad n=1,\ldots,M^{+}\right).\quad (79)$$

Система уравнений (74), (75) с логарифмической особенностью эквивалентна системе СИУ:

$$
\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{g_q^+(\tau)-g_q^+(\xi)}\frac{V_q^+(\tau)\,d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}+\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{M^+}\int_{-1}^{1}R_{3,q,m}^+(\xi,\tau)\frac{V_m^+(\tau)\,d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}+
$$

$$
+\frac{1}{\pi}\sum_{s=1}^{M^-}\int_{-1}^{1}R_{4,q,s}^+(\xi,\tau)\frac{V_s^-(\tau)\,d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}=-i\partial\ell\cdot\sin\varphi\cdot e^{i\partial\ell\sin\varphi\cdot g_q^+(\xi)}\,,
$$

$$
|\xi|<1,\quad \left(q=1,\ldots,M^+\right)\,;\qquad (80)
$$

$$
\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{g_p^-(\tau)-g_p^-(\xi)}\frac{V_p^-(\tau)\,d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}+\frac{1}{\pi}\sum_{l=1}^{M^-}\int_{-1}^{1}R_{3,p,l}^-(\xi,\tau)\frac{V_l^-(\tau)\,d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}
$$

$$
+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{M^+}\int_{-1}^{1}R_{4,p,n}^-(\xi,\tau)\frac{V_n^+(\tau)\,d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}=0\,,
$$

$$
|\xi|<1,\quad \left(p=1,\ldots,M^-\right)\,;\qquad (81)
$$

с дополнительными условиями:

$$
\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln\left|\tau-\xi_q^+\right|\frac{V_q^+(\tau)\,d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}+\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{M^+}\int_{-1}^{1}R_{1,q,m}^+(\xi_q^+,\tau)\frac{V_m^+(\tau)\,d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}+
$$

$$
+\frac{1}{\pi}\sum_{s=1}^{M^-}\int_{-1}^{1}R_{2,q,s}^+(\xi_q^+,\tau)\frac{V_s^-(\tau)\,d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}=e^{i\partial\ell\sin\varphi\cdot g_q^+(\xi_q^+)}\,,
$$

$$
\left(q=1,\ldots,M^+\right)\,;\qquad (82)
$$

$$
\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln\left|\tau-\xi_p^-\right|\frac{V_p^+(\tau)\,d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}+\frac{1}{\pi}\sum_{l=1}^{M^-}\int_{-1}^{1}R_{1,p,l}^-(\xi_p^-,\tau)\frac{V_l^-(\tau)\,d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}+
$$

$$
+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{M^+}\int_{-1}^{1}R_{2,p,n}^-(\xi_p^-,\tau)\frac{V_n^-(\tau)\,d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}=0,
$$

$$
\left(p=1,\ldots,M^-\right)\,;\qquad (83)
$$

где $\xi_q^+\quad (q=1,\ldots,M^+)$ и $\xi_p^-\quad (p=1,\ldots,M^-)$ являются произвольными, но фиксированными точками интервала $(-1,1)$. Доказательство эквивалентности решений системы ИУ (74), (75) с логарифмической особенностью и системы сингулярных ИУ (80), (81) с дополнительными условиями (82), (83) дано в приложении.

Для нахождения функций $V_q^+(\tau)\quad (q=1,\ldots,M^+)$ и $V_p^-(\tau)\quad (p=1,\ldots,M^-)$ можно использовать систему СИУ (73), (74) с дополнительными условиями другого вида.

Для их получения умножим каждое из уравнений (74), (75) на множитель $(1-\xi^2)^{-\frac{1}{2}}$ и проинтегрируем по переменной ξ от -1 до 1.

Учитывая, что

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln|t-t_0|\,\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=-\ln 2, \tag{84}$$

получаем

$$\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{M^+}\int_{-1}^{1}M^+_{1,q,m}(\tau)\frac{V_m^+(\tau)\,d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}+\frac{1}{\pi}\sum_{s=1}^{M^-}\int_{-1}^{1}M^-_{2,q,s}(\tau)\frac{V_s^-(\tau)\,d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}=C_q$$
$$\left(q=1,\ldots,M^+\right); \tag{85}$$

$$\frac{1}{\pi}\sum_{l=1}^{M^-}\int_{-1}^{1}M^-_{1,p,l}(\tau)\frac{V_l^-(\tau)\,d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{M^+}\int_{-1}^{1}M^+_{2,p,n}(\tau)\frac{V_n^-(\tau)\,d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}=0,$$
$$\left(p=1,\ldots,M^-\right), \tag{86}$$

