УДК 517.91

ОБ ОСЦИЛЛЯЦИЯХ, ПОРОЖДАЕМЫХ ОПЕРАТОРОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В ДИСКРЕТНЫХ КИНЕТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ [14)]

Е.В. Радкевич [15)]

Московский государственный университет,
Ленинские горы, 1, В-899, Москва, 119899, Россия, e-mail: evrad07@gmail.com

Аннотация. Для дискретных уравнений кинетики доказано существование глобального решения, получено разложение его по гладкости, исследовано влияние осцилляций, порождаемых оператором взаимодействия.

Ключевые слова: кинетическое уравнение, оператор взаимодействия, глобальное решение.

1. Введение

Кинетическая теория рассматривает газ как совокупность громадного числа хаотически движущихся частиц тем или иным образом взаимодействующих между собой. В результате таких взаимодействий частицы обмениваются импульсами и энергией. Взаимодействие может осуществляться путем прямого столкновения частиц или при помощи тех или иных сил. Для пояснения математической схемы, описывающей подобные явления, в [1] рассматриваются так называемые дискретные модели кинетического уравнения Больцмана и приводится феноменологический вывод уравнения Больцмана для газовой модели с конечным числом различных скоростей частиц и конечным числом разных взаимодействий (модели типа Бродуэлла [2])

$$\partial_t n_i + (\omega_{ix}\partial_x + \omega_{iy}\partial_y + \omega_{iz}\partial_z)n_i = \sum_{k,l,j;k\neq i,l\neq i,j\neq i} \sigma^{ij}_{kl}(n_k n_l - n_i n_j)\,, \quad i = 1,\dots,N \qquad (1)$$

Потребуем справедливости так называемого закона детального равновесия

$$\sigma^{ij}_{kl} = \sigma^{kl}_{ij}\,,$$

который обычно имеет место для реальных систем. Более того, для любых φ_i имеет место

$$\partial_t(\varphi_i n_i) + (\omega_{ix}\partial_x + \omega_{iy}\partial_y + \omega_{iz}\partial_z)(\varphi_i n_i) = \qquad (2)$$
$$= \sum_{k,l,j;k\neq i,l\neq i,j\neq i} \sigma^{ij}_{kl}(\varphi_i + \varphi_j - \varphi_l - \varphi_k)(n_k n_l - n_i n_j)\,.$$

---

[14]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант N: 09-01-12024), (грант N: 09-01-00288) и (грант N:11-01-12082-офи$_{\text{М}}$)

[15]Радкевич Е.В., д. физ.- мат. наук, профессор Московского государственного университета

Отсюда следует, что $n_i > 0, \; i = 1, \dots, n_N$, если начальные условия $n_i^0 > 0, \; i = 1, \dots, n_N$.

Для $\varphi_j \equiv 1$ имеет место уравнение неразрывности

$$\partial_t(\sum_{j=1}^{N} n_j) + \partial_x(\sum_{j=1}^{N}(\omega_{jx}\partial_x + \omega_{jy}\partial_y + \omega_{jz}\partial_z)n_j = 0$$

для $\varphi_j = \ln n_j$ имеет место Н-теорема Больцмана

$$\partial_t(n_i \ln n_i) + (\omega_{ix}\partial_x + \omega_{iy}\partial_y + \omega_{iz}\partial_z)(n_i \ln n_i) = \sum_{k,l,j;k\neq i,l\neq i,j\neq i} \sigma_{kl}^{ij} \ln(\frac{n_i n_j}{n_l n_k})(n_k n_l - n_i n_j) \,.. \tag{3}$$

Для того чтобы выполнялись другие законы сохранения, *надо накладывать на законы столкновения частиц* дополнительные условия, чтобы существовали такие φ_j, при которых правая часть уравнения (3) обращалась бы в нуль. Способ выбора дискретных скоростей, обеспечивающих описание течения газа с законами сохранения трех компонент импульса и с сохранением энергии в общем случае не разработан. Это связано с трудностями комбинаторно-геометрического характера [1].

Для кинетического уравнения Больцмана широко дискутируются две проблемы:

1. Необратимость (во времени);
2. Исследование структуры аттрактора.

Вторая проблема связана с исследованием сложной размерности аттрактора через описание составляющих его разноразмерных податтракторов. Но, кинетическое уравнение Больцмана чрезвычайно сложно в исследовании. Дискретные кинетические уравнения, обладающие основными свойствами кинетического уравнения Больцмана, позволяют понять природу этих проблем.

В этой статье мы рассмотрим задачу Коши для одномерной модели типа Бродуэлла (см.[1]):

$$\partial_t u + \partial_x u = \frac{1}{\varepsilon}(v^2 - uw)\,, \tag{4}$$

$$\partial_t v = -\frac{2}{\varepsilon}(v^2 - uw)\,,$$

$$\partial_t w - \partial_x w = \frac{1}{\varepsilon}(v^2 - uw)\,,$$

$$v(0) = v^0, \; u(0) = u^0, \; w(0) = w^0\,, \tag{5}$$

и ее модификацию (комплексификацию):

$$\partial_t u + \partial_x u = \frac{1}{\varepsilon}[v\overline{v} - \frac{1}{2}(u\overline{w} + w\overline{u})]\,, \tag{6}$$

$$\partial_t v = -\frac{2}{\varepsilon}[v\overline{v} - \frac{1}{2}(u\overline{w} + w\overline{u})]\,,$$

$$\partial_t w - \partial_x w = \frac{1}{\varepsilon}[v\overline{v} - \frac{1}{2}(u\overline{w} + w\overline{u})]\,,$$

формально совпадающую с (4) на вещественных решениях. Здесь $x \in S^1 = [0, 2\pi]$ и $U(t,0) = U(t,2\pi)$ – пространственно-периодические граничные условия, ε-малая величина, которую мы выберем ниже. Все полученные результаты переносятся на двумерную и трехмерную модели (1), приведенные в [1].

Система (4) является кинетическим уравнением Больцмана модельного одномерного газа, состоящего из частиц со скоростями $c = 1,\ 0,\ -1$ (их плотности соответственно $u = n_1(x,t),\ v = n_2(x,t),\ w = n_3(x,t)$). Две частицы-одна первого, а вторая третьего типов, сталкиваясь с вероятностью, пропорциональной $uw = n_1(x,t)n_3(x,t)$, вызывают реакцию, переводящую их в две частицы второго типа. В свою очередь, две частицы второго типа, сталкиваясь с вероятностью $v^2 = n_2(x,t)^2$, переходят в одну частицу первого типа и в одну частицу третьего типа. Эта модель при всей схожести с моделью Карлемана не имеет квадратичных диссипирующих интегралов, в связи с чем, как отмечено в [1], получение глобальной теоремы существования затруднительно.

Дискретные модели кинетики достаточно просты, но очень интересны с точки зрения *потери симметрии* [3], [4] и наличия эффекта *необратимости.* Более того, они дают подход к объяснению фрактальной, многоразмерной сложности аттрактора через его структуировванность, позволяют проверить гипотезу существования податтракторов кинетических уравнений. По сути, приемом довольно часто применяемым в математике, удается уйти от хорошо известной сложности исследования кинетического уравнения Больцмана за счет разбиения частиц на семейства, расположенные в разных подпространствах и способных в результате взаимодействия переходить из одного подпространства в другое. Формально, за счет увеличивая размерность пространства переменных, удается упростить, сделать болеет прозрачным действие оператора взаимодействий, доказать существование глобальных решений и получить их разложение по гладкости.

Для нас эти модели интересны еще с той точки зрения, что предварительный анализ спектра линеаризованных задач в окрестности равновесия установил наличие «щели» [6] в спектре, гарантирующей существование корректного усечения задачи [11], [13] в фазовое пространство консервативных (гидродинамических) переменных. Тем самым, удастся всю полученную информацию «спустить» вниз, в физические размерности пространства и получить информацию о природе реального оператора взаимодействия.

Мы докажем существование глобального малого возмущения $U = U_e + \varepsilon^2\mathfrak{U}$ решения в окрестности состояния равновесия $U_e = (u_e, v_e, w_e)^\top,\ v_e^2 = u_e w_e,\ \mathfrak{U} = (\overline{u}, \overline{v}, \overline{w})^\top$.

Малые возмущения (в окрестности состояния равновесия $v_e^2 = u_e w_e$). Положим $\widetilde{u} = u_e/\varepsilon, \widetilde{w} = w_e/\varepsilon, \widetilde{v} = v_e/\varepsilon$. Решение будем искать в следующем виде

$$u = u_e + \varepsilon^2 u_e^{\frac{1}{2}}\overline{u}\,,\ v = v_e + \varepsilon^2 v_e^{\frac{1}{2}}\overline{v}\,,\ w = w_e + \varepsilon^2 w_e^{\frac{1}{2}}\overline{w}\,.$$

Тогда система запишется в виде

$$\begin{gathered}\partial_t\overline{U} + A\partial_x\overline{U} + B\overline{U} = \varepsilon^{\frac{3}{2}}\nu^{\frac{1}{2}}\Gamma(\overline{U},\overline{U})\,,\\ \overline{U}(0) = U^0\,,\end{gathered} \tag{7}$$

где

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}\widetilde{w}&-2\sqrt{\widetilde{w}\widetilde{v}}&\widetilde{v}\\-2\sqrt{\widetilde{w}\widetilde{v}}&4\widetilde{v}&-2\sqrt{\widetilde{u}\widetilde{v}}\\\widetilde{v}&-2\sqrt{\widetilde{u}\widetilde{v}}&\widetilde{u}\end{pmatrix},\ \nu^{\frac{1}{2}}=\begin{pmatrix}\widetilde{w}^{\frac{1}{2}}\\-2\widetilde{v}^{\frac{1}{2}}\\\widetilde{u}^{\frac{1}{2}}\end{pmatrix}.$$

$$\Gamma(U,U)=\overline{v}^2-\overline{u}\overline{w}\,,\qquad \overline{U}=(\overline{u},\overline{v},\overline{w})^T\,.$$

Воспользуемся рядами Фурье по x

$$\overline{U}(t,x)=\sum_Z U_k(t)e^{ikx},\ \ U_k\in C,\ U_k(t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{U}(t,x)e^{-ikx}dx\,,$$

где $U_{-k}=\overline{U_k}$, так как $U(x,t)$ вещественнозначная. Введем нормализованную L_2-норму для вещественнозначной функции $f(x)$

$$\|f\|^2_{H^0}=\|f\|^2_{L_2}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)^2dx=|f_0|^2+\sum_{Z\in Z_0}|f_k|^2\,.$$

Положим

$$\|f\|^2_{H^s}=|f_0|^2+\|f\|^2_{\overset{\circ}{H^s}},\ \ \|f\|^2_{\overset{\circ}{H^s}}=\sum_{Z_0}|k|^{2s}|f_k|^2,\ s\in R,\ Z_0=Z\setminus\{0\}\,.$$

Далее мы будем использовать это определение нормы как для решения U, так и для последовательности $\{U_k\}$.

Используя представление Фурье (в образах Фурье) функции U (как гладкого решения (4) перепишем (4) в виде бесконечной связанной системы обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов Фурье $U_k(t)=(u_k,w_k,v_k)^T$,

$$\frac{d}{dt}U_k+\Lambda(k)U_k=\varepsilon^{\frac{3}{2}}\nu^{\frac{1}{2}}\widehat{\Gamma(U,U)}_k,\ \ \Gamma(\widehat{U},\widehat{U})_k=\sum_{k_1+k_2=k}(GU_{k_1},U_{k_2})\,, \tag{8}$$

где

$$\Lambda=Aik+B=\begin{pmatrix}\widetilde{w}+ik&\widetilde{v}&-2\sqrt{\widetilde{w}\widetilde{v}}\\\widetilde{v}&\widetilde{u}-ik&-2\sqrt{\widetilde{u}\widetilde{v}}\\-2\sqrt{\widetilde{w}\widetilde{v}}&-2\sqrt{\widetilde{u}\widetilde{v}}&4\widetilde{v}\end{pmatrix},\quad G=\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

1). Нулевая мода($k=0$).

$$\frac{d}{dt}U_0+\Lambda(0)U_0=\varepsilon^{\frac{3}{2}}\nu^{\frac{1}{2}}\widehat{\Gamma(U,U)}_0\,, \tag{9}$$

$$\Lambda(0)=\begin{pmatrix}\widetilde{w}&\widetilde{v}&-2\sqrt{\widetilde{w}\widetilde{v}}\\\widetilde{v}&\widetilde{u}&-2\sqrt{\widetilde{u}\widetilde{v}}\\-2\sqrt{\widetilde{w}\widetilde{v}}&-2\sqrt{\widetilde{u}\widetilde{v}}&4\widetilde{v}\end{pmatrix}$$

или

$$\frac{1}{\widetilde{w}^{1/2}}\frac{d}{dt}u_0+\widetilde{w}^{1/2}u_0+\widetilde{u}^{1/2}w_0-2\widetilde{v}^{1/2}v_0=\varepsilon^{3/2}\left[v_0^2-u_0w_0+\sum_{k>0}(2|v_k|^2-u_kw_{-k}-u_{-k}w_k\right], \tag{10}$$

$$\frac{1}{\widetilde{u}^{1/2}}\frac{d}{dt}w_0+\widetilde{w}^{1/2}u_0+\widetilde{u}^{1/2}w_0-2\widetilde{v}^{1/2}v_0=\varepsilon^{3/2}\left[v_0^2-u_0w_0+\sum_{k>0}(2|v_k|^2-u_kw_{-k}-u_{-k}w_k\right],$$

$$-\frac{1}{2\widetilde{v}^{1/2}}\frac{d}{dt}v_0+\widetilde{w}^{1/2}u_0+\widetilde{u}^{1/2}w_0-2\widetilde{v}^{1/2}v_0=\varepsilon^{3/2}\left[v_0^2-u_0w_0+\sum_{k>0}(2|v_k|^2-u_kw_{-k}-u_{-k}w_k\right].$$

Отсюда

$$\frac{d}{dt}(\widetilde{u}^{1/2}u_0)=\frac{d}{dt}(\widetilde{w}^{1/2}w_0)=-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\widetilde{v}^{1/2}v_0)\,.$$

Тогда

$$\widetilde{u}^{1/2}(u_0-u_0^0)=\widetilde{w}^{1/2}(w_0-w_0^0)=-\frac{1}{2}\widetilde{v}^{1/2}(v_0-v_0^0)\,.$$

Подставляя в последнее уравнение, получаем

$$\frac{d}{dt}v_0+\frac{1}{\varepsilon}L_ev_0-\varepsilon v_e^{1/2}d_0=-\varepsilon\, v_e^{1/2}\left[\frac{3}{2}\,v_0^2+2bv_0-2c\right]-2\varepsilon\, v_e^{1/2}(B(v,v)_0+H(v)_0)\,, \tag{11}$$

$$v_0|_{t=0}=v_0^0\,,$$

где $L_e=4v_e+u_e+w_e$,

$$B(v,v)_0=\sum_{k_1+k_2=0}\left[v_{k_1}v_{k_2}-\frac{1}{4}\left(v_{k_1}-ik_1\int_0^t e^{-ik_1(t-s)}v_{k_1}ds)(v_{k_2}+ik_2\int_0^t e^{ik_2(t-s)}v_{k_1}ds\right)\right],$$

$$H(v)_0=\frac{1}{4}\sum_{k_1+k_2=0}\left(e^{k_2t}\left(2w_{k_2}^0\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}+v_{k_2}^0\right)\left(v_{k_1}-ik_1\int_0^t e^{-ik_1(t-s)}v_{k_1}ds\right)+\right.$$

$$\left.+e^{-k_1t}\left(2w_{k_1}^0\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}+v_{k_1}^0\right)\left(v_{k_2}+ik_2\int_0^t e^{ik_2(t-s)}v_{k_1}ds\right)\right),$$

$$d_0=\frac{1}{2}\sum_{k_1+k_2=0,\ k_1,k_2\in Z_0}e^{i(k_2-k_1)t}\left(2w_{k_1}^0\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}+v_{k_1}^0\right),\quad Z_0=\{k\in Z,k\neq 0\}\,,$$

$$b=-\frac{1}{2}\left(u_0^0\,\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}+w_0^0\,\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}+v_0^0\right),\quad c=\frac{1}{4}\left(2u_0^0\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}+v_0^0\right)\left(2w_0^0\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}+v_0^0\right).$$

Выберем начальные данные из условий

$$v_0^0 = -\frac{2(\widetilde{v}^{1/2}\widetilde{w}^{1/2}u_0^0 + \widetilde{v}^{1/2}\widetilde{u}^{1/2}w_0^0)}{\widetilde{u}+\widetilde{w}}\,, \qquad u_e^{1/2}u_0^0 - w_e^{1/2}w_0^0 = 0\,, \tag{12}$$

отвечающих двум законам сохранения системы (8). Тогда $b = c = H(v_0)_0 = 0$.

Неоднородное уравнение Риккати. Теперь рассмотрим неоднородное уравнение Риккати в случае, когда $a_0 = \mathrm{const}$:

$$\frac{d}{dt}v_0 + \frac{1}{\varepsilon}L_e v_0 + d_0 = -\frac{3}{2}\,\varepsilon\, v_e^{1/2}v_0^2 + 2\varepsilon^{3/2}\widetilde{v}^{1/2}f(t)\,, \tag{13}$$
$$v_0|_{t=0} = v_0^0\,.$$

Приведем здесь хорошо известные факты о неоднородном уравнении Риккати. Положим $v_0 = v_{\mathrm{stn}} + \varepsilon z$

$$\frac{d}{dt}z + \frac{1}{\varepsilon}(L_e - 3\varepsilon^2 v_e^{1/2}v_{\mathrm{stn}})z = -\frac{3}{2}\,\varepsilon\, v_e^{1/2}z^2 + f(t)\,, \tag{14}$$
$$z|_{t=0} = 0\,,$$

где v_{stn} – ограниченное решение стандартного уравнения

$$\frac{d}{dt}v_{\mathrm{stn}} + \frac{1}{\varepsilon}L_e v_{\mathrm{stn}} + d_0 = -\frac{3}{2}\,\varepsilon\, v_e^{1/2}v_{\mathrm{stn}}^2\,, \tag{15}$$
$$v_0|_{t=0} = v_0^0\,.$$

Положим

$$L = \min_{0\leqslant s\leqslant\infty}\left(L_e - \frac{3}{2}\,\varepsilon^2 v_{\mathrm{stn}}\right) > 0, \quad M_0 = \max_{0\leqslant s\leqslant\infty}|f(t)|\,.$$

Предложение 1. *Пусть фиксировано M_0, $\max\limits_{0\leqslant s\leqslant\infty}|f(t)| \leqslant M_0$, а равновесные значения u_e, v_e, w_e и постоянная ε выбраны из условия*

$$\varepsilon^2\,\frac{(1+3\varepsilon\, v_e M_0)^4}{L^2}\left(1 + \frac{3\varepsilon^3\, v_e M_0}{L^2}\right)^2 \leqslant 1\,. \tag{16}$$

Тогда существует абсолютно непрерывное решение задачи (15), для которого справедлива оценка

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|z(t)| \leqslant (1+3\varepsilon\, v_e M_0)^2\left(1 + \frac{3\varepsilon^3\, v_e M_0}{L^2}\right)\,. \tag{17}$$

□ Рассмотрим приближение

$$\frac{d}{dt}z_n + \frac{1}{\varepsilon}\,(L_e + 3\varepsilon^2 v_{\mathrm{stn}})z_n = -\frac{3}{2}\,\varepsilon\, v_e^{1/2}z_{n-1}^2 + f(t)\,, \tag{18}$$
$$z_n|_{t=0} = 0\,,$$

$$z_n = \int\limits_0^t \exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t (L_e + 3\varepsilon^2 v_{\rm stn})d\tau\right\}\cdot\left[\frac{3}{2}\,\varepsilon\, v_e^{1/2} z_{n-1}^2 + f(t)\right] ds\,,$$

$$|z_n(t)| \leqslant \sup_{0\leqslant s\leqslant t}|f(s)|\,\frac{\varepsilon}{(L_e + 3\varepsilon^2 v_{\rm stn})}\left[1 + \frac{3}{2}\,\varepsilon\, v_e^{1/2}\frac{\left(\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant t}|z_{n-1}|\right)^2}{\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant t}|f(s)|}\right],$$

$$|z_1(t)| \leqslant \sup_{0\leqslant s\leqslant t}|f(s)|\frac{1}{L}\left(1 + \frac{3}{2}\,\varepsilon\, v_e^{1/2}\sup_{0\leqslant s\leqslant t}|f|\right),$$

$$|z_2(t)| \leqslant \sup_{0\leqslant s\leqslant t}|f(s)|\,\frac{\varepsilon}{L}\,\left(1 + \frac{3}{2}\varepsilon\, v_e^{1/2}\sup_{0\leqslant s\leqslant t}|f(s)|\frac{\varepsilon^2}{L^2}\left(1 + \frac{3}{2}\varepsilon\, v_e^{1/2}\sup_{0\leqslant s\leqslant t}|f|\right)^2\right).$$

Положим $q = \dfrac{3}{2}\varepsilon\, v_e^{1/2}\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant t}|f(s)|$,

$$s_1 = 1 + q\,,$$

$$s_2 = 1 + \frac{\varepsilon^2 q}{L^2}(1+q)^2 \leqslant (1+q)^2\left(1 + \frac{\varepsilon^2 q}{L^2}\right),$$

$$s_3 = 1 + \frac{\varepsilon^2 q}{L^2}\left[1 + \frac{\varepsilon^2 q}{L^2}(1+q)^2\right]^2 \leqslant 1 + q\frac{\varepsilon^2(1+q)^4}{L^2}\left(1 + \frac{\varepsilon^2 q}{L^2}\right)^2 \leqslant 1 + q\,,$$

если $q \in (0,1), L > \varepsilon$ выбраны из условия

$$\frac{\varepsilon^2(1+q)^4}{L^2}\left(1 + \frac{\varepsilon^2 q}{L^2}\right)^2 \leqslant 1 \quad\Longleftrightarrow$$

$$\frac{\varepsilon^2\left(1 + \frac{3}{2}\varepsilon\, v_e^{1/2}\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant t}|f(s)|\right)^4}{L^2}\left(1 + \frac{\frac{3}{2}\,\varepsilon^3\, v_e^{1/2}\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant t}|f(s)|}{L^2}\right)^2 \leqslant 1\,.$$

Тогда

$$s_4 = 1 + \frac{\varepsilon^2 q}{L^2}\left(1 + \frac{\varepsilon^2 q}{L^2}\left[1 + \frac{\varepsilon^2 q}{L^2}(1+q^2)^2\right]^2\right)^2 \leqslant 1 + \frac{\varepsilon^2 q}{L^2}(1+q)^2 \leqslant (1+q)^2\left(1 + \frac{\varepsilon^2 q}{L^2}\right),$$

$$s_5 = 1 + \frac{\varepsilon^2 q}{L^2}\left[1 + \frac{\varepsilon^2 q}{L^2}\left(1 + \frac{\varepsilon^2 q}{L^2}\left[1 + \frac{\varepsilon^2 q}{L^2}(1+q^2)^2\right]^2\right)^2\right] = 1 + \frac{\varepsilon^2 q}{L^2}\,s_4 \leqslant$$

$$\leqslant 1 + \frac{\varepsilon^2 q}{L^2}(1+q)^2\left(1 + \frac{\varepsilon q}{L^2}\right) \leqslant 1 + \frac{\varepsilon q}{L} \leqslant 1 + q\,.$$

Таким образом,

$$s_{2j+1} \leqslant \; 1+q, \quad s_{2j} \leqslant \; (1+q)^2\left(1+\frac{\varepsilon^2 q}{L^2}\right).$$

Отсюда следует, что

$$s_j \leqslant \; (1+q)^2(1+\frac{\varepsilon^2 q}{L^2}), \quad \forall\, j \geqslant 1$$

и

$$\sup_{0\leqslant s\leqslant t}|z_j(s)| \leqslant \; \left(1+\frac{3}{2}\,\varepsilon\, v_e^{1/2}\sup_{0\leqslant s\leqslant t}|f(s)|\right)^2\left(1+\frac{\frac{3}{2}\,\varepsilon^3\, v_e^{1/2}\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant t}|f(s)|}{L^2}\right), \quad j\geqslant 1\,.$$

Далее, положим $y_n = z_n - z_{n-1}$. Тогда

$$\frac{d}{dt}y_n + \frac{1}{\varepsilon}\,(L_e+3\varepsilon^2 v_{\mathrm{stn}})y_n = -\frac{3}{2}\,\varepsilon\, v_e^{1/2}(z_{n-1}+z_{n-2})y_{n-1}\,, \tag{19}$$
$$y_n|_{t=0} = 0\,,$$

$$y_n = -\int\limits_0^t \exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t (L_e+3\varepsilon^2 v_{\mathrm{stn}})\, d\tau\right\}\cdot\frac{3}{2}\,\varepsilon v_e^{1/2}(z_{n-1}+z_{n-2})y_{n-1}ds\,,$$

$$|y_n(t)| \leqslant \frac{3}{2}\,\varepsilon\, v_e^{1/2}\frac{\varepsilon}{L}\sup_{0\leqslant s\leqslant t}|y_{n-1}(s)|\left(\sup_{0\leqslant s\leqslant t}|z_{n-1}(s)| + \sup_{0\leqslant s\leqslant t}|z_{n-2}(s)|\right) \leqslant$$

$$\leqslant 3\varepsilon\, v_e^{1/2}\frac{\varepsilon}{L}\left(1+\frac{3}{2}\varepsilon\, v_e^{1/2}\sup_{0\leqslant s\leqslant t}|f(s)|\right)^2\left(1+\frac{\frac{3}{2}\,\varepsilon^3\, v_e^{1/2}\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant t}|f(s)|}{L^2}\right)\sup_{0\leqslant s\leqslant t}|y_{n-1}(s)|\,.$$

Выбираем дополнительно, чтобы

$$3\varepsilon\, v_e^{1/2}\frac{\varepsilon}{L}\left(1+\frac{3}{2}\,\varepsilon\, v_e^{1/2}\sup_{0\leqslant s\leqslant t}|f(s)|\right)^2\left(1+\frac{\frac{3}{2}\,\varepsilon^2\, v_e^{1/2}\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant t}|f(s)|}{L^2}\right) = q_1 < 1\,.$$

Отсюда следует, что

$$z_n(t) \to z_0(t) \;\; \text{в} \;\; C_B(R_+)\,.$$

2. Система для старших мод

Теперь перейдем к исследованию старших мод ($|k| \geqslant 1$), которые описываются системой

$$\frac{d}{dt}U_k + \Lambda(k)U_k = \varepsilon^{\frac{3}{2}}\,\nu^{\frac{1}{2}}\,\widehat{\Gamma(U,U)}_k\,, \qquad U_k(0) = U_k^0\,. \tag{20}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\widetilde{w}^{1/2}}\left(\frac{d}{dt}u_k + iku_k\right) + \widetilde{w}^{1/2}u_k + \widetilde{u}^{1/2}w_k - 2\widetilde{v}^{1/2}v_k = \varepsilon^{3/2}\widehat{\Gamma(U,U)}_k\,,\\ &\frac{1}{\widetilde{u}^{1/2}}\left(\frac{d}{dt}w_k - ikw_k\right) + \widetilde{w}^{1/2}u_k + \widetilde{u}^{1/2}w_k - 2\widetilde{v}^{1/2}v_k = \varepsilon^{3/2}\widehat{\Gamma(U,U)}_k\,,\\ &-\frac{1}{2\widetilde{v}^{1/2}}\frac{d}{dt}v_k + \widetilde{w}^{1/2}u_k + \widetilde{u}^{1/2}w_k - 2\widetilde{v}^{1/2}v_k = \varepsilon^{3/2}\widehat{\Gamma(U,U)}_k\,. \end{aligned} \tag{21}$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\widetilde{w}^{1/2}}\left(\frac{d}{dt}u_k + iku_k\right) = \frac{1}{\widetilde{u}^{1/2}}\left(\frac{d}{dt}w_k - ikw_k\right) = -\frac{1}{2\widetilde{v}^{1/2}}\frac{d}{dt}v_k$$

или

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(e^{ikt}\widetilde{u}^{1/2}u_k) &= -\frac{1}{2}e^{ikt}\frac{d}{dt}(\widetilde{v}^{1/2}v_k)\,,\\ \frac{d}{dt}(e^{-ikt}\widetilde{w}^{1/2}w_k) &= -\frac{1}{2}e^{-ikt}\frac{d}{dt}(\widetilde{v}^{1/2}v_k)\,. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} u_k &= -\frac{1}{2}\,\frac{v_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}\left[v_k - ik\int\limits_0^t e^{-ik(t-s)}v_k\,ds - e^{-ikt}\left(2\,\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\,u_k^0 + v_k^0\right)\right]\,,\\ w_k &= -\frac{1}{2}\,\frac{\widetilde{v}^{1/2}}{\widetilde{w}^{1/2}}\left[v_k + ik\int\limits_0^t e^{ik(t-s)}v_k\,ds - e^{ikt}\left(2\,\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}}\,w_k^0 + v_k^0\right)\right]\,. \end{aligned}$$

Подставляя в последнее уравнение в (21), получим

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}v_k + \frac{1}{\varepsilon}\left(L_e + 3v^{1/2}\varepsilon^2 v_0\right)v_k + \frac{1}{\varepsilon}\,ik\int\limits_0^t \left(e^{ik(t-s)}u_e - e^{-ik(t-s)}w_e\right)v_k ds =\\ &= v_e^{1/2}\varepsilon ikv_0\int\limits_0^t (e^{ik(t-s)} - e^{-ik(t-s)})v_k ds +\\ &+\frac{1}{\varepsilon}\,d_k^+e^{ikt} + \frac{1}{\varepsilon}\,d_k^-e^{-ikt} - 2\varepsilon\,v_e^{1/2}[B(v,v)_k + H(v)_k] - \varepsilon v_e^{1/2}d_k(t), \quad k \in Z_0, \end{aligned}$$

где

$$B(v,v)_k =$$

$$= \sum_{k_1+k_2=k,\ k_1,k_2,k\in Z_0} \left[v_{k_1}v_{k_2} - \frac{1}{4}(v_{k_1} - ik_1\int_0^t e^{-ik_1(t-s)}v_{k_1}ds)(v_{k_2} + ik_2\int_0^t e^{ik_2(t-s)}v_{k_1}ds)\right],$$

$$H(v)_k = \frac{1}{4}\sum_{k_1+k_2=k,k_1,k_2,k\in Z_0}\left[e^{k_2t}\left(2w^0_{k_2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} + v^0_{k_2}\right)\left(v_{k_1} - ik_1\int_0^t e^{-ik_1(t-s)}v_{k_1}ds\right) + \right.$$

$$\left. + \ e^{-k_1t}\left(2w^0_{k_1}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} + v^0_{k_1}\right)\left(v_{k_2} + ik_2\int_0^t e^{ik_2(t-s)}v_{k_2}ds\right)\right],$$

$$d_{k_1,k_2} = \frac{1}{2}\left(2w^0_{k_2}\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} + v^0_{k_2}\right)\left(2u^0_{k_1}\frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} + v^0_{k_1}\right), \quad Z_0 = \{k\in Z, k\neq 0\},$$

$$d_k^- = w_e^{1/2}(2u_e^{1/2}u^0_k + v_e^{1/2}v^0_k), \qquad d_k^+ = u_e^{1/2}(2w_e^{1/2}w^0_k + v_e^{1/2}v^0_k).$$

Положим

$$T_ky = \frac{d}{dt}y + \frac{1}{\varepsilon}L_ey + ik\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t (e^{ik(t-s)}u_e - e^{-ik(t-s)}w_e)yds,$$

$$A_ky = \frac{ik}{\varepsilon}\int\limits_0^t (e^{ik(t-s)}u_e - e^{-ik(t-s)}w_e)yds, \qquad A_k^{(1)}y = ik\int\limits_0^t (e^{ik(t-s)} - e^{-ik(t-s)})yds.$$

Так как наша техника базируется на разложении Фурье, мы можем выбрать задачу Коши для систем

$$\frac{d}{dt}v_0 + \frac{1}{\varepsilon}L_ev_0 = -\varepsilon\, v_e^{1/2}\frac{3}{2}\,v_0^2 - 2\varepsilon\, v_e^{1/2}(B(v,v)_0 + H(v)_0]) - \varepsilon v_e^{1/2}d_0, \tag{22}$$

$$v_0|_{t=0} = v^0_0,$$

$$T_kv_k = -3v^{1/2}\varepsilon\, v_0v_k + v_e^{1/2}\varepsilon v_0A_k^{(1)}v_k \ + \tag{23}$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon}d_k^+e^{ikt} + \frac{1}{\varepsilon}d_k^-e^{-ikt} - 2\varepsilon\, v_e^{1/2}[B(v,v)_k + H(v)_k] -$$

$$- \ \varepsilon v_e^{1/2}\sum_{k_1+k_2=k,|k_1|,|k_2|,|k|\leqslant m,k_1,k_2,k\in Z_0} e^{i(k_2-k_1)t}d_{k_1,k_2}, \quad k\in Z_0,$$

$$v_k|_{t=0} = v^0_k.$$

за первоначальную форму системы (8), которая эквивалентна системе (4) для гладких решений. Запишем ее в слабой форме

$$v_0(t) = v_0^0 - v_e^{1/2}\varepsilon \int\limits_0^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e\ (t-s)}\left[\frac{3}{2}\,v_0^2 + 2(B(v,v)_0 + H(v)_0) - d_0\right] ds\,, \tag{24}$$

$$v_k(t) = v_k^0 \exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t (L_e + 3\varepsilon^2 v_e^{1/2} v_0) ds\right\} - \frac{1}{\varepsilon}\,d_k^+\,T_k^{-1}(e^{ikt}) + \frac{1}{\varepsilon}\,d_k^-\,T_k^{-1}(e^{-ikt})\ -$$
$$-\ \varepsilon v_e^{1/2} T_k^{-1}(d_k(t)) - v_e^{1/2}\varepsilon\, T_k^{-1}\,\mathcal{K}_k(v,v)\,, \quad k \in Z_0$$

$$\mathcal{K}_k(v,v) = 3v_0\,v_k + v_e^{1/2}\varepsilon v_0 A_k^{(1)} v_k + 2[B(v,v)_k + H(v)_k]\,,$$

$$d_k(t) = \sum_{k_1+k_2=k,|k_1|,|k_2|,|k|\leqslant m,k_1,k_2,k\in Z_0} e^{i(k_2-k_1)t} d_{k_1,k_2}\,.$$