где

$$M^+_{1,q,m}(\tau)=\int_{-1}^{1}R^+_{1,q,m}(\xi,\tau)\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}-\pi\cdot\ln 2\,,$$
$$\left(q=1,\ldots,M^+,\quad m=1,\ldots,M^+\right); \tag{87}$$

$$M^+_{2,q,s}(\tau)=\int_{-1}^{1}R^+_{2,q,s}(\xi,\tau)\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}-\pi\cdot\ln 2\,,$$
$$\left(q=1,\ldots,M^+,\quad s=1,\ldots,M^-\right); \tag{88}$$

$$M^-_{1,p,l}(\tau)=\int_{-1}^{1}R^-_{1,p,l}(\xi,\tau)\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}-\pi\cdot\ln 2\,,$$
$$\left(p=1,\ldots,M^-,\quad l=1,\ldots,M^-\right); \tag{89}$$

$$M^-_{2,p,n}(\tau)=\int_{-1}^{1}R^-_{2,p,n}(\xi,\tau)\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}-\pi\cdot\ln 2\,,$$
$$\left(p=1,\ldots,M^-,\quad n=1,\ldots,M^+\right); \tag{90}$$

$$C_q=-\frac{1}{(1+\varepsilon)}\int_{-1}^{1}\exp\left(i\partial\ell\cdot g_q^+(\xi)\right)\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\,. \tag{91}$$

Доказательство эквивалентности решений системы (74), (75) с логарифмической особенностью и системы сингулярных ИУ (80), (81) с дополнительными условиями (85), (86) дано в приложении.

Таким образом, построены математические модели рассматриваемой задачи теории дифракции на основе систем граничных сингулярных интегральных уравнений с дополнительными условиями. Дискретные математические модели задач и алгоритмы численного решения системы СИУ (80), (81) с дополнительными условиями (82), (83) и системы СИУ (80), (81) с дополнительными условиями (85), (86) основываются на методе дискретных особенностей [11].

Обоснование эквивалентности решений системы с логарифмической особенностью системе СИУ с дополнительными условиями.

Процедура сведения системы интегральных уравнений с логарифмической особенностью в ядре к системе СИУ с дополнительными условиями неоднократно применялась при решении различных задач дифракции [8], [11], [12]. Дадим её обоснование для произвольной системы интегральных уравнений первого рода с логарифмической особенностью в ядре

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln|\tau-\xi|\,\frac{\vartheta_q(\tau)\,d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}+\frac{1}{\pi}\sum_{p=1}^{M}\int_{-1}^{1}\Phi_{q,p}(\xi,\tau)\frac{\vartheta_p(\tau)\,d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}=\nu_q(\xi)\,,$$
$$|\xi|<1,\qquad (q=1,\ldots,M)\,, \quad (92)$$

где $\dfrac{\partial}{\partial\xi}\Phi_{q,p}(\xi,\tau)\in C^{0,\psi}\left([-1,1]\times[-1,1]\right)$, $\quad \psi>0$ при всех возможных значениях индексов p и q. Несложно заметить, что систему интегральных уравнений (74), (75) можно свести к системе (92) с помощью введения новых переменных.

В процессе решения система интегральных уравнений первого рода (92) с логарифмической особенностью сводилась к системе СИУ

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\tau-\xi}\frac{\vartheta_q(\tau)\,d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}+\frac{1}{\pi}\sum_{p=1}^{M}\int_{-1}^{1}\frac{\partial}{\partial\xi}\Phi_{q,p}(\xi,\tau)\frac{\vartheta_p(\tau)\,d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}=\frac{\partial}{\partial\xi}\nu_q(\xi)\,,$$
$$|\xi|<1,\qquad (q=1,\ldots,M)\,, \quad (93)$$

с дополнительными условиями одного из двух видов.

Первый тип условий имеет вид

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln|\tau-\xi_q|\,\frac{\vartheta_q(\tau)\,d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}+\frac{1}{\pi}\sum_{p=1}^{M}\int_{-1}^{1}\Phi_{q,p}(\xi_q,\tau)\frac{\vartheta_p(\tau)\,d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}=\nu_q(\xi_q)\,,$$
$$|\xi_q|<1,\qquad (q=1,\ldots,M)\,. \quad (94)$$

Данное условие получается как результат подстановки произвольных значений $\xi_q \in (-1, 1)$ $(q = 1, \dots, M)$ в уравнение (92).

Второй тип условий имеет вид

$$\sum_{p=1}^{M} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \Lambda_{q,p}(\tau) \frac{\vartheta_q(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} \, d\tau = F_q \,, \quad (q = 1, \dots, M) \,, \tag{95}$$

где

$$\Lambda_{q,p}(\tau) = \left[\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \Phi_{q,p}(\xi_q, \tau) \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} - \ln 2 \cdot \delta_{q,p} \right] , \tag{96}$$

$$F_q = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\nu_q(\xi) \, d\tau}{\sqrt{1-\xi^2}} \, . \tag{97}$$

Данное условие получается в результате умножения обеих частей уравнений (92) на выражение $\left(\pi \sqrt{1-\xi^2}\right)^{-1}$ и интегрирования по переменной ξ от -1 до 1.

Пусть $L_{2,\alpha}$ гильбертово пространство функций со скалярным произведением

$$(u, v)_\alpha = \int_{-1}^{1} u(\tau) \cdot \bar{v}(\tau) \left(1 - \tau^2\right)^{\alpha} d\tau \,, \tag{98}$$

и нормой: $\|v\|_\alpha = \sqrt{(v, v)_\alpha}$. Рассмотрим также пространство функций: $L^0_{2,-\frac{1}{2}} = \left\{ u \in L_{2,-\frac{1}{2}} \middle| (u, 1)_{-\frac{1}{2}} = 0 \right\}$.

Следуя [12], будем рассматривать операторы

$$(\Gamma u)(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{u(\tau)}{\tau - \xi} \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} \,; \tag{99}$$

$$(Lu)(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \ln|\tau - \xi| \frac{u(\tau) \, d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} \,; \tag{100}$$

$$(\Phi_{q,p} u)(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \Phi_{q,p}(\xi, \tau) \frac{u(\tau) \, d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}, \qquad \frac{\partial}{\partial \xi} \Phi_{q,p}(\xi, \tau) \in C^{0,\psi}([-1, 1] \times [-1, 1]) \,, \quad \psi > 0 \,; \tag{101}$$

$$(\partial \Phi_{q,p} u)(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\partial}{\partial \xi} \Phi_{q,p}(\xi, \tau) \frac{u(\tau) \, d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}, \qquad \frac{\partial}{\partial \xi} \Phi_{q,p}(\xi, \tau) \in C^{0,\psi}([-1, 1] \times [-1, 1]) \,, \quad \psi > 0; \tag{102}$$

действующие в паре пространств $\left(L^0_{2,-\frac{1}{2}}, L_{2,\frac{1}{2}}\right)$.

Лемма 1. *Если вектор-функция $Y = Y(\tau) = (\vartheta_1(\tau), \vartheta_2(\tau), \cdots, \vartheta_M(\tau))$ является решением системы уравнений (92), то при подстановке её в систему уравнений (93), уравнения этой системы обращаются в тождество.*

□ Система уравнений (92) в операторных обозначениях имеет вид

$$L\vartheta_q+\sum_{p=1}^{M}K_{q,p}\vartheta_p=\nu_q\ ,\quad (q=1,\dots,M)\ . \tag{103}$$

Пусть Π_α — пространства полиномов со скалярным произведением $(u,v)_\alpha$, а $\Pi_\alpha^0=\{u\in\Pi_\alpha|\,(u,1)_\alpha=0\}$ — пространства полиномов со скалярным произведением $(u,v)_\alpha$, ортогональных константам.

В паре пространств $\left(\Pi^0_{-\frac12},\Pi_{\frac12}\right)$ имеет место соотношения [12]

$$DL=-\Gamma, \tag{104}$$

$$D\Phi_{q,p}=\partial\Phi_{q,p}, \tag{105}$$

где D – оператор дифференцирования.

Пополняя пространство полиномов $\Pi^0_{-\frac12}$ по метрике, порождённой скалярным произведением $(u,v)_{-\frac12}$, получим гильбертово пространство $L^0_{2,-\frac12}$, а при пополнении пространства полиномов $\Pi_{\frac12}$ по метрике, порождённой скалярным произведением $(u,v)_{\frac12}$, получим гильбертово пространство $L_{2,\frac12}$.