Определение 1. *Функцию* $U(t,x)$, *с коэффициентами Фурье* $U_k(t)$, $k \geqslant 0$, $U_{-k}(t) = \overline{U_k(t)}$, $k > 0$, *назовем решением (8) на временном интервале* $[0,T]$, *если для любого* $k \in Z_0$ *функции* $v_k(t)$ *удовлетворяют системе интегральных уравнений (24).*

3. Галеркинские приближения

Определим оператор усечения Π_m, действующий на последовательность коэффициентов Фурье

$$\Pi_m \varphi_k = (\Pi_m \varphi)_k = \begin{cases} \varphi_k & \text{если } |k| \leqslant m\,, \\ 0 & \text{если } |k| > m\,. \end{cases}$$

Теперь определим галеркинское усечение системы (70), (23) для аппроксимирующего решения $U^{(m)}$ такого, что

$$U_{-k}^{(m)} = \overline{U_k^{(m)}}\,, \quad k \geqslant 1\,,$$

$$\frac{d}{dt}v_0^{(m)} + \frac{1}{\varepsilon}\,L_e v_0^{(m)} = -\varepsilon\, v_e^{1/2}\,\frac{3}{2}\,(v_0^{(m)})^2 - 2\varepsilon\, v_e^{1/2}(\Pi_m B(\Pi_m v, \Pi_m v)_0 + H(\Pi_m v)_0]) - \varepsilon v_e^{1/2}\Pi_m d_0, \tag{25}$$

$$v_0^{(m)}|_{t=0} = v_0^0\,,$$

$$T_k v_k^{(m)} = -3v^{1/2}\varepsilon\, v_0^{(m)} v_k^{(m)} + v_e^{1/2}\varepsilon v_0^{(m)} A_k^{(1)} v_k^{(m)}\ +$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\,d_k^+ e^{ikt} + \frac{1}{\varepsilon}\,d_k^- e^{-ikt} - 2\varepsilon\, v_e^{1/2}[\Pi_m B(\Pi_m v, \Pi_m v)_k + \Pi_m H(\Pi_m v)_k]$$
$$-\ \varepsilon v_e^{1/2} \sum_{k_1+k_2=k,|k_1|,|k_2|,|k|\leqslant m,k_1,k_2,k\in Z_0} e^{i(k_2-k_1)t} d_{k_1,k_2}(t)\,, \tag{26}$$

$$v_k|_{t=0} = v_k^0\,, \quad |k| \leqslant m, k \neq 0\,.$$

$$T_k v_k^{(m)} = -3v^{1/2}\varepsilon\, v_0^{(m)} v_k^{(m)} + v_e^{1/2}\varepsilon v_0^{(m)} A_k^{(1)} v_k^{(m)} + \tag{27}$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\, d_k^+ e^{ikt} + \frac{1}{\varepsilon}\, d_k^- e^{-ikt} - 2\varepsilon\, v_e^{1/2}\Pi_m H(\Pi_m v)_k$$
$$-\ \varepsilon v_e^{1/2}\Pi_m \sum_{k_1+k_2=k,|k_1|,|k_2|,|k|\leqslant m, k_1,k_2,k\in Z_0} e^{i(k_2-k_1)t} d_{k_1,k_2}(t)\,,$$

$$v_k|_{t=0} = v_k^0, \quad |k| > m\,.$$

и уравнения состояния

$$u_0^{(m)} = -\frac{1}{2}\,\frac{v_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v_0^{(m)}\,, \qquad w_0 = -\frac{1}{2}\,\frac{v_e^{1/2}}{w_e^{1/2}} v_0^{(m)}\,, \tag{28}$$

$$u_k^{(m)} = -\frac{1}{2}\,\frac{v_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v_k^{(m)} \ +\ \frac{1}{2}\, ik \int_0^t e^{-ik(t-s)}\, \frac{v_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v_k^{(m)} ds + e^{-ikt} u_k^0 \ +\ \frac{1}{2}\, e^{-ikt} \frac{v_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v_k^0\,,$$
$$w_k^{(m)} = -\frac{1}{2}\,\frac{v_e^{1/2}}{w_e^{1/2}} v_k^{(m)} \ -\ \frac{1}{2}\, ik \int_0^t e^{ik(t-s)}\, \frac{v_e^{1/2}}{w_e^{1/2}} v_k^{(m)} ds \ +\ e^{ikt} w_k^0 \ +\ \frac{1}{2}\, \frac{v_e^{1/2}}{w_e^{1/2}} e^{ikt} v_k^0\,, \quad k \in Z_0.$$

Теорема 1. *Пусть $\sigma > 2$ и $v(0) = v^0 \in H^\sigma(0, 2\pi)$. Пусть $m \in N$ фиксировано. Тогда существует $T^* > 0$, возможно зависящее от m, такое что система (25), (26), (27) имеет единственное решение на интервале $[0, T^*]$. Это решение $v = v^{(m)}(t)$ может быть продолжено на максимальный интервал $[0, T^*_{\max})$ такой что $T^*_{\max} = +\infty$, если норма $\|v(0)\|_{H^\sigma(0,2\pi)}$ достаточно мала.*

Заметим, что для доказательства теоремы существенна конечность системы обыкновенных дифференциальных с квадратичной нелинейность. Следовательно, можно гарантировать конечный временной интервал $[0, T^*]$ существования и единственности решения и максимальный интервал существования $[0, T^*_{\max})$. Отметим, что в принципе T^* и $T^*_{\max}$ могут зависеть от m. Ниже мы покажем, что это не так, т.е. $T^*_{\max} = +\infty$.

Чтобы доказать это и перейти к пределу при $m \to \infty$ в галеркинском усечении системы, нам необходимо получить глобальную априорную оценку для решений системы (25), (26), (27). Прежде чем переходить к доказательству априорной оценки, исследуем интегро-псевдодифференциальный оператор (гиперболический вариант оператора типа Гуртина-Пипкина [7]) в левой части уравнения (26). Свойства этого оператора позволяют избежать при доказательстве глобальной разрешимости схемы Мозера-Нэша и доказывать разрешимость в одном весовом гильбертовом пространстве.

4. Интегро-псевдодифференциальные уравнения

Сначала найдем условия существования глобального решения интегро-псевдодифференциального уравнения

$$\partial_t v + \frac{1}{\varepsilon}(4v_e + w_e + u_e)v + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t [e^{\partial_x(t-s)}u_e - e^{-\partial_x(t-s)}w_e]\partial_x v ds = f + h\,, \tag{29}$$
$$v(0) = v^0\,.$$

В образах Фурье

$$\frac{d}{dt}v_k + A(k,\varepsilon)v_k = f_k(t) + h_k(t)\,, \tag{30}$$
$$v_k|_{t=0} = v_k^0\,,$$

где

$$A(k,\varepsilon)v_k = \frac{1}{\varepsilon}(4v_e + w_e + u_e)v_k + \frac{ik}{\varepsilon}\int_0^t [e^{ik(t-s)}u_e - e^{-ik(t-s)}w_e]v_k ds$$

– осциллирующая правая часть,

$$h_k(t) = \frac{2}{\varepsilon}v_e^{1/2}u_e^{1/2}e^{ikt}w_k^0 + \frac{2}{\varepsilon}v_e^{1/2}w_e^{1/2}e^{-ikt}u_k^0 + \frac{1}{\varepsilon}(w_e\, e^{-ikt} + u_e\, e^{ikt})v_k^0$$

и для некоторого $\mu > 0$ функция $f_k(t) \in L_{2,\gamma,0>\gamma>-\mu\varepsilon}$, где

$$\|g(t)\|^2_{L_{2,\gamma_g}(R_+)} = \int_0^\infty e^{-2\gamma_g t}|g(t)|^2 dt\,.$$

Заметим, что этот оператор возникает при исследовании старших мод $|k| \neq 0$, т.е. $k \in Z_0$. *Поэтому, в дальнейшем, мы будем считать, что целое* $k \neq 0$.

Далее, положим $v_k = y_k + e^{-\frac{1}{\varepsilon}(4v_e+w_e+u_e)t}v_k^0$. Тогда

$$T_k y_k \equiv \frac{d}{dt}y_k + \frac{1}{\varepsilon}(4v_e + w_e + u_e)y_k + \frac{ik}{\varepsilon}\int_0^t [e^{ik(t-s)}u_e - e^{-ik(t-s)}w_e]y_k ds =$$
$$= f_k(t) + g_k^{(1)}(t) + g_k^{(2)}(t)\,, \tag{31}$$

$$y_k|_{t=0} = 0\,,$$

$$g_k^{(1)}(t) = \Big(\frac{ik\,u_e}{4v_e + u_e + w_e + i\varepsilon k} + \frac{ik\,w_e}{4v_e + u_e + w_e - i\varepsilon k}\Big)e^{-\frac{1}{\varepsilon}(4v_e+u_e+w_e)t}v_k^0 \in L_{2,\gamma}(R_+)$$

для любого $\gamma > -\frac{1}{\varepsilon}(4v_e + u_e + w_e)$ и для любого $\gamma_g > 0$

$$g_k^{(2)}(t) = -\left[\frac{ik\,u_e}{4v_e + u_e + w_e + i\varepsilon k}e^{ikt} + \frac{ik\,w_e}{4v_e + u_e + w_e - i\varepsilon k}e^{-ikt}\right]v_k^0 + h_k(t) \in L_{2,\gamma_g}(R_+)$$

– измененная осциллирующая правая часть.

Сделав преобразование Лапласа по t, получим

$$\left[p+\frac{1}{\varepsilon}(4v_e+w_e+u_e)+\frac{ik/\varepsilon}{p-ik}u_e-\frac{ik/\varepsilon}{p+ik}w_e\right]\widetilde{y_k}(p)=\widetilde{f_k^{(1)}}(p)+\widetilde{g_k^{(2)}}(p)\,,$$

где $f_k^{(1)}(t)=f_k(t)+g_k^{(1)}$. Введем символ

$$\sigma(p)=\frac{\Sigma(p,k;\varepsilon)}{p^2+k^2}\,,$$

$$\Sigma(p,k;\varepsilon)=(p^2+k^2)p+\frac{1}{\varepsilon}\,(4v_e+w_e+u_e)p^2+\frac{ik}{\varepsilon}\,(u_e-w_e)p+\frac{4k^2}{\varepsilon}\,v_e\,.$$

Формально мы можем написать преобразование Лапласа по t решения уравнения (31)

$$\widetilde{y_k}(p,k)=\frac{(p^2+k^2)(\widetilde{f_k^{(1)}}(p))}{(p^2+k^2)p+\frac{1}{\varepsilon}\,(4v_e+w_e+u_e)p^2\;+\frac{ik}{\varepsilon}\,(u_e-w_e)p+\frac{4k^2}{\varepsilon}\,v_e}+ \tag{32}$$

$$+\frac{(p^2+k^2)\widetilde{g_k^{(2)}}(p)}{(p^2+k^2)p+\frac{1}{\varepsilon}\,(4v_e+w_e+u_e)p^2+\frac{ik}{\varepsilon}\,(u_e-w_e)p+\frac{4k^2}{\varepsilon}\,v_e}\,,\quad \Re p\geqslant 0\,.$$

Чтобы получить оценки этого решения в соболевских нормах, приведем сначала широко известные факты, которые мы будем использовать в дальнейшем.

Определение 2. *Назовем пространством Харди $H_2(\Re p>\gamma,H)$ класс вектор-функций $\widetilde{f(p)}$ со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве H, голоморфных в полуплоскости $\{p\in C:\ \Re p>\gamma\geqslant 0\}$, для которых*

$$\sup_{x>\gamma}\int_{-\infty}^{+\infty}\|\widetilde{f(x+iy)}\|_H^2dy<\infty\,,\quad p=x+iy\,.$$

Сформулируем теорему Пэли-Винера для пространств Харди.

Теорема (Пэли-Винера).

1. Пространство $H_2(\Re p>\gamma,H)$ совпадает с множеством вектор-функций(преобразований Лапласа), допускающих представление

$$\widetilde{f(p)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}e^{pt}f(t)dt \tag{33}$$

для $f(t)\in L_{2,\gamma}(R_+,H)$, $p\in C$, $\Re p>\gamma\geqslant 0$.

2. Для любой вектор-функции $\widetilde{f(p)}\in H_2(\Re p>\gamma,H)$ существует единственное представление (33), где вектор-функция $f(t)\in L_{2,\gamma}(R_+,H)$, причем справедлива формула обращения

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{(\gamma+iy)t}\widetilde{f(\gamma+iy)}dy,\quad t\in R_+,\ \gamma\geqslant 0\,.$$

3. Для вектор-функций $\widetilde{f(p)} \in H_2(\Re p > \gamma, H)$ и $f(t) \in L_{2,\gamma}(R_+, H)$, связанных соотношением (33), справедливо равенство

$$\|\widetilde{f}\|^2_{H_2(\Re p>\gamma,H)} \equiv \sup_{x>\gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} \|\widetilde{f(x+iy)}\|^2_H dy =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-2\gamma t} \|f(t)\|^2_N dt \equiv \|f\|^2_{L_{2,\gamma}(R_+,H)}\,.$$

Если мы установим, что функция $\widetilde{y_k}$ в (32) такова, что $p\widetilde{y_k}$, $\widetilde{y_k}$ и $A_k\widetilde{y_k}$ принадлежат пространству Харди $\widetilde{f(p)} \in H_2(\Re p > \gamma)$ при некотором $\gamma \in R$, то по теореме Пэли-Винера функции $\frac{d}{dt}y_k$ и $A_k y_k$ принадлежат пространству $L_{2,\gamma}(R_+)$ и, следовательно, $y_k(t) \in W^1_{2,\gamma}(R_+; A)$. Отсюда следует разрешимость уравнения (31) в пространстве $W^1_{2,\gamma}(R_+; A)$. Здесь

$$\|u\|^2_{W^1_{2,\gamma}(R_+;A)} = \|u\|^2_{L_{2,\gamma}(R_+)} + \left\|\frac{d}{dt}u\right\|^2_{W^1_{2,\gamma}(R_+)} + \|Au\|^2_{L_{2,\gamma}(R_+)}\,.$$

Нам нужны оценки символа $\sigma(p, k; \varepsilon)$ снизу. Докажем его строгую устойчивость то есть, что его корни находятся в левой полуплоскости $\Re p < 0$ параметра p.

Лемма 1. *Существует $\mu > 0$ такое, что равномерно по $k \in Z_0$ имеет место*

$$|\Sigma(p, \varepsilon, k)| \geqslant c_0 > 0, \quad \forall k \in Z,\ p \in C,\ \Re\, p > -\mu_0\varepsilon,\ 0 < \mu_0 < 1.$$

□ 1). Сначала рассмотрим случай, когда $u_e = w_e$. Тогда

$$\Sigma_0(p, k; \varepsilon) = (p^2 + k^2)p + \frac{1}{\varepsilon}(4v_e + w_e + u_e)p^2 + \frac{4k^2}{\varepsilon}v_e = 0$$

или

$$\left(p + \frac{1}{\varepsilon}(4v_e + w_e + u_e)\right)p^2 = -k^2\left(p + \frac{4}{\varepsilon}v_e\right)\,.$$

Очевидно (из изучения графика), это уравнение имеет ограниченную ветвь корня $p_R(k,\varepsilon) \in (-\frac{1}{\varepsilon}(4v_e + w_e + u_e), -\frac{4}{\varepsilon}v_e)$, которая монотонно возрастает от $p_R(0) = -\frac{1}{\varepsilon}(4v_e + w_e + u_e)$ к $p_R(k) \to -\frac{4}{\varepsilon}v_e$, $k \to +\infty$. Есть еще две комплексно сопряженных ветви с вертикальными асимптотами $p^{\pm}(k,\varepsilon) = \pm ik + \kappa_R + O(\frac{1}{k})$, где

$$\kappa_R = -\frac{1}{2\varepsilon}(u_e + w_e)\,.$$

Покажем, что эти ветви при $|k| > 0$ не пересекают мнимой оси. Если $p = iy$, $y \in R$, $y \neq 0$ имеем

$$i(k^2 - y^2)y - \frac{1}{\varepsilon}(4v_e + w_e + u_e)y^2 + \frac{4k^2}{\varepsilon}v_e = 0\,,$$

т.е.

$$k^2 - y^2 = 0\,, \quad y^2 = 4k^2 \frac{v_e}{(4v_e + w_e + u_e)}\,.$$

Эта система не имеет вещественных решений, поскольку

$$\frac{4v_e}{(4v_e + w_e + u_e)} \neq 1\,.$$

Отсюда следует, что

$$\Sigma_0(p,k;\varepsilon) \neq 0, \quad \forall p \in C, \ \Re p \geqslant 0\,.$$

2). Теперь проверим устойчивость символа $\Sigma(p,k,\varepsilon)$. Для этого покажем, что корни находятся в левой полуплоскости параметра p. Сначала, также как выше, покажем что ветви корней не пересекают мнимой оси. Для $p = iy, \ y \in R, \ k \neq 0$ имеем

$$i(k^2 - y^2)y - \frac{1}{\varepsilon}(4v_e + w_e + u_e)y^2 - \frac{k}{\varepsilon}(u_e - w_e)y + \frac{4k^2}{\varepsilon}v_e = 0\,,$$

т.е.

$$k^2 - y^2 = 0, \quad -\frac{1}{\varepsilon}(4v_e + w_e + u_e)y^2 - \frac{k}{\varepsilon}(u_e - w_e)y + \frac{4k^2}{\varepsilon}v_e = 0\,,$$

из второго уравнений получаем

$$k^2[\pm(u_e - w_e) + (w_e + u_e)] = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2u_e = 0 \ \text{ или } \ 2w_e = 0\,,$$

что невозможно, поскольку $w_e > 0, \ u_e > 0$. Таким образом, ветви не пересекают мнимой оси, если $|k| \neq 0$.