Далее расширим по непрерывности операторы Γ и DL с пары пространств $\left(\Pi^0_{-\frac12},\Pi_{\frac12}\right)$ на пару пространств $\left(L^0_{2,-\frac12},L_{2,\frac12}\right)$. Из того, что множества полиномов $\Pi^0_{-\frac12}$ и $\Pi_{\frac12}$ являются всюду плотными в пространствах $L^0_{2,-\frac12}$ и $L_{2,\frac12}$ соответственно, следует справедливость операторных равенств (104), (105) в паре пространств $\left(L^0_{2,-\frac12},L_{2,\frac12}\right)$.

Применяя оператор дифференцирования к левой и правой части равенства (103) и учитывая (104), (105) имеем

$$-\Gamma\vartheta_q+\sum_{p=1}^{M}\partial K_{q,p}\vartheta_p=D\nu_q,\quad (q=1,\dots,M)\,.\ \blacksquare \tag{106}$$

Теорема 1. *Система интегральных уравнений* (92) *эквивалентна системе СИУ* (93) *с дополнительными условиями* (94).

□ На основании леммы заключаем, что если функции $\{\vartheta_q\}_{q=1}^M$ являются решением системы уравнений (92) то они удовлетворяют системе СИУ (93) и дополнительным условиям (94), которые получаются как результат подстановки произвольных значений $\xi_q\in(-1,1)\quad(q=1,\dots,M)$ в уравнения системы (92).

Докажем теперь обратное. Пусть функции $\{\vartheta_q(\tau)\}_{q=1}^M$ являются решением системы СИУ (93) с дополнительными условиями (94). Из (93) с учётом (104), (105) следует, что:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln|\tau-\xi|\,\frac{\vartheta_q(\tau)\,d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}+\frac{1}{\pi}\sum_{p=1}^{M}\int_{-1}^{1}\Phi_{q,p}(\xi,\tau)\frac{\vartheta_p(\tau)\,d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}=\nu_q(\xi)+C_q\,,$$

$$|\xi|<1, \quad (q=1,\ldots,M)\,. \quad (107)$$

При подстановке значений $\xi_q\in(-1,1)\quad(q=1,\ldots,M)$ в уравнения системы (107) на основании условия (94) получаем, что $C_q=0\quad(q=1,\ldots,M)$. Таким образом показано, что если функции $\{\vartheta_q(\tau)\}_{q=1}^{M}$ являются решением системы СИУ (93) с дополнительными условиями (94), то они являются решением системы уравнений (92). ■

Теорема 2. *Система интегральных уравнений* (92) *эквивалентна системе СИУ* (93) *с дополнительными условиями* (95).

□ Как уже было показано ранее, из леммы следует, что если функции $\{\vartheta_q(\tau)\}_{q=1}^{M}$ являются решением системы уравнений (92), то они удовлетворяют системе СИУ (93).

Умножим обе части уравнений (92) на выражение $\left(\pi\sqrt{1-\xi^2}\right)^{-1}$ и проинтегрируем по переменной ξ от -1 до 1.

С учётом соотношения

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln|\tau-\xi|\,\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}=-\ln 2\,, \qquad (108)$$

имеем

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sum_{p=1}^{M}\Phi_{q,p}(\xi,\tau)\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}-\ln 2\right]\frac{\vartheta_q(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}\,d\tau=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\nu_q(\xi)\,d\tau}{\sqrt{1-\xi^2}}\,,$$

$$(q=1,\ldots,M)\,. \quad (109)$$

Таким образом, доказано, что если функции $\{\vartheta_q\}_{q=1}^{M}$ являются решением системы уравнений (92) то они удовлетворяют системе СИУ (93) с дополнительными условиями (95).

Докажем теперь обратное. Пусть функции $\{\vartheta_q(\tau)\}_{q=1}^{M}$ удовлетворяют системе СИУ (93) с дополнительными условиями (95).

Как было показано выше, решения системы СИУ (93) удовлетворяют соотношениям (107).

В результате умножения обеих частей уравнения (107) на выражение $\left(\pi\sqrt{1-\xi^2}\right)^{-1}$ и интегрирования по переменной ξ от -1 до 1 получаем:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sum_{p=1}^{M}\Phi_{q,p}(\xi,\tau)\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}-\ln 2\right]\frac{\vartheta_q(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}\,d\tau=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\nu_q(\xi)\,d\tau}{\sqrt{1-\xi^2}}+C_q\,,$$

$$(q=1,\ldots,M)\,. \quad (110)$$

Учитывая систему дополнительных условий (94) получаем, что $C_q = 0, \quad (q = 1, \ldots, M)$. ■

Литература

1. Гандель Ю.В., Душкин В.Д. Математические модели на основе СИУ 2D задач дифракции на многослойных периодических отражающих структурах. Часть I. Случай Е-поляризации // Научные ведомости БелГу Серия Математика. Физика. – 2011. – № 5(100). – Вып. 22. – С.5-16.

2. Гандель Ю.В. Параметрические представления сингулярных интегральных преобразований и краевые задачи математической физики // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. Киев: институт математики НАН Украины, 1995. – С.65-66.

3. Gandel' Yu.V. Parametric Representations of Singular Integral Transforms in Boundary Value Problems of the Diffraction // International Conference Boundary Value Problems, Special functional and Fractional Calculus. – Minsk, 1996. – P.131.

4. Гандель Ю.В. Параметрические представления сингулярных интегральных операторов и математическое моделирование в задачах электродинамики // Труды VII Международного симпозиума МДОЗМФ'97. – Феодосия, 1997. – С.176-178.

5. Гандель Ю.В. О парных рядах Фурье некоторых смешанных краевых задач математической физики // Теория функций, функциональный анализ и их приложения / Харьков: Вища школа,1982. – 38. – С.15-18.

6. Гандель Ю.В. Забуга Т.А. Численный метод дискретных особенностей в задачах дифракции волн на решётках // Харьков, 1983. Рукопись представлена Харьк. ун-том. Деп. в УкрНИИНТИ 21 ноября 1983, № 1286Ук-Д83. – 37 с.

7. Гандель Ю.В. Душкин В.Д. Численное решение сингулярного уравнения задач дифракции электромагнитных волн на решетке // Харьков: Харьков. ун-т, 1993. – 20 с. Деп. в УкрИНТЭИ № 208-УК93, 18.02.93.

8. Гандель Ю.В. Парные сумматорные и сингулярные интегральные уравнения в задачах дифракции: теория и численные методы. / Ю.В. Гандель // Автореферат дисс. доктора физ.-мат. наук, Харьков, 1994, 31 с.

9. Гандель Ю.В. Душкин В.Д. Фельдман М.Б. Численный анализ дифракции электромагнитных волн на периодических многоэлементных решетках, состоящих из прямоугольных брусьев // Харьков, 1994. -21 с. Рукопись представлена Харьк. ун-том. Деп. в ГНТБ Украины 5.12.94. № 2290-Ук94.

10. Гандель Ю.В. Душкін В.Д. Сингулярні штегральні рівняння двовимірних задач дифракції електромагнітних хвиль // Інтегральні перетворення, Зб. наук. праць. - Київ: Ін-т математики НАН України, Вип. 13, 1996. – С.14-24.

11. Gandel' Yu.V., Lifanov place I.K., Polyanskaya T.S. On the Justification of the Method of Discrete Singularities for Two-Dimensional Diffraction Problems // Differential Equations. – 1995. – 31; 9. – P.1491-1497.

12. Гандель Ю.В. Лекции о численных методах для сингулярных интегральных уравнений / Учебное пособие, часть I. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов / Харьков: Издательство Харьковского национального университета, 2001. – 92 с.

MATHEMATICAL MODELS BASED ON SIE 2D DIFFRACTION PROBLEMS ON PERIODIC MULTILAYER REFLECTIVE STRUCTURES.
Part II. H-Polarization case

Yu.V. Gandel, V.D. Dushkin

Kharkiv National University. VN Karazin,
Svobody sq., 4, Kharkov, 61077, Ukraine, e-mail: Yuriy.V.Gandel@univer.kharkov.ua
Academy IF of MIA of Ukraine,
Povstanya sq., 3, Kharkov, 61005, Ukraine, e-mail: Dushkin_V_and_V@mail.ru

Abstract. 2D problems of electromagnetic waves diffraction on multilayer reflecting structures lead to boundary-value problems for Helmholtz's equations. In the case of H-polarization these problems are reduced to systems of boundary singular integral equations of first kind with logarithmic additional conditions and to systems of singular integral equations of first kind with integral additional conditions. Numerical solution of these equations is based on the efficient and strictly proved method of discrete singularities.

Key words: diffraction problems, multilayer reflecting structures, boundary-value problems, singular integral equations.