Теперь разделим полином Σ на $p(p^2 + k^2)$. После простых преобразований получим

$$\frac{\Sigma}{p(p^2+k^2)} = 1 + \frac{1}{\varepsilon} L_e \frac{1}{p} + \frac{ik}{\varepsilon}\left(u_e \frac{1}{p(p-ik)} - w_e \frac{1}{p(p+ik)}\right).$$

Откуда

$$\Re\left(\frac{\Sigma}{p(p^2+k^2)}\right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{\varepsilon}\Re p\left(4v_e \frac{1}{(\Re p)^2 + (\Im p)^2} + u_e \frac{1}{(\Re p)^2 + (\Im p - k)^2} + w_e \frac{1}{(\Re p)^2 + (\Im p + k)^2}\right).$$

Имеем

$$\Re\left(\frac{\Sigma}{p(p^2+k^2)}\right) \geqslant 1, \quad \forall p, \ \Re p \geqslant 0\,.$$

В случае $\Re p < 0$ и $\min(|\Im p|, |\Im p + k|, |\Im p - k|) \geqslant \delta > 0, \ \delta < 1$, имеем

$$\Re\left(\frac{\Sigma}{p(p^2+k^2)}\right) \geqslant 1 - \frac{1}{\varepsilon}|\Re p|\frac{L_e}{\delta^2} > \frac{1}{2}\,,$$

если $|\Re p| < \dfrac{\varepsilon}{2}\dfrac{\delta^2}{L_e}$. Отсюда

$$|\Sigma| \geqslant \frac{1}{2}\,|p||p^2+k^2| \geqslant \frac{1}{2}\,\delta^2, \quad \forall p,\ \Re p < 0,\ |\Re p| < \frac{\varepsilon}{2}\,\frac{\delta^2}{L_e}\,. \tag{34}$$

Далее рассмотрим прямые $p = -\gamma + iy,\ \gamma = \varepsilon\mu_1 > 0$. Тогда

$$y(k^2-y^2) = \mu_1[2(4v_e+w_e+u_e)y + k(u_e-w_e) - 2\mu_1\varepsilon^2 y]\,, \tag{35}$$

$$(4v_e+w_e+u_e)y^2 + k(u_e-w_e)y - 4k^2v_e = \varepsilon^2\mu_1[(k^2+\mu^2) - 3y^2 + (4v_e+w_e+u_e)\mu_1]\,.$$

Теперь рассмотрим случай, когда $\Re p > -\mu_1\varepsilon$, $|\Im p| \leqslant \delta$ или $|\Im p - k| \leqslant \delta < 1$ или $|\Im p - k| \leqslant \delta$ и $k \in Z_0$. Для больших $k,\ |k| \geqslant k_*,\ k_* \gg 1$ в силу (34) для двух волновых ветвей корня полинома $\Sigma(p;k,\varepsilon) = 0$ с вертикальными асимптотами асимптотика: $p = \pm ik + \kappa_R^{\pm} + O(|k|^{-1})$, где $\kappa_R^{+} = -u_e/\varepsilon,\ \kappa_R^{-} = -w_e/\varepsilon$. Для ограниченной диффузионной ветви ($\Re p_D < 0$ имеет место асимптотика $p = -4v_e/\varepsilon + O(|k|^{-1})$. Отсюда следует, что для $\Re p > -\mu_1\varepsilon$, $|\Im p| \leqslant \delta$ или $|\Im p - k| \leqslant \delta < 1$ или $|\Im p - k| \leqslant \delta$ и $k \in Z_0$ система (35) не имеет вещественных решений для любых $\varepsilon \leqslant 1$ и достаточно малого $\mu_1 = \mu(\delta,\varepsilon) > 0$, поскольку для конечных $|k| \leqslant k_*$ этот результат следует из исследования случая $p = iy,\ y \in R,\ k \neq 0$.

Таким образом, равномерно по $k \in Z_0$ имеем

$$|\Sigma(p,\varepsilon,k)| \geqslant c_0 > 0, \quad \forall p \in C,\ \Re\, p > -\frac{1}{2}\mu_1\varepsilon\,. \ \blacksquare$$

Теперь уточним полученную выше оценку.

Лемма 2. *Существуют положительные* $\mu_0 \in (0,1), c_0 > 0$ *такие, что равномерно по* $k \in Z_0$

$$\sup_{\Re p \geqslant 0}\left|\frac{p}{\sigma(p,k)}\right| \leqslant\ c_0\,, \tag{36}$$

для любых $\Re p > -\mu\varepsilon$.

□ Для этого оценим снизу функцию $Z_k(p) = \sigma(p,k)/p$. Имеем

$$\varepsilon\, Z_k(p) = \frac{\varepsilon(p^2+k^2)p + (4v_e+w_e+u_e)p^2 + ik(u_e-w_e)p + 4k^2v_e}{p(p^2+k^2)} =$$

$$= \varepsilon + (v_e+w_e)\frac{1}{p+ik} + (v_e+u_e)\frac{1}{p-ik} + 4v_e\frac{1}{p}\ .$$

Следовательно,

$$\varepsilon\Re\, Z_k(p) = \varepsilon + \Re p\Big(\frac{(v_e+w_e)}{(\Re p)^2 + (\Im p + k)^2} + \frac{(v_e+u_e)}{(\Re p)^2 + (\Im p - k)^2} + \frac{4v_e}{(\Re p)^2 + (\Im p)^2}\Big)\,.$$

Откуда следует, что

$$\Re\, Z_k(p) \geqslant 1, \quad \Re p \geqslant 0$$

и требуемая оценка.

Теперь посмотрим поведение $|Z_k(p)|$ в окрестности $\Re p = 0$. Если $|\Im p| \geqslant \mu_1$, $0 < \mu_1 \leqslant \dfrac{1}{2}$, $|\Im p - k| \geqslant \mu_1$, $|\Im p + k| \geqslant \mu_1$, $k \geqslant 1$, то

$$|\varepsilon \Re\, Z_k(p)| \geqslant \varepsilon - \frac{1}{\mu_1^2}|\Re p|(\mu_1^2(10v_e + w_e) + (v_e + u_e)) \geqslant \varepsilon - \frac{1}{\mu_1^2}\,|\Re p|(11v_e + u_e + w_e) > \frac{1}{2}\,\varepsilon\,,$$

если

$$|\Re p| \leqslant \frac{\mu_1^2 \varepsilon}{2(11v_e + u_e + w_e)}\,.$$

В случае $|\Im p - k| \leqslant \mu_1$, $|\Re p| \leqslant \mu_2\varepsilon$ имеем

$$\left|\frac{p}{\sigma(p,k)}\right| \leqslant |p||p^2 + k^2|\frac{1}{|\Sigma(p,k)|} \leqslant \frac{(|\Re p|^2 + 4k^2 - \mu_1^3)^{1/2}(|\Re p|^2 + k^2 - \mu_1^3)^{1/2}}{c_0(|p|^2 + k^2)}(|\Re p|^2 + \mu_1^2)^{1/2}\,,$$

если в этой области $|\Sigma(p,k)| \geqslant c_0(|p|^2 + k^2)$. ■

Последнее неравенство есть следствие следующей леммы:

Лемма 3. *Существуют μ_1, $0 < \mu_1 < 0$; $c_0 > 0$ такие, что равномерно по $k \in Z_0$ выполняется*

$$|\Sigma(p,k,\varepsilon)| \geqslant c_0(|p|^2 + k^2), \quad \Re p \geqslant -\mu_1\varepsilon\,. \tag{37}$$

□ 1) Начнем с области $\{\kappa_0 \Re p > |\Im p|$. Здесь оценим главную часть символа $\Sigma(p,k,\varepsilon)$. Покажем, что в этой области $|p(p^2 + k^2)| \geqslant c_1(|p|^2 + k^2)$ при $|p| \geqslant c_0$ для достаточно большого $c_0 = c_0(\kappa_0) \gg 1$.

Положим $p = y(\pm i + \mu)$, $y \geqslant R_0$, $\mu \geqslant \kappa_0$. Рассмотрим три случая: $\min\{|y-k|, |y+k|\} \geqslant \delta k$, $|y - k| \leqslant \delta k$ и $|y + k| \leqslant \delta k$, где $0 < \delta < 1$, $k \geqslant 1$. Случай целых $k \leqslant -1$ исследуется таким же образом.

В первом случае

$$|p(p^2 + k^2)| = |y||i + \mu|(\mu^2 y^2 + \delta^2 k^2) \geqslant$$

$$\geqslant |y||i + \mu| \min\left\{\delta^2, \frac{\mu^2}{1 + \mu^2}\right\}(|p|^2 + k^2) \geqslant R_0(1 + \mu^2)^{1/2} \min\left\{\delta^2, \frac{\mu^2}{1 + \mu^2}\right\}(|p|^2 + k^2)\,.$$

Во втором случае $|y| \geqslant (1 - \delta)k$. Тогда

$$|p(p^2 + k^2)| \geqslant |y|(1 + \mu^2)^{1/2}\mu|y|(\mu^2 y^2 + (2 - \delta)^2 k^2)^{1/2} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\,R_0\mu\left(\min\{\mu^2, (2 - \delta)^2\}\right)^{1/2} \min\left\{(1 + \mu^2)^{1/2}, (1 + \mu^2)^{1/2}(1 - \delta)\right\}(|p|^2 + k^2)\,.$$

Теперь выберем $R_0 = R_0(\kappa_0)$ из условия

$$R_0 \min_{\mu \geqslant \kappa_0}\left[\min\left\{(1 + \mu^2)^{1/2} \min\left\{\delta^2, \frac{\mu^2}{1 + \mu^2}\right\}\right.\right.,$$

$$\frac{1}{2}\left(\min\{\mu^2,(2-\delta)^2\}\right)^{1/2}\min\left\{(1+\mu^2)^{1/2},(1+\mu^2)^{1/2}(1-\delta)\}\right\}\geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\varepsilon}(4v_e+w_e+u_e)\max_{|p|^2+k^2=1}\left|p^2+ik\frac{(u_e-w_e)}{(4v_e+w_e+u_e)}p+4k^2\frac{v_e}{(4v_e+w_e+u_e)}\right|.$$

Третий случай рассматривается аналогично.

2) Рассмотрим случай $|\Im p|\geqslant\kappa_0|\Re p|$, и $|\Re p|\leqslant\mu_1\varepsilon$. Напомним, что все оценки проводятся для $|k|\geqslant 1$.

а) Начнем со случая $\Re p=0$. Тогда

$$\Im(\Sigma(p,k;\varepsilon))|_{\Re p=0}=\Im p(k^2-(\Im p)^2)^2\,,$$

$$\Re(\Sigma(p,k;\varepsilon))|_{\Re p=0}=\frac{1}{\varepsilon}\Big((4v_e+w_e+u_e)(\Im p)^2+k(u_e-w_e)\Im p-4k^2v_e\Big)\,.$$

Пусть для определенности $k\geqslant 1$. Рассмотрим три случая, когда $\Im p-k\geqslant\delta k$, $k\geqslant(1-\delta)\Im p\geqslant 0$ или $|\Im p-k|\leqslant\delta k$.

В первом случае

$$|\Im p(k^2-(\Im p)^2)^2|\geqslant\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\,\delta k|\Im p|\,\left(|\Im p|+(2+\delta)k\right)+\delta^2|\Im p|k^2\right]\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\min\left\{\frac{1}{2}\,\delta\,,\delta^2\right\}(|\Im p|^2+k^2)\,.$$

Во втором случае используем тот факт, что также как выше, если $|\Im p\pm k|\geqslant\delta|k|$, $0<\delta<1$

$$|\Im p(k^2-(\Im p)^2)^2|\geqslant\ \delta^2\,,|\Im p|\ k^2\geqslant\ \frac{1}{2}\,\delta^2\,|\Im p|(1-\delta)^2(k^2+|\Im p|^2)\,.$$

Отсюда следует, что для $|\Im p|\geqslant c_1$ имеем

$$|\Im p(k^2-(\Im p)^2)^2|\geqslant\ \frac{1}{2}\,\delta^2c_1(1-\delta)^2(k^2+|\Im p|^2)\,.$$

В третьем случае $|\Im p|\geqslant\ (1-\delta)k$, $\Im p\leqslant(1+\delta)k$ и

$$|\Re(\Sigma(p,k;\varepsilon))||_{\Re p=0}\geqslant\frac{1}{\varepsilon}[2u_e-(4v_e+w_e+u_e)(2+\delta)\delta-|u_e-w_e|\delta)]k^2\geqslant$$

$$\geqslant\ \frac{1}{\varepsilon}\,u_ek^2\geqslant\ \frac{1}{2\varepsilon}\,u_e(k^2+(2+\delta)^{-2}|\Im p|^2)\geqslant\ \frac{1}{2\varepsilon}\,u_e(2+\delta)^{-2}(k^2+|\Im p|^2)$$

для достаточно малого δ.

В тоже время, для достаточно малого c_1 при $|\Im p|\leqslant c_1$

$$|\Re(\Sigma(p,k;\varepsilon))||_{\Re p=0}=\frac{1}{\varepsilon}|4v_e+w_e+u_e)(\Im p)^2+k(u_e-w_e)\Im p-4k^2v_e|\geqslant\ \frac{1}{\varepsilon}k^2v_e\,,\quad |k|\geqslant 1\,.$$

Следовательно,

$$|\Sigma(p,k;\varepsilon)||_{\Re p=0} \geqslant c_0(k^2+|\Im p|^2),\ \ |\Im p| \geqslant 0,\ \ |k| \geqslant 1.$$

Отсюда вытекает существование достаточно малого $\mu_1 > 0$ такого, что

$$|\Sigma(p,k;\varepsilon)| \geqslant c_0(\mu_1)(|p|^2+k^2)$$

для $|\Im p| \geqslant \kappa_0|\Re p|, \quad |\Re p| \leqslant \mu_1\varepsilon$.

b) Теперь рассмотрим случай $|\Im p| > \kappa_0 \Re p, \quad \Re p \geqslant \mu_1\varepsilon$. Заметим, что корни полинома

$$(4v_e+w_e+u_e)p^2+ik(u_e-w_e)p+4k^2v_e = (4v_e+w_e+u_e)(p-p^+)(p-p^-) = 0$$

чисто мнимые

$$p^\pm = i\frac{k}{2(4v_e+w_e+u_e)}(-(u_e-w_e) \pm \sqrt{(u_e-w_e)^2+16v_e(4v_e+w_e+u_e)}) = ikh^\pm\,.$$

Положим $p=kz,\ B=\frac{1}{\varepsilon}(4v_e+w_e+u_e)$. Тогда

$$\Sigma(p,k,\varepsilon) = k^2\Big(k\ z(z+i)(z-i)+B(z-ih^+)(z-ih^-)\Big)\,.$$

Рассмотрим случай $\Omega^+ = \{\Im p > \kappa_0\Re p, \quad \Re p \geqslant \mu_1\varepsilon\}$(случай $\Im p < -\kappa_0\Re p, \quad \Re p \geqslant \mu_1\varepsilon$ анализируется аналогично). В Ω^+ имеем

$$|z(z+i)(z-i)| \geqslant\ \mu_1\varepsilon|z|(|z|^2+1)^{1/2} \geqslant\ \frac{1}{\sqrt{2}}\mu_1^2\varepsilon^2(|z|^2+1)\,.$$

Отсюда

$$|\Sigma(p,k,\varepsilon)| \geqslant\ k^2\Big(k\,\frac{1}{\sqrt{2}}\mu_1^2\varepsilon^2(|z|^2+1)-B\max(1,|h^-|)(|z|+1)^2\Big) \geqslant\ c_0k^2(|z|^2+1) = c_0(|p|^2+k^2)$$

для достаточно большого $|k| \geqslant 2\sqrt{2}B\max(1,|h^-|)(\mu_1\varepsilon)^{-2}$.

Теперь рассмотрим случай $|\Im p| > \kappa_0\Re p, \quad \Re p \geqslant \mu_1\varepsilon$ и $1 \leqslant |k| \leqslant k_0$. Тогда

$$|\Sigma(p,k,\varepsilon)| = k^3|(z+i)(z-i)|\ \left|z+\frac{1}{k}B\frac{(z-ih^+)(z-ih^-)}{(z+i)(z-i)}\right| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\mu_1\varepsilon(|z|^2+1)\ \left|z+\frac{1}{k}B\frac{(z-ih^+)(z-ih^-)}{(z+i)(z-i)}\right|\,.$$

Очевидно, что в области Ω^+

$$\min_{z\in\Omega^+}\left|z+\frac{1}{k}B\frac{(z-ih^+)(z-ih^-)}{(z+i)(z-i)}\right| = c_1 > 0\,.$$

Отсюда

$$|\Sigma(p,k,\varepsilon)| \geqslant c_1\frac{1}{\sqrt{2}}\mu_1\varepsilon(|z|^2+1) \geqslant \frac{c_1}{k_0^2}\frac{1}{\sqrt{2}}\mu_1\varepsilon(|p|^2+k^2)\,.$$

Суммирование полученных оценок приводит к неравенству (37). ■

Лемма 4. *Для $\mu > 0$ из предыдущей леммы справедлива следующая оценка*

$$\left|\frac{\widetilde{A}(p,\varepsilon,k)}{\sigma(p,\varepsilon,k)}\right| \leqslant c_1, \quad \forall k \geqslant 0,\ p \in C,\ \Re p \geqslant -\mu\varepsilon, \tag{38}$$

равномерно по $k \in Z_0$.

□ В силу оценки (37) имеем

$$\left|\frac{\widetilde{A}}{\sigma(p,k)}\right| = \left|\frac{\frac{1}{\varepsilon}(4v_e+w_e+u_e)p^2+ik\frac{1}{\varepsilon}(u_e-w_e)p+4k^2\frac{1}{\varepsilon}\,v_e}{(p^2+k^2)p+\frac{1}{\varepsilon}(4v_e+w_e+u_e)p^2+ik\frac{1}{\varepsilon}(u_e-w_e)p+4k^2\frac{1}{\varepsilon}\,v_e}\right| \leqslant c_1\,. ■$$

Разрешимость интегро-дифференциального уравнения.

Теорема 2. *Пусть функция $f_k^{(1)} \in L_{2,\gamma_f}(R_+,H)$, $\gamma_f > -\mu\varepsilon$ и $g^{(2)} = 0$. Тогда для любого $\gamma > \gamma_f$ задача (31) однозначно разрешима в пространстве $W_{2,\gamma}^1(R_+,A)$ и для ее решения справедлива равномерная по k оценка*

$$\|y_k\|_{W_{2,\gamma}^1(R_+,A)} \leqslant d\left(\|f_k\|_{L_{2,\gamma}(R_+)}+|v_k^0|\right) \tag{39}$$

с постоянной d, не зависящей от k и f_k, v_k^0.

Здесь

$$\|u\|^2_{W_{2,\gamma}^1(R_+,A)} = \left\|\frac{d}{dt}u\right\|^2_{L_{2,\gamma}(R_+)} + \|Au\|^2_{L_{2,\gamma}(R_+)} + \|u\|^2_{L_{2,\gamma}(R_+)}\,.$$

□ Умножение на аналитическую и ограниченную не выводит из пространства Харди $H_2(\Re p > \gamma, H)$. Поэтому из $\widetilde{f_k^{(1)}} \in H_2(\Re p > -\mu\varepsilon)$ следует, что функции $p\widetilde{y_k}$, $\widetilde{A_k}\widetilde{y_k}$ принадлежат пространству Харди $H_2(\Re p > -\mu\varepsilon)$ и справедлива оценка

$$\|Ay_k(t)\|^2_{L_{2,\gamma}(R_+)} + \|\frac{d}{dt}y_k\|^2_{L_{2,\gamma}(R_+)} \leqslant d_1(\|f_k^{(1)}\|^2_{L_{2,\gamma}(R_+)}+|v_k^0|^2)\,.$$

Отсюда следует искомое неравенство (40) с постоянной d_1, не зависящей от $f_k^{(1)}, v_k^0, k$. Таким образом, мы получили решение $y_k(t)$ уравнения в (29). Покажем, что полученное решение удовлетворяет начальному условию $y_k(+0) = 0$. ■

Замечание. Если функция $\varphi(p) \in H_2(\Re p > \gamma)$, то для любого $R > \gamma$ можно найти последовательность (R_n), такую что $\lim_{n\to\infty} R_n = +\infty$ и

$$\lim_{n\to\infty}\int_\gamma^R \|\varphi(x+iR_n)\|_H dx = 0\,.$$

Очевидно, это есть следствие оценки

$$\int_{-R_n}^{R_n}\left(\int_\gamma^R |\varphi(x+iR_n)|^2 d\right)dy \leqslant \int_\gamma^R\left(\int_{-\infty}^{\infty}\|\varphi(x+iR_n)\|_H^2 d\right)dy \leqslant (R-\gamma)\|\varphi\|^2_{H_2(\Re p>\gamma)}\,.$$

Из доказанного выше следует, что $y_k(t)\in L_{2,\gamma}(R_+)$, т.е. $\widetilde{y_k}\in H_2(\Re p>\gamma)$. Тогда по теореме Пэли-Винера получаем

$$y_k(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{R_n\to\infty}\int_{-R_n}^{R_n}\widetilde{y_k}(\gamma+ix)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{R_n\to\infty}\int_{\gamma-iR_k}^{\gamma+iR_n}\widetilde{y_k}(p)dp\,.$$

Функция $\widetilde{y_k}(p)$ является аналитической в правой полуплоскости $\Re p>\gamma$, следовательно, по теореме Коши

$$\int_{\gamma-iR_n}^{\gamma+iR_n}\widetilde{y_k}(p)dp=\Big(\int_{\gamma-iR_n}^{R+iR_n}-\int_{\gamma-iR_n}^{R+iR_n}+\int_{R-iR_n}^{R+iR_n}\Big)\widetilde{y_k}(p)dp=$$

$$=\int_\gamma^R\widetilde{y_k}(x-iR_n)dx-\int_\gamma^R\widetilde{y_k}(x+iR_n)dx+i\int_{-R_n}^{R_n}\widetilde{y_k}(x-iR_n)dx\,.$$

Согласно замечанию

$$\lim_{n\to\infty}\int_\gamma^R|\widetilde{y_k}(x-iR_n)|dx=0\,.$$

Отсюда

$$\|y_k(0)\|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-R_n}^{R_n}|\widetilde{y_k}(x-iR_n)|dx\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big(\int_{-\infty}^{\infty}|(R+ix)\widetilde{y_k}(R+ix)|^2dx\Big)^{1/2}\Big(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{R^2+x^2}\Big)^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant c(R)\|p\widetilde{y_k}\|_{H_2(\Re p>\gamma)}\,.$$

Таким образом, при $R_k\to\infty$ получим $y_k(0)=0$.

Наконец, покажем, что полученное решение $v_k(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt}y_k+\frac{1}{\varepsilon}(4v_e+w_e+u_e)y_k+\frac{ik}{\varepsilon}\int_0^t[e^{ik(t-s)}u_e-e^{-ik(t-s)}w_e]y_kds=f_k^{(1)}\,.$$

Для этого достаточно проверить, что $y_k(t)$ есть решение задачи

$$\frac{d}{dt}y_k+\frac{1}{\varepsilon}(4v_e+w_e+u_e)y_k+\frac{ik}{\varepsilon}\int_0^t[e^{ik(t-s)}u_e-e^{-ik(t-s)}w_e]y_kds=f_k^{(1)}\,,$$

$$y_k(0)=0.$$

По теореме Пэли-Винора

$$y_k(t) = \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^{R} \sigma(\gamma+ix,k,\varepsilon)^{-1} [\widetilde{f_k^{(1)}}(\gamma+ix)] e^{(\gamma+ix)t} dx =$$

$$= \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\gamma-iR}^{\gamma+iR} \sigma(p,k,\varepsilon)^{-1} [\widetilde{f_k^{(1)}}]\, e^{pt} dp, \quad \gamma > -\mu\varepsilon\,.$$

Отсюда получаем

$$\frac{d}{dt} y_k(t) = \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\gamma-iR}^{\gamma+iR} \frac{p}{\sigma(p,k,\varepsilon)} [\widetilde{f_k^{(1)}}]\,.\, e^{pt} dp\,, \qquad \gamma > -\mu\varepsilon\,. \tag{40}$$

Далее, для $\gamma > 0$ имеем

$$Ay_k(t) = \frac{1}{\varepsilon}(4v_e + w_e + u_e)y_k +$$

$$+ ik\frac{1}{\varepsilon} \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t [e^{ik(t-s)}u_e - e^{-ik(t-s)}w_e] \Big(\int_{\gamma-iR}^{\gamma+iR} \frac{1}{\sigma(p,k,\varepsilon)} [\widetilde{f_k^{(1)}}]\, e^{sp} dp \Big) ds =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\,(4v_e + w_e + u_e)y_k +$$

$$+ ik\frac{1}{\varepsilon} \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\gamma-iR}^{\gamma+iR} \frac{[\widetilde{f_k^{(1)}}] e^{pt}}{\sigma(p,k,\varepsilon)} \Big(\int_0^t [e^{ik(t-s)}u_e - e^{-ik(t-s)}w_e] e^{ps} ds \Big) dp =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon} \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\gamma-iR}^{\gamma+iR} \frac{\widetilde{A_k} e^{pt}}{\sigma(p,k,\varepsilon)} [\widetilde{f_k^{(1)}}]\, e^{pt}\, dp\,.$$

Следовательно,

$$Ay_k(t) = \frac{1}{\varepsilon} \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\gamma-iR}^{\gamma+iR} \frac{\frac{1}{\varepsilon}\,[(4v_e + w_e + u_e)p^2 + ik\frac{1}{\varepsilon}\,(u_e - w_e)p + 4k^2\frac{1}{\varepsilon}\,v_e]e^{pt}}{\Sigma(p,k,\varepsilon)} [\widetilde{f_k^{(1)}}]\, e^{pt}\, dp\,, \tag{41}$$

$$\gamma > -\mu\varepsilon\,,$$

поскольку выражение под знаком интеграла не имеет особенностей и для любых $\gamma_2 > 0$, $-\mu\varepsilon < \gamma_1 < 0$

$$\frac{1}{\varepsilon} \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\gamma_1-iR}^{\gamma_1+iR} \frac{\frac{1}{\varepsilon}\,[(4v_e + w_e + u_e)p^2 + ik\frac{1}{\varepsilon}(u_e - w_e)p + 4k^2\frac{1}{\varepsilon}\,v_e]e^{pt}}{\Sigma(p,k,\varepsilon)} [\widetilde{f_k^{(1)}}]\, e^{pt}\, dp =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon} \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\gamma_2-iR}^{\gamma_2+iR} \frac{\frac{1}{\varepsilon}\,[(4v_e + w_e + u_e)p^2 + ik\frac{1}{\varepsilon}(u_e - w_e)p + 4k^2\frac{1}{\varepsilon}\,v_e]e^{pt}}{\Sigma(p,k,\varepsilon)} [\widetilde{f_k^{(1)}}] e^{pt}\, dp\,.$$

Из соотношений (40), (40) вытекает, что функция $y_k(t)$ удовлетворяет (31) в случае $g_k^{(2)} = 0$. Теперь рассмотрим $g_k^{(2)}$. Очевидно $g_k^{(2)}(t) \in L_{2,\gamma}(R_+)$, $\gamma > 0$. Преобразование

Лапласа

$$\widetilde{g_k^{(2)}}(p) = -\Big(\frac{ik\,u_e}{(4v_e+u_e+w_e+i\varepsilon k)(p-ik)} + \frac{ik\,w_e}{(4v_e+u_e+w_e-i\varepsilon k)(p+ik)}\Big)v_k^0$$

имеет чисто мнимые полюса $p=\pm k$. Поэтому, также как выше, показываем, что соответствующее решение $y_k^{(2)}(t)$ задачи (31)

$$y_k^{(2)}(t) = \lim_{R\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\gamma-iR}^{\gamma+iR}\Sigma(p,k,\varepsilon)^{-1}(p^2+k^2)\widetilde{g_k^{(2)}}(p)\,e^{pt}dp,\quad \gamma>-\mu\varepsilon\,,$$

поскольку $(p^2+k^2)\widetilde{g_k^{(2)}}(p)$ аналитично в полуплоскости $\Re p>-\mu\varepsilon$, и

$$\|\Sigma(p,k,\varepsilon)^{-1}(p^2+k^2)\widetilde{g_k^{(2)}}(p)\|^2_{H_2(\Re p>\gamma,H)} =$$

$$= \sup_{x>\gamma}\int_{-\infty}^{+\infty}|\Sigma(x+iy,k,\varepsilon)|^{-2}|((x+iy)^2+k^2)\widetilde{g_k^{(2)}}(x+iy)|^2dy \leqslant\ \infty\,.$$

Отсюда получаем, что для $-\mu\varepsilon<\gamma<0$ имеет место

$$\frac{d}{dt}y_k^{(2)}(t) = -\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\gamma-iR}^{\gamma+iR}\Sigma(p,k,\varepsilon)^{-1}p(p^2+k^2)\frac{ik\,u_e v_k^0}{(4v_e+u_e+w_e+i\varepsilon k)(p-ik)}\,e^{pt}dp\,+$$

$$+\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\gamma-iR}^{\gamma+iR}\Sigma(p,k,\varepsilon)^{-1}p(p^2+k^2)\frac{ik\,w_e v_k^0}{(4v_e+u_e+w_e-i\varepsilon k)(p+ik)}\,e^{pt}dp\,,$$

поскольку, в силу оценки (37), для $-\mu\varepsilon<\gamma$

$$\sup_{p=\Re p+ix,\ \Re p\geqslant\gamma}\int_{-\infty}^{\infty}\Big|\Sigma(p,k,\varepsilon)^{-1}p(p^2+k^2)\frac{ik\,w_e v_k^0}{(4v_e+u_e+w_e-i\varepsilon k)(p+ik)}\Big|^2dx \leqslant$$

$$\leqslant\ c_0^2(\gamma)\sup_{p=\Re p+ix,\ \Re p\geqslant\gamma}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k^2\,w_e^2|v_k^0|^2}{((4v_e+u_e+w_e)^2+\varepsilon^2k^2)(\gamma^2+(x+k)^2)}\,dx =$$

$$= c_0^2(\gamma)\sup_{p=\Re p+ix_1,\ \Re p\geqslant\gamma}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k^2\,w_e^2|v_k^0|^2}{((4v_e+u_e+w_e)^2+\varepsilon^2k^2)(\gamma^2+x_1^2)}\,dx_1 \leqslant\ \frac{1}{\varepsilon^2}\,c_1(\gamma)^2\,.$$

Следовательно, что, равномерно по k, выполняется

$$\|p\widetilde{y_k^{(2)}}\|_{H_2(\Re p>\gamma,H)} \leqslant c_*|v_k^0|,\quad \|\widetilde{y_k^{(2)}}\|_{H_2(\Re p>\gamma,H)} \leqslant \frac{1}{(1+|k|)}\,c_*|v_k^0| \quad\Longrightarrow\quad y^{(2)}(0)=0\,, \qquad (42)$$

в силу оценки символа $\Sigma(p,k,\varepsilon)$.

Замечание. За счет перехода от системы (10), (21) к системе (70), (23) в правой части k-моды возникают осцилляции

$$h_k(t) = \frac{1}{\varepsilon}(d_k^+e^{ikt}+d_k^-e^{-ikt}) - \varepsilon v_e^{1/2}\sum_{k_1+k_2=k,\ k\in Z_0}e^{i(k_1-k_2)t}d_{k_1,k_2}\,,$$

которые определяют часть решения

$$y_k^{(1)} = \xi_k^+ D_k^+ + \eta_k^- D_k^- \,,$$

где $D_k^{\pm} = T_k^{-1}(e^{\pm ikt})$, для которого

$$A_k y_k^{(1)} = T_k y_k^{(1)} - \frac{d}{dt} y_k^{(1)} = h_k(t) - \frac{d}{dt} y_k^{(1)} \,.$$

Отсюда

$$A_k y_k^{(1)} - h_k(t) \in L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu\varepsilon}(R^+) \,.$$

Оператор A_k на функциях $h_k(t)$ действует из $L_{2,\gamma}(R_+)$, $-\mu\varepsilon < \gamma < 0$ в $L_\infty(R_+)$, но не в $L_2(R_+)$.

В этом смысле решение можно считать обобщенным. Определим, в каком слабом смысле мы построили решение задачи (31).

Определение 3. *Функция $y_k(t) \in W^1_{2,\gamma}(R_+)$, $\gamma > -\mu\varepsilon$, называется обобщенным решением задачи (31), если для любой финитной $\psi(t) \in C^\infty(R_+)$ выполнено интегральное тождество*

$$\int_0^\infty T_k y_k(t)\ \psi(t)\ dt = \int_0^\infty (f_k^{(1)} + g_k^{(2)})\ \psi(t)\ dt \,. \tag{43}$$

Покажем, что построенное формальное решение является обобщенным решением задачи (31) в сформулированном выше смысле. Действительно, для любой финитной ψ существует $\gamma_\psi < 0$, такое что образ Лапласа $\widetilde{\psi}(p)$ аналитичен в полуплоскости $\Re p > \gamma_\psi$. Тогда для $0 > \gamma_1 > -\min\{\mu\varepsilon, |\gamma_\psi|\}$ в силу доказанных свойств решения имеем

$$\int_0^\infty T_k y_k(t)\ \psi(t)\ dt = \int_0^\infty (e^{-|\gamma_1|t}\ T_k y_k(t))\ (e^{|\gamma_1|t}\psi(t))\ dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \widetilde{T_k y_k}(|\gamma_1| + ix)\widetilde{\psi}(-|\gamma_1| + ix)dx = \int_{-\infty}^\infty \widetilde{(}f_k^{(1)} + g_k^{(2)})(|\gamma_1| + ix)\widetilde{\psi}(-|\gamma_1| + ix)dx =$$

$$= \int_0^\infty (e^{-|\gamma_1|t}\ (f_k^{(1)} + g_k^{(2)})(t)\ (e^{|\gamma_1|t}\psi(t))\ dt = \int_0^\infty (f_k^{(1)} + g_k^{(2)})(t)\ \psi(t)\ dt \,.$$

5. Разложение по гладкости

1). Начнем с того, что заменой

$$v_k^{(m)} = y_k^{(m)} + v_k^0 \exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t (L_e + 3\varepsilon^2 v_e^{1/2} v_0^{(m)})ds\right\}\,, \quad L_e = 4v_e + w_e + u_e$$

в системе (25), (26) перейдем к нулевым начальным условиям. Положим

$$G_k^{(m)} = -2v_e^{1/2}\varepsilon[B^*(v_0^{(m)}, v_0^{(m)})_k + H^*(v_0^{(m)})_k + g_k^{(m)}]\,,$$

$$B^*(v_0^{(m)}, v_0^{(m)})_k =$$

$$= \Pi_m B\left(\Pi_m v^0 \exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t (L_e + 3v^{1/2}\varepsilon^2 v_0^{(m)})ds\right\},\right.$$

$$\left.\Pi_m v^0 \exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t (L_e + 3v^{1/2}\varepsilon^2 v_0^{(m)})ds\right\}\right)_k +$$

$$+\frac{1}{4}\Pi_m \sum_{k_1+k_2=k} e^{i(k_2-k_1)t}\Pi_m\left[k_1\int_0^\infty e^{ik_1u}\exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^u (L_e + 3v^{1/2}\varepsilon^2 v_0^{(m)})ds\right\}du\right]\times$$

$$\times\Pi_m\left[k_2\int_0^\infty e^{-ik_2u}\exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^u (L_e + 3v^{1/2}\varepsilon^2 v_0^{(m)})ds\right\}du\right] \in L_{2,\gamma,0>\gamma>-\mu_0\varepsilon};$$

$$H^*(v_0^{(m)})_k = \Pi_m H\left(\Pi_m v^0 \exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t (L_e + 3v^{1/2}\varepsilon^2 v_0^{(m)})ds\right\}\right)_k +$$

$$+\frac{1}{4}\Pi_m \sum_{k_1+k_2=k, k_1,k_2,k\in Z_0} e^{(k_2-k_1)t}\left(-\left(2w_{k_2}^0\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} + v_{k_2}^0\right)\Pi_m k_1\times\right.$$

$$\left.\times\int_0^\infty e^{ik_1u}\exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^u (L_e + 3v^{1/2}\varepsilon^2 v_0^{(m)})ds\right\}v_{k_1}^0 du\right) +$$

$$+\left(2w_{k_1}^0\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} + v_{k_1}^0\right)\Pi_m k_2\int_0^\infty e^{-ik_2u}\exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^u (L_e + 3v^{1/2}\varepsilon^2 v_0^{(m)})ds\right\}v_{k_2}^0 du \in L_{2,\gamma,0>\gamma>-\mu_0\varepsilon},$$

$$g_k^{(m)} = \frac{i}{2}kv_0^{(m)}v_k^0\int_t^\infty (e^{ik(t-u)} - e^{-ik(t-u)})\exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^u (L_e + 3v^{1/2}\varepsilon^2 v_0^{(m)})ds\right\}du \in L_{2,\gamma,0>\gamma>-\mu_0\varepsilon},$$

$$b_{k_1,k_2} = \frac{1}{2}\left(\Pi_m\left[k_1 v_{k_1}^0\int_0^\infty e^{ik_1u}\exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^u (L_e + 3v^{1/2}\varepsilon^2 v_0^{(m)})ds\right\}du\right]\times\right.$$

$$\times\Pi_m\left[k_2 v_{k_1}^0\int_0^\infty e^{-ik_2u}\exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^u (L_e + 3v^{1/2}\varepsilon^2 v_0^{(m)})ds\right\}du\right] -$$

$$-\left(2w_{k_2}^0\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} + v_{k_2}^0\right)\Pi_m k_1\int_0^\infty e^{ik_1u}\exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^u (L_e + 3v^{1/2}\varepsilon^2 v_0^{(m)})ds\right\}v_{k_1}^0 du +$$

$$\left.+\left(2w_{k_1}^0\frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} + v_{k_1}^0\right)\Pi_m k_2\int_0^\infty e^{-ik_2u}\exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^u (L_e + 3v^{1/2}\varepsilon^2 v_0^{(m)})ds\right\}v_{k_2}^0 du\right);$$

$$c_k^{\pm}(v_0^{(m)}) = \int_0^{\infty} e^{\mp ikt} \exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t (L_e + 3v^{1/2}\varepsilon^2 v_0^{(m)})ds\right\} dt\,,$$

Тогда

$$\frac{d}{dt}\, v_0^{(m)} + \frac{1}{\varepsilon}\, L_e v_0^{(m)} = -\frac{3}{2}\,\varepsilon\, v_e^{1/2}(v_0^{(m)})^2 \; - \tag{44}$$

$$- \; 2\varepsilon\, v_e^{1/2}\Pi_m(B(\Pi_m y, \Pi_m y)_0 + H(\Pi_m y)_0 \; + \; H(\Pi_m y, v_0^{(m)})_0) \; +$$

$$+ \; G_0^{(m)}(t) - \varepsilon v_e^{1/2}\Pi_m \sum_{k_1+k_2=0} e^{i(k_2-k_1)t}\Pi_m(d_{k_1,k_2} + b_{k_1,k_2})\,,$$

$$v_0^{(m)}|_{t=0} = v_0^0$$

$$T_k y_k^{(m)} = -3v^{1/2}\varepsilon\, v_0^{(m)} y_k^{(m)} + v_e^{1/2}\varepsilon v_0^{(m)} A_k^{(1)} y_k^{(m)} + G_k^{(m)}(t) + \tag{45}$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\,(d_k^+ + v_e^{1/2}\varepsilon^2 v_0^{(m)} ikv_k^0\; c_k^+(v_0^{(m)}))e^{ikt} + \frac{1}{\varepsilon}\,(d_k^- + v_e^{1/2}\varepsilon^2 v_0^{(m)} ikv_k^0\; c_k^-(v_0^{(m)}))e^{-ikt} \; -$$

$$- \; \varepsilon v_e^{1/2}\Pi_m \sum_{k_1+k_2=k} e^{i(k_2-k_1)t}\Pi_m(d_{k_1,k_2}(t) + b_{k_1,k_2}(t)) \; -$$

$$- \; 2\varepsilon\, v_e^{1/2}\Pi_m[B(\Pi_m y, \Pi_m y)_k \; + H(\Pi_m y, v_0^{(m)})_k + H(\Pi_m y)_k]\,, \quad k \in Z_0\,,$$

$$y_k^{(m)}|_{t=0} = 0\,, \quad |k| \leqslant m, k \neq 0\,.$$

Здесь билинейные операторы $B(y^{(m)}, y^{(m)})$, $H(y^{(m)}, v^{(m)})$:

$$B(y^{(m)}, y^{(m)})_k = \sum_{k_1+k_2=k}\Big[\Pi_m(y_{k_1}^{(m)})\Pi_m(y_{k_2}^{(m)}) -$$

$$-\Pi_m\left(y_{k_1}^{(m)} - ik_1\int_0^t e^{ik_1(t-s)}y_{k_1}^{(m)}ds\right)\;\Pi_m\left(y_{k_2}^{(m)} + ik_2\int_0^t e^{-ik_2(t-s)}y_{k_2}^{(m)}ds\right)\Big]\,, \quad k \in Z$$

и

$$H(y^{(m)}, v_0^{(m)})_0 = \Pi_m\Big(\sum_{k_1+k_2=0,\; |k_1|\leqslant m, k_1\neq 0}\Big[\exp\left\{-\int_0^t (4\widetilde{v} + \widetilde{w} + \widetilde{u} + 5\varepsilon^{3/2}\widetilde{v}^{1/2}v_0^{(m)})ds\right\}\times$$

$$\times\left[\Pi_m(v_{k_1}^0)\Pi_m(y_{k_2}^{(m)}) + \Pi_m(v_{k_2}^0)\Pi_m(y_{k_2}^{(m)})\right] -$$

$$\Pi_m\Big(y_{k_1}^{(m)} + ik_1\int_0^t e^{-ik_1(t-s)}y_{k_1}^{(m)}ds\Big)\Pi_m\Big(v_{k_2}^0 H_{k_2,v}(v_0^{(m)}, t)\Big) -$$

$$- \; \Pi_m\Big(v_{k_1}^0 H_{k_1,u}(v_0^{(m)}, t)\Big)\Pi_m\Big(y_{k_2}^{(m)} + ik_2\int_0^t e^{-ik_2(t-s)}y_{k_2}^{(m)}ds\Big) \; +$$

$$+ \ \Pi_m\Big(v^0_{k_1} H_{k_1,u}(v_0^{(m)},t)\Big)\Pi_m\Big(v^0_{k_2} H_{k_2,w}(v_0^{(m)},t)\Big)\Big]\Big).$$

$$H(y^{(m)},v_0^{(m)})_k = \Pi_m\Big(\sum_{k_1+k_2=k}\Big[\exp\Big\{-\int_0^t (4\widetilde{v}+\widetilde{w}+\widetilde{u}+5\varepsilon^{3/2}\widetilde{v}^{1/2}v_0^{(m)})ds\Big\}\times$$

$$\times\Big[\Pi_m(y^{(m)}_{k_1})\ \Pi_m(v^0_{k_2}) + \Pi_m(v^0_{k_1})\Pi_m(y^{(m)}_{k_2})\Big] +$$

$$+\ \Pi_m\Big(y^{(m)}_{k_1} - ik_1\int_0^t e^{-ik_1(t-s)}y^{(m)}_{k_1}ds\Big)\ \Pi_m\Big(v^0_{k_2}\,h_{k_2,w}(v_0^{(m)},t)\Big)$$

$$+\ \Pi_m\Big(v^0_{k_1}\,h_{k_1,u}(v_0^{(m)},t)\Big)\ \Pi_m\Big(y^{(m)}_{k_2} + ik_2\int_0^t e^{ik_2(t-s)}y^{(m)}_{k_2}ds\Big)\Big]\Big).$$

2). Оценим вклад билинейного оператора $B(y^{(m)},y^{(m)})$ в решение, выделив члены, принадлежащие $L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)$. Наша цель – получить так называемое разложение по гладкости

$$y^{(m)}_k = T_k^{-1}Y^{(m)}_k + T_k^{-1}D^{(m)}_k\,, \tag{46}$$

$$D^{\pm}_k = \xi^{(m)}_k e^{ikt} + \eta^{(m)}_k e^{-ikt}\,,$$

$$D^{\pm}_k = T_k^{-1}(e^{\pm ikt})\,,\quad Y^{(m)}_k \in W^1_{2,\gamma;\ 0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}(R_+)\,,$$

где для $k<0$ положим $\xi_k = \eta_{|k|}$, $\eta_k = \xi_{|k|}$, $D^+_k = D^-_{|k|}$, $D^-_k = D^+_{|k|}$. Отсюда $\xi_k D^+_k = \eta_{|k|}D^-_{|k|}, \eta_k D^-_k = \xi_{|k|}D^+_{|k|}, D_k = D_{|k|}$. Заметим, что $T_k^{-1}D^{(m)}_k|_{t=0} = 0$, $T_k^{-1}Y^{(m)}_k|_{t=0} = 0$. Тогда

$$B(y^{(m)},y^{(m)}) = B(T^{-1}Y^{(m)},T^{-1}Y^{(m)}) \ +\ B(T^{-1}D^{(m)},T^{-1}Y^{(m)})\ + \\ +B(T^{-1}Y^{(m)},T^{-1}D^{(m)})\ + B(T^{-1}D^{(m)},T^{-1}D^{(m)})\,. \tag{47}$$

Начнем со старших мод $k\in Z_0$. Для $k,\ k_1,k_2\in Z_0$:

$$B(T^{-1}Y^{(m)},T^{-1}Y^{(m)})_k = \sum_{k_1+k_2=k}\Big(\Pi_m T^{-1}_{k_1}Y^{(m)}_{k_1}\Pi_m T^{-1}_{k_2}Y^{(m)}_{k_2} - \tag{48}$$

$$-\Pi_m\Big(T^{-1}_{k_1}Y^{(m)}_{k_1} - ik_1\int_0^t e^{ik_1(t-s)}T^{-1}_{k_1}Y^{(m)}_{k_1}ds\Big)\ \Pi_m\Big(T^{-1}_{k_2}Y^{(m)}_{k_2} + ik_2\int_0^t e^{-ik_2(t-s)}T^{-1}_{k_2}Y^{(m)}_{k_2}ds\Big)\Big).$$

Лемма 5. *Для любых $k,k_1,k_2\in Z_0$, $k+k_1+k_2$ и $u,v\in W^1_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)}$ справедлива оценка*

$$\|uv\|^2_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\pi}{k^2}\Big(\Big\|\frac{d}{dt}u\Big\|^2_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)}+k_1^2\|u\|^2_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)}\Big)\Big(\Big\|\frac{d}{dt}v\Big\|^2_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)}+k_2^2\|v\|^2_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)}\Big).$$

а). Следствием этой леммы является приводимая ниже оценка для первых слагаемых в (47). Во-первых,

$$\|\sum_{k_1+k_2=k,\ 0<|k|,|k_1||k_2|\leqslant m}\Pi_m T^{-1}_{k_1}Y^{(m)}_{k_1}T^{-1}_{k_2}Y^{(m)}_{k_2}\|^2_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)}\leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{k^2}\,c_1^2\sum_{k_1+k_2=k,\ 0<|k|,|k_1||k_2|\leqslant m}\left(\Big\|\frac{d}{dt}T^{-1}_{k_1}Y^{(m)}_{k_1}\Big\|^2_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)}+k_1^2\Big\|T^{-1}_{k_1}Y^{(m)}_{k_1}\Big\|^2_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)}\right)\times$$

$$\times\left(\Big\|\frac{d}{dt}T^{-1}_{k_2}Y^{(m)}_{k_2}\Big\|^2_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)}+k_2^2\|T^{-1}_{k_1}Y^{(m)}_{k_2}\|^2_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)}\right)\leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{k^2}\,c_1^4\sum_{k_1+k_2=k,\ 0<|k|,|k_1||k_2|\leqslant m}\|Y^{(m)}_{k_1}\|^2_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)}\ \|Y^{(m)}_{k_2}\|^2_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)}$$

с постоянной c_1 не зависящей от $Y^{(m)}_k\in W^1_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)$ и $k\in Z_0$,

$$T^{-1}_{k_1}Y^{(m)}_{k_1}-ik_1\int_0^t e^{ik_1(t-s)}T^{-1}_{k_1}Y^{(m)}_{k_1}ds=\int_0^t e^{ik_1(t-s)}\frac{d}{ds}T^{-1}_{k_1}Y^{(m)}_{k_1}ds\,.$$

Далее, из приведенных выше свойств интегро-псевдодифференциального оператора T_k следует, что символ $p(p+ik_1)/\Sigma(p,k_1)$ оператора $\mathcal{T}y=\int_0^t e^{ik_1(t-s)}\frac{d}{ds}T^{-1}_{k_1}yds$ ограничен в полуплоскости $\Re p>\gamma=-\mu_0\varepsilon$. в силу Лемм 2,3, отсюда следует,что

$$\sup_{t>0}\left|\int_0^t e^{ik_1(t-s)}T^{-1}_{k_1}\frac{d}{ds}Y^{(m)}_{k_1}ds\right|\leqslant\Big(\int_0^\infty e^{-2|\gamma|t}dt\Big)^{1/2}\ \Big\|T^{-1}_{k_1}\frac{d}{ds}Y^{(m)}_{k_1}\Big\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)}\leqslant$$

$$\leqslant\ \sqrt{2c_1\mu_0/\varepsilon}\ \|Y^{(m)}_{k_1}\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)}\,.$$

Окончательно получаем

$$\|B(T^{-1}Y^{(m)},T^{-1}Y^{(m)})_k\|^2_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)}\leqslant$$

$$\leqslant\ c_1^4\left(\frac{1}{k^2}+\frac{4\mu_0}{\varepsilon}\right)\sum_{k_1+k_2=k,\ 0<|k|,|k_1||k_2|\leqslant m}\|Y^{(m)}_{k_1}\|^2_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)}\ \|Y^{(m)}_{k_2}\|^2_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)}\,.$$

Доказательство леммы. В образах Лапласа по t получим

$$\|uv\|^2_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)}=\sup_{\gamma>-\mu\varepsilon}\int_{\Re p=\gamma}\Big|\int_{\Re s=\gamma}\widetilde{u}(p-s)\widetilde{v}(s)ds\Big|^2dp\leqslant$$

$$\leqslant\ 2\Big(\Big\|\frac{d}{dt}v\Big\|^2_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)}+k_1^2\|v\|^2_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)}\Big)\sup_{\gamma>-\mu\varepsilon}\int_{\Re p=\gamma}\frac{dp}{|p|^2+k^2}\int_{\Re s=\gamma}|\widetilde{u}(p-s)|^2ds\ +$$

$$+\ 2\|v\|^2_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)}\Big(\Big\|\frac{d}{dt}u\Big\|^2_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)}+k_2^2\|u\|^2_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)}\Big)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp}{|p|^2+k^2}\,.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $(|p|^2+k^2)\leqslant 2[(|s|^2+k_1^2)+(|p-s|^2+k_2^2)]$. ■

Для последовательности $\{f_k^{(m)}(t),\ k\in Z_0,\ |k|\leqslant m\}$ положим

$$\|f^{(m)}\|^2_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}(R_+)}=\sum_{k\in Z_0,\ |k|\leqslant m}\|f_k^{(m)}\|^2_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}(R_+)}\,,$$

$$\|f^{(m)}\|^2_{W^1_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}(R_+)}=\sum_{k\in Z_0,|k|\leqslant m}\Big(\Big\|\frac{d}{dt}f_k^{(m)}\Big\|^2_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}(R_+)}+|k|^2\|f_k^{(m)}\|^2_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}(R_+)}\Big)\,,$$

$$\|f^{(m)}\|^2_{W^1_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}(R_+;A)}=\sum_{k\in Z_0,|k|\leqslant m}\Big(\Big\|\frac{d}{dt}f_k^{(m)}\Big\|^2_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)}+|k|^2\|f_k^{(m)}\|^2_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}(R_+)}\ +$$

$$+\ \|A_kf_k^{(m)}\|^2_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}(R_+)}\Big)\,.$$

Тогда

$$\|\varepsilon\,B(T^{-1}Y^{(m)},T^{-1}Y^{(m)})\|^2_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}(R_+)}\leqslant$$

$$\leqslant\ \varepsilon\,c_1^2\sum_{k\in Z_0}\sum_{k_1+k_2=k,0<|k_1|,|k_2|,|k|\leqslant m}\|Y_{k_1}^{(m)}\|^2_{L_{2,\gamma;0>-\gamma>-\mu_0\varepsilon}(R_+)}\|Y_{k_2}^{(m)}\|^2_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}(R_+)}\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon\,c_2^2\|Y^{(m)}\|^4_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}(R_+)}\,.$$

b). Теперь оценим два следующих члена в (1). Имеем

$$J_1=B(T^{-1}D^{(m)},T^{-1}Y^{(m)})_k=\sum_{k_1+k_2=k}\Big(\Pi_mT_{k_1}^{-1}D_{k_1}^{(m)}\Pi_mT_{k_2}^{-1}Y_{k_2}^{(m)}-\qquad(49)$$

$$-\Pi_m\Big(T_{k_1}^{-1}D_{k_1}^{(m)}-ik_1\int_0^te^{ik_1(t-s)}T_{k_1}^{-1}D_{k_1}^{(m)}ds\Big)\ \Pi_m\Big(T_{k_2}^{-1}Y_{k_2}^{(m)}+ik_2\int_0^te^{-ik_2(t-s)}T_{k_2}^{-1}Y_{k_2}^{(m)}ds\Big)\Big)\,,$$

$$k,\ k_1,k_2\in Z_0\,.$$

Также как выше

$$\Pi_m\Big(T_{k_1}^{-1}D_{k_1}^{(m)}-ik_1\int_0^te^{ik_1(t-s)}T_{k_1}^{-1}D_{k_1}^{(m)}ds\Big)\ \Pi_m\Big(T_{k_2}^{-1}Y_{k_2}^{(m)}+ik_2\int_0^te^{-ik_2(t-s)}T_{k_2}^{-1}Y_{k_2}^{(m)}ds\Big)=$$

$$=-\Pi_m\Big(\int_0^te^{ik_1(t-s)}T_{k_1}^{-1}\frac{d}{ds}D_{k_1}^{(m)}ds\Big)\ \Pi_m\Big(-\int_0^te^{-ik_2(t-s)}T_{k_2}^{-1}\frac{d}{ds}Y_{k_2}^{(m)}ds\Big)\,.$$

Из приведенных выше свойств интегро-псевдодифференциального оператора T_k следует, что $T_k^{-1}D_k^{(m)} \in L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}(R_+)$ и $T_k^{-1}\frac{d}{ds}D_k^{(m)} \in L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}(R_+)$. Отсюда

$$\sup_{t>0}\left|\int_0^t e^{ik_1(t-s)}T_{k_1}^{-1}\frac{d}{ds}D_{k_1}^{(m)}ds\right| \leqslant \left(\int_0^\infty e^{-2|\gamma|t}dt\right)^{1/2}\left\|T_{k_1}^{-1}\frac{d}{ds}D_{k_1}^{(m)}\right\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_)\varepsilon}(R_+)} =$$

$$= \sqrt{2\mu_0/\varepsilon}\left\|T_{k_1}^{-1}\frac{d}{ds}D_{k_1}^{(m)}\right\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}(R_+)}.$$

Оценим таким же образом $T_{k_1}^{-1}D_{k_1}^{(m)} = \int_0^t T_{k_1}^{-1}\frac{d}{ds}D_{k_1}^{(m)}ds$. На основании этих оценок имеем

$$\|J_1\|^2_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_)\varepsilon}(R_+)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2c_1^2\mu_0}{\varepsilon}\sum_{k_1+k_2=k,k_1,k_2,k\in Z_0,\ |k|,|k_1||k_2|\leqslant m}\|Y_{k_2}^{(m)}\|^2_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}(R_+)})\ (|\xi_{k_1}^{(m)}|^2+|\eta_{k_1}^{(m)}|^2).$$

c). Наконец, оценим

$$B(T^{-1}D^{(m)},T^{-1}D^{(m)})_k = \sum_{k_1+k_2=k,\ k_1,k_2,k\in Z_0,\ |k|,|k_1||k_2|\leqslant m}\Big[\Pi_m(T_{k_1}^{-1}D_{k_1}^{(m)})\Pi_m(T_{k_1}^{-1}D_{k_2}^{(m)})-$$

$$-\Pi_m\left(T_{k_1}^{-1}D_{k_1}^{(m)}-ik_1\int_0^t e^{ik_1(t-s)}T_{k_1}^{-1}D_{k_1}^{(m)}ds\right)\Pi_m\left(T_{k_2}^{-1}D_{k_2}^{(m)}+ik_2\int_0^t e^{-ik_2(t-s)}T_{k_2}^{-1}D_{k_2}^{(m)}ds\right)\Big] =$$

$$= \sum_{k_1+k_2=k,\ |k|,\ 0<|k_1||k_2|\leqslant m}\Big[\Pi_m(T_{k_1}^{-1}D_{k_1}^{(m)})\Pi_m(T_{k_1}^{-1}D_{k_2}^{(m)})-$$

$$-\Pi_m\left(\int_0^t e^{ik_1(t-s)}T_{k_1}^{-1}\frac{d}{ds}D_{k_1}^{(m)}ds\right)\Pi_m\left(-\int_0^t e^{-ik_2(t-s)}T_{k_2}^{-1}\frac{d}{ds}Y_{k_2}^{(m)}ds\right)\Big].$$

Решим теперь проблему с членами $ik\int_0^t e^{ik(t-s)}D^+(s)ds,\ ik\int_0^t e^{-ik(t-s)}D^-(s)ds$, которые, как мы показали выше, не принадлежат $L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)$. Выделим в них вклад осциллирующей части.

Слагаемое $\Pi_m T_{k_1}^{-1}D_{k_1}^{(m)}\Pi_m T_{k_1}^{-1}D_{k_2}^{(m)}$ оценим по Лемме 5. Имеем

$$\|\Pi_m T_{k_1}^{-1}D_{k_1}^{(m)}\Pi_m T_{k_1}^{-1}D_{k_2}^{(m)}\|^2_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}(R_+)}) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2c_1^2\mu_0}{\varepsilon}(|\xi_{k_1}^{(m)}|^2+|\eta_{k_1}^{(m)}|^2)\ (|\xi_{k_2}^{(m)}|^2+|\eta_{k_2}^{(m)}|^2).$$

Далее,

$$\left\|\xi_{k_1}^{(m)}\eta_{k_2}^{(m)}\int_0^t e^{-ik_1(t-s)}\frac{d}{ds}T_{k_1}^{-1}(e^{ik_1s})ds\int_0^t e^{ik_2(t-s)}\frac{d}{ds}T_{k_2}^{-1}(e^{-ik_2s})ds\right\|^2_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}(R_+)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\mu_0}{\varepsilon}\left\|\frac{d}{ds}T_{k_1}^{-1}(e^{ik_1 st})\right\|^2_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}(R_+)}\left\|\int_0^t e^{ik_2(t-s)}\frac{d}{ds}T_{k_2}^{-1}(e^{-ik_2 s})ds\right\|^2_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}(R_+)}\leqslant$$

$$\leqslant \frac{2c_1^2\mu_0}{\varepsilon}(|\xi_{k_1}^{(m)}|^2+|\eta_{k_1}^{(m)}|^2)\,(|\xi_{k_2}^{(m)}|^2+|\eta_{k_2}^{(m)}|^2)\,.$$

Здесь мы воспользовались выражением для преобразования Лапласа

$$L\Big(\int_0^t e^{ik_2(t-s)}\frac{d}{ds}T_{k_2}^{-1}(e^{-ik_2 s})ds\Big)=\frac{p}{\Sigma(p,k_2)}\,.$$

Откуда, в силу Леммы 3, следует, что $\|\int_0^t e^{ik_2(t-s)}\frac{d}{ds}T_{k_2}^{-1}(e^{-ik_2 s})ds\|^2_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}(R_+)}\leqslant c_1^2$.

Теперь оценим члены вида

$$I_1=\eta_{k_1}^{(m)}\eta_{k_2}^{(m)}\Big(T_{k_1}^{-1}(e^{-ik_1 s})-ik_1\int_0^t e^{-ik_1(t-s)}T_{k_1}^{-1}(e^{-ik_1 s})ds\Big)\int_0^t e^{ik_2(t-s)}\frac{d}{ds}T_{k_2}^{-1}(e^{-ik_2 s})ds,$$

и

$$I_2=\xi_{k_1}^{(m)}\xi_{k_2}^{(m)}\int_0^t e^{-ik_1(t-s)}\frac{d}{ds}T_{k_1}^{-1}(e^{ik_1 s})ds\,\Big(T_{k_2}^{-1}(e^{ik_2 t})-ik_2\int_0^t e^{ik_2(t-s)}\frac{d}{ds}T_{k_2}^{-1}(e^{ik_2 s})ds\Big)\,.$$

Далее, для определенности, рассмотрим случай $k_1,k_2>0$. Тогда

$$-ik_1\int_0^t e^{-ik_1(t-s)}T_{k_1}^{-1}(e^{-ik_1 s})ds=\frac{\varepsilon}{w_e}T_{k_1}T_{k_1}^{-1}(e^{-ik_1 s})- \tag{50}$$

$$-\frac{\varepsilon}{w_e}\left[\frac{d}{dt}T_{k_1}^{-1}(e^{-ik_1 s})-\frac{1}{\varepsilon}L_eT_{k_1}^{-1}(e^{-ik_1 s})-ik_1u_e\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t e^{ik_1(t-s)}T_{k_1}^{-1}(e^{-ik_1 s})ds\right]=$$

$$=\frac{\varepsilon}{w_e}e^{-ik_1 s}-\frac{1}{w_e}\left[\varepsilon\frac{d}{dt}T_{k_1}^{-1}(e^{-ik_1 s})-(L_e-u_e)T_{k_1}^{-1}(e^{-ik_1 s})+u_e\int_0^t e^{ik_1(t-s)}\frac{d}{dt}T_{k_1}^{-1}(e^{-ik_1 s})ds\right].$$

Таким образом, осталось оценить только члены вида

$$I_3=\eta_{k_1}^{(m)}\xi_{k_2}^{(m)}\Big(T_{k_1}^{-1}(e^{-ik_1 t})+ik_1\int_0^t e^{-ik_1(t-s)}T_{k_1}^{-1}(e^{-ik_1 s})ds\Big)\times$$

$$\times\Big(T_{k_2}^{-1}(e^{ik_2 t})-ik_2\int_0^t e^{ik_2(t-s)}T_{k_2}^{-1}(e^{ik_2 s})ds\Big)=$$

$$=\eta_{k_1}^{(m)}\xi_{k_2}^{(m)}\frac{\varepsilon^2}{u_ew_e}e^{i(k_2-k_1)t}+\eta_{k_1}^{(m)}\xi_{k_2}^{(m)}T_{k_1}^{-1}(e^{-ik_1 t})\frac{\varepsilon}{u_e}e^{ik_2 t}+\eta_{k_1}^{(m)}\xi_{k_2}^{(m)}T_{k_1}^{-1}(e^{-ik_1 t})T_{k_2}^{-1}(e^{ik_2 t})-$$

$$-\eta_{k_1}^{(m)}\xi_{k_2}^{(m)}\Big\{T_{k_1}^{-1}(e^{-ik_1 t})\,\Big(\frac{\varepsilon}{u_e}e^{ik_2 s}+\frac{1}{u_e}[\varepsilon\frac{d}{dt}T_{k_2}^{-1}(e^{ik_2 s})-(L_e-w_e)T_{k_2}^{-1}(e^{ik_2 s})-$$

$$-w_e\int_0^t e^{-ik_2(t-s)}\frac{d}{dt}T_{k_1}^{-1}(e^{ik_2 s})ds]\Big)+$$

$$-\frac{1}{w_e}\Big[\varepsilon\frac{d}{dt}T_{k_1}^{-1}(e^{-ik_1s})-(L_e-u_e)T_{k_1}^{-1}(e^{-ik_1s})+u_e\int_0^t e^{ik_1(t-s)}\frac{d}{dt}T_{k_1}^{-1}(e^{-ik_1s})ds\Big]\ \times$$
$$\times\int_0^t e^{ik_2(t-s)}\frac{d}{ds}T_{k_2}^{-1}(e^{ik_2s})ds\Big\}.$$

Здесь мы дважды воспользовались (50).

Из приведенных выше оценок следует, что

$$\|\varepsilon\,B^*(\Xi^{(m)},\Upsilon^{(m)})_k\|^2_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}(R_+)}\leqslant$$
$$\leqslant\ \varepsilon\ c_1^4\sum_{k_1+k_2=k,\ |k_1|,|k_2|,|k|\leqslant m,k_1,k_2,k\neq 0}\left(|\xi_{k_1}^{(m)}|^2+|\eta_{k_1}^{(m)}|^2\right)\left(|\xi_{k_2}^{(m)}|^2+|\eta_{k_2}^{(m)}|^2\right),$$

где

$$B^*(\Xi^{(m)},\Upsilon^{(m)})_k=B(T^{-1}D^{(m)},T^{-1}D^{(m)})_k-a_k^{(m)}(t)\in L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}\,,$$
$$a_k^{(m)}(t)=\frac{\varepsilon^2}{u_ew_e}\sum_{k_1+k_2=k,\ |k_1|,|k_2|,|k|\leqslant m}\eta_{s_1}^{(m)}\xi_{s_2}^{(m)}\ e^{i(k_2-k_1)t}\,.$$

Замечание. Для $k_1<0$ имеем

$$T_{k_1}y=\frac{d}{dt}\,y+\frac{1}{\varepsilon}\,L_ey+i|k_1|\int_0^t(w_e\,e^{i|k_1|(t-s)}-u_e\,e^{-i|k_1|(t-s)})yds\,.$$

Положим

$$T_{|k_1|}^{inv}y=\frac{d}{dt}y+\frac{1}{\varepsilon}L_ey+i|k_1|\int_0^t(w_e\,e^{i|k_1|(t-s)}-u_e\,e^{-i|k_1|(t-s)})yds\,.$$

Тогда для $k_1<0$ имеем

$$T_{k_1}y=T_{|k_1|}^{inv}y$$

т.е. $T_{k_1}^{-1}=(T_{k_1}^{inv})^{-1}$.

Из этого наблюдения можно сделать следующие выводы.

1. Для $k_1<0,k_2<0$

$$\left(ik_1\int_0^t e^{-ik_1(t-s)}T_{k_1}^{-1}D_{k_1}^{(m)}ds\right)\left(ik_2\int_0^t e^{ik_2(t-s)}T_{k_2}^{-1}D_{k_2}^{(m)}ds\right)=$$
$$=\left(i|k_1|\int_0^t e^{i|k_1|(t-s)}(T_{|k_1|}^{inv})^{-1}D_{|k_1|}^{(m)}ds\right)\left(i|k_2|\int_0^t e^{-i|k_2|(t-s)}(T_{|k_2|}^{inv})^{-1}D_{|k_2|}^{(m)}ds\right)=$$
$$=\frac{\varepsilon^2}{u_ew_e}\eta_{|k_2|}\xi_{|k_1|}e^{(-|k_2|+|k_1|)t}+\dots=\frac{\varepsilon^2}{u_ew_e}\eta_{|k_2|}\xi_{|k_1|}e^{(k_2-k_1)t}+\dots\,.$$

2. Для $k_1>0,k_2<0$

$$\left(ik_1\int_0^t e^{-ik_1(t-s)}T_{k_1}^{-1}D_{k_1}^{(m)}ds\right)\left(ik_2\int_0^t e^{ik_2(t-s)}T_{k_2}^{-1}D_{k_2}^{(m)}ds\right)=$$

$$= \Big(- ik_1 \int_0^t e^{-ik_1(t-s)} T_{k_1}^{-1} D_{k_1}^{(m)} ds \Big) \Big(i|k_2| \int_0^t e^{-i|k_2|(t-s)} (T_{|k_2|}^{inv})^{-1} D_{|k_2|}^{(m)} ds \Big) =$$

$$- \frac{\varepsilon^2}{u_e w_e} \eta_{|k_2|} \eta_{k_1} e^{-|k_2| - k_1} + \dots = - \frac{\varepsilon^2}{u_e w_e} \eta_{|k_2|} \eta_{k_1} e^{k_2 - k_1} + \dots .$$

3. Для $k_1 < 0, k_2 > 0$

$$\Big(ik_1 \int_0^t e^{-ik_1(t-s)} T_{k_1}^{-1} D_{k_1}^{(m)} ds \Big) \Big(ik_2 \int_0^t e^{ik_2(t-s)} T_{k_2}^{-1} D_{k_2}^{(m)} ds \Big) =$$

$$= \Big(- i|k_1| \int_0^t e^{i|k_1|(t-s)} (T_{|k_1|}^{inv})^{-1} D_{|k_1|}^{(m)} ds \Big) \Big(ik_2 \int_0^t e^{ik_2(t-s)} (T_{k_2}^{-1} D_{k_2}^{(m)} ds \Big) =$$

$$- \frac{\varepsilon^2}{u_e w_e} \xi_{k_2} \xi_{|k_1|} e^{k_2 + |k_1|} + \dots = - \frac{\varepsilon^2}{u_e w_e} \xi_{k_2} \xi_{|k_1|} e^{k_2 - k_1} + \dots .$$

Положим

$$B_*(Y^{(m)}, Y^{(m)}) = B(T^{-1} Y^{(m)}, T^{-1} Y^{(m)}) + B(T^{-1} D^{(m)}, T^{-1} Y^{(m)}) + B(T^{-1} Y^{(m)}, T^{-1} D^{(m)}) ,$$

$$B^*(D^{(m)}, D^{(m)})_k = B(T^{-1} D^{(m)}, T^{-1} D^{(m)})_k + \frac{\varepsilon^2}{u_e w_e} \sum_{k_1 + k_2 = k} e^{i(k_2 - k_1)t} \xi_{k_2}^{(m)} \eta_{k_1}^{(m)} .$$

Тогда B_* часть B которая переводит

$$B_*(Y^{(m)}, Y^{(m)}) : \; (L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}(R_+))^2 \;\mapsto\; L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}(R_+) ,$$

и

$$B^*(D^{(m)}, D^{(m)})_k = B(T^{-1} D^{(m)}, T^{-1} D^{(m)})_k + \frac{\varepsilon^2}{u_e w_e} \sum_{k_1 + k_2 = k} e^{i(k_2 - k_1)t} \xi_{k_2}^{(m)} \eta_{k_1}^{(m)} \in L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon} .$$

Таким образом, в переменных $Y^{(m)}, D^{(m)}$ система (45) записывается в виде

$$\begin{gathered} Y_k^{(m)} + 3v^{1/2} \varepsilon\, v_0^{(m)} T_k^{-1} Y_k^{(m)} - v_e^{1/2} \varepsilon v_0^{(m)} A_k^{(1)} T_k^{-1} Y_k^{(m)} \\ = - D_k^{(m)} - 3v^{1/2} \varepsilon\, v_0^{(m)} T_k^{-1} D_k^{(m)} + v_e^{1/2} \varepsilon v_0^{(m)} A_k^{(1)} T_k^{-1} D_k^{(m)} \\ + \frac{1}{\varepsilon} (d_k^+ + v_e^{1/2} \varepsilon^2 v_0^{(m)} ikv_k^0\; c_k^+(v_0^{(m)})) e^{ikt} + \frac{1}{\varepsilon} (d_k^- + v_e^{1/2} \varepsilon^2 v_0^{(m)} ikv_k^0\; c_k^-(v_0^{(m)})) e^{-ikt} \\ - \varepsilon v_e^{1/2} \Pi_m \sum_{k_1 + k_2 = k} e^{i(k_2 - k_1)t} \Pi_m (d_{k_1,k_2}(t) + b_{k_1,k_2}(t) + \frac{\varepsilon^2}{u_e w_e} \xi_{k_2}^{(m)} \eta_{k_1}^{(m)}) \\ - 2\varepsilon\, v_e^{1/2} \Pi_m [B^*(Y^{(m)}, Y^{(m)})_k + B^*(D^{(m)}, D^{(m)})_k + H(T^{-1} Y^{(m)}, v_0^{(m)})_k + H(T^{-1} Y^{(m)})_k] \\ - 2\varepsilon\, v_e^{1/2} \Pi_m [H(T^{-1} D^{(m)}, v_0^{(m)})_k + H(T^{-1} D^{(m)})_k] + G_k^{(m)}(t), \quad k \in Z_0, \quad |k| \leqslant m, k \neq 0 . \end{gathered} \tag{51}$$

Заметим, что $T_k^{-1}D_k^{(m)}|_{t=0} = 0$, $T_k^{-1}Y_k^{(m)}|_{t=0} = 0$. В силу Лемм 3-5 и приводимой ниже Леммы 6 получим

$$\|\varepsilon\, B_*(Y^{(m)},Y^{(m)})_k\|^2_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}(R_+)} \leqslant$$

$$\leqslant\ \varepsilon\ c_1^4 \sum_{k_1+k_2=k,|k_1|,|k_2|,|k|\leqslant m,k_1,k_2,k\neq 0} \|Y_{k_1}^{(m)}\|^2_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}(R_+)}\ \times$$

$$\times\ \left(\|Y_{k_2}^{(m)}\|^2_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}(R_+)} + |\xi_{k_2}^{(m)}|^2 + |\eta_{k_2}^{(m)}|^2\right).$$

Лемма 6. *Аналитические в полуплоскости* $\Re p > \gamma; 0 > \gamma > -\mu\varepsilon$ *функции* $\dfrac{pQ}{\Sigma}\cdot\dfrac{1}{p\pm ik}$, $\dfrac{pQ}{\Sigma}\cdot\dfrac{k}{p(p\pm ik)}$, $Q = p^2+k^2$, *ограничены, т.е. существует* $c_0 > 0$ *такое, что*

$$\left|\frac{pQ}{\Sigma}\cdot\frac{1}{p\pm ik}\right| \leqslant c_0\,, \quad \left|\frac{pQ}{\Sigma}\cdot\frac{k}{p(p\pm ik)}\right| \leqslant c_0\,, \quad \forall\, p\in C,\ \Re p>\gamma\,, \quad 0>\gamma>-\mu\varepsilon\,.$$

□ Действительно, во-первых

$$\left|\frac{pQ}{\Sigma}\cdot\frac{1}{p\pm ik}\right| \leqslant c_0\frac{1}{|p\pm ik|}\,, \qquad |p\pm ik| > \frac{1}{2}\,.$$

$$\left|\frac{pQ}{\Sigma}\cdot\frac{k}{p(p\pm ik)}\right| \leqslant c_0\frac{1}{|p|}\cdot\frac{k}{|p\pm ik|}\,, \qquad |p\pm ik| > \frac{1}{2}\,, \quad |p| > \frac{1}{2}\,.$$

Далее, в окрестности $|p| \leqslant 1/2$ имеем

$$\left|\frac{pQ}{\Sigma}\cdot\frac{k}{p(p\pm ik)}\right| = \left|\frac{Q}{\Sigma}\right|\cdot\left|\frac{k}{(p\pm ik)}\right| \leqslant c_1\,,$$

и в окрестности $|p\pm ik| \leqslant \frac{1}{2}$ имеем

$$|\frac{pQ}{\Sigma}\cdot\frac{k}{p(p\pm ik)}| \leqslant \frac{k|p-(\pm ik)|}{|\Sigma|} \leqslant c_2\,.$$

Точно также

$$\left|\frac{pQ}{\Sigma}\cdot\frac{1}{\pm ik}\right| \leqslant \frac{|p||p-(\pm ik)|}{|\Sigma|} \leqslant c_3\,. \quad \blacksquare$$

Из доказанного утверждения следует, что указанные функции интегрируемы с квадратом

$$\sup_{\gamma_1\geqslant\gamma}\int_{\Re p=\gamma_1}\left(\left|\frac{pQ}{\Sigma}\cdot\frac{1}{p\pm ik}\right|^2 + \left|\frac{pQ}{\Sigma}\cdot\frac{k}{p(p\pm ik)}\right|^2\right)dp < \infty\,.$$

Лемма 7. *Из приведенных выше оценок частей билинейного оператора $B^*(Y^{(m)}, Y^{(m)})$ следует равномерная по k априорная оценка*

$$\varepsilon^2 \|B^*(Y^{(m)}, Y^{(m)})_k\|^2_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}} \leqslant \tag{52}$$

$$\leqslant \varepsilon c_B^2 \sum_{k_1+k_2=k,\ 0<|k_1|,|k_2|,|k|\leqslant m} [\|Y^{(m)}_{k_1}\|^2_{L_{2,\gamma}(R_+)} + |\xi^{(m)}_{k_1}|^2 + |\eta^{(m)}_{k_1}|^2][\|Y^{(m)}_{k_2}\|^2_{L_{2,\gamma}(R_+)} + |\xi^{(m)}_{k_2}|^2 + |\eta^{(m)}_{k_2}|^2]$$

для любой $Y^{(m)} \in L_{2,\gamma;\ 0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}$.

Более того, справедлива априорная оценка вида

$$\varepsilon^2 \|B^*(D^{(m)}, D^{(m)})_k\|^2_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}} \leqslant \varepsilon c_B^2 \sum_{k_1+k_2=k,\ 0<|k_1|,|k_2|,|k|\leqslant m} [|\xi^{(m)}_{k_1}|^2 + |\eta^{(m)}_{k_1}|^2]\ [|\xi^{(m)}_{k_2}|^2 + |\eta^{(m)}_{k_2}|^2] \tag{53}$$

для любых $\Xi^{(m)}, \Upsilon^{(m)} \in C^m$.

6. Нулевая мода

Теперь посмотрим как влияет билинейный оператор

$$\Pi_m\left(B(\Pi_m(v^{(m)}), \Pi_m(v^{(m)}))\right)_0 = \sum_{k_1+k_2=0,|k_1|\leqslant m,k_1\neq 0} \Bigg[v_{k_1} v_{k_2} -$$

$$- \frac{1}{4}\left(v^{(m)}_{k_1} - ik_1 \int_0^t e^{-ik_1(t-s)} v^{(m)}_{k_1} ds\right)\left(v^{(m)}_{k_2} + ik_2 \int_0^t e^{ik_2(t-s)} v^{(m)}_{k_1} ds\right)\Bigg]$$

на нулевую моду. При условиях на начальные данные (12) и (62), которое мы рассмотрим ниже, когда $H(v)_0 = d_0 = 0$, уравнение для нулевой моды принимает наиболее простой вид

$$\frac{d}{dt} v_0 + \frac{1}{\varepsilon} L_e v_0 = -\frac{3}{2}\varepsilon\, v_e^{1/2} v_0^2 - 2\varepsilon\, v_e^{1/2} B(v,v)_0\,, \qquad v_0|_{t=0} = v_0^0\,, \tag{54}$$

Для $v = v^0 \exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t (L_e + 3\varepsilon^2 v_e^{1/2} v_0^{(m)} ds\right\} dt + y^{(m)},\ \ y^{(m)}|_{t=0} = 0$, положим

$$G_0^{(m)} = B\Bigg(v^0 \exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t (L_e + 3\varepsilon^2 v_e^{1/2} v_0^{(m)}) ds\right\} dt, v^0 \exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t (L_e + 3\varepsilon^2 v_e^{1/2} v_0^{(m)}) ds\right\} dt\Bigg)_0,$$

$$H(y^{(m)}, v_0^{(m)}) = B\Bigg(v^0 \exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t (L_e + 3\varepsilon^2 v_e^{1/2} v_0^{(m)}) ds\right\}, y^{(m)}\Bigg) +$$

$$+ B\Bigg(y^{(m)}, v^0 \exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t (L_e + 3\varepsilon^2 v_e^{1/2} v_0^{(m)}) ds\right\}\Bigg).$$

Далее, полагая, так же как и выше $y^{(m)} = T_k^{-1}Y^{(m)} + T_k^{-1}Y^{(m)}$, получим

$$\Pi_m\Big(B(\Pi_m(y^{(m)}), \Pi_m(y^{(m)})\Big)_0 =$$

$$= \sum_{k_1+k_2=0,\ |k_1|\leqslant m, k_1\neq 0} \Big((T_{k_1}^{-1}Y_{k_1}^{(m)} + T_{k_1}^{-1}D_{k_1}^{(m)})(T_{k_2}^{-1}Y_{k_2}^{(m)} + T_{k_2}^{-1}D_{k_2}^{(m)}) -$$

$$-\frac{1}{4}\left(T_{k_1}^{-1}Y_{k_1}^{(m)} + T_{k_1}^{-1}D_{k_1}^{(m)} + ik_1\int_0^t e^{-ik_1(t-s)}(T_{k_1}^{-1}Y_{k_1}^{(m)} + T_{k_1}^{-1}D_{k_1}^{(m)})ds\right) \times$$

$$\times \left(T_{k_2}^{-1}Y_{k_2}^{(m)} + T_{k_2}^{-1}D_{k_2}^{(m)} + ik_2\int_0^t e^{-ik_2(t-s)}(T_{k_2}^{-1}Y_{k_2}^{(m)} + T_{k_2}^{-1}D_{k_2}^{(m)})ds\right).$$

Суммируя, изложенное выше, мы можем разложить компоненты билинейного оператора, выделив осциллирующую часть. Тогда B_0^* часть оператора B, которая переводит

$$B^*(Y^{(m)}, Y^{(m)})_0 :\ (L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}(R_+))^2 \ \mapsto\ L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}(R_+)\,,$$

по следующему правилу

$$B^*(Y^{(m)}, Y^{(m)})_0 = B(T^{-1}Y^{(m)}, T^{-1}Y^{(m)})_0 + B(T^{-1}D^{(m)}, T^{-1}Y^{(m)})_0 + B(T^{-1}Y^{(m)}, T^{-1}D^{(m)})_0\,.$$

Далее,

$$B^*(D^{(m)}, D^{(m)})_0 = B(T^{-1}D^{(m)}, T^{-1}D^{(m)})_0 - a_0^{(m)}(t) \in L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}\,,$$

$$a_0^{(m)}(t) = \frac{\varepsilon^2}{u_e w_e} \sum_{k_1+k_2=0,\ |k_1|,|k_2|,|k|\leqslant m} \eta_{s_1}^{(m)}\xi_{s_2}^{(m)}\ e^{i(k_2-k_1)t}\,.$$

Следовательно, несуммируемый в L_2 вклад осцилляций определяется функцией $a_0^{(m)}$. Функция $a^{(m)} \in C_B^1(R_+)$ меняет предельную константу на плюс бесконечности для стандартного уравнения

$$\frac{d}{dt}\,v_{\rm stn} + \frac{1}{\varepsilon}\,L_e v_{\rm stn} = -3v_e^{1/2}\varepsilon\,v_{stn}^2 - 2v_e^{1/2}\varepsilon\,a_0^{(m)}\,, \tag{55}$$

$$v_{\rm stn}(0) = v_0^0\,. \tag{56}$$

При этом нулевая мода

$$v_0^{(m)}(t) = v_{\rm stn}^{(m)}(t) + \varepsilon\,\widehat{v_0^{(m)}}(t),\quad \widehat{v_0^{(m)}}(t) \in\ L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}(R_+)\,.$$

Мы потребуем, чтобы $a^{(m)}(t) \in C_B^1(R_+)$ была гладкой ограниченной функцией. Тогда стандартное уравнений имеет глобальное решение

$$v_{\rm stn}^{(m)}(t) = v_+^{(m)}(t) - \Big((3v_e^{1/2}\varepsilon^2)^{-1}\,L_e + 2v_+^{(m)}(t)\Big) \times$$

$$\times\left(1+\exp\left\{3v_e^{1/2}\varepsilon\int_0^t\big((3v_e^{1/2}\varepsilon^2)^{-1}L_e+2v_+^{(m)}(t)\big)ds+\tau\right\}+z^{(m)}(t)\right)^{-1},\ \tau\in R$$

такое, что $\sup\limits_{t\geqslant 0} e^t|v_{\text{stn}}^{(m)}(t)|\leqslant C_0$, стабилизирующееся при $t\to+\infty$ к функции $v_+^{(m)}(t)$, $z^{(m)}(t)\in L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}$. Параметр τ находим из условия

$$v_+^{(m)}(0)-\Big((3v_e^{1/2}\varepsilon^2)^{-1}L_e+2v_+^{(m)}(0)\Big)\Big(1+e^{\tau}\Big)^{-1}=v_0^0\,.$$

Здесь $y=v_{\text{stn}}^{(m)}(t)-v_+^{(m)}(t)$ решение уравнения

$$Ly=\frac{d}{dt}y+\frac{1}{\varepsilon}L_ey-3v_e^{1/2}\varepsilon\, y(y-2v_+^{(m)}(t))=0\,.$$

Если

$$y=-\Big((3v_e^{1/2}\varepsilon^2)^{-1}L_e+2v_+^{(m)}(t)\Big)\left(1+\exp\left\{3v_e^{1/2}\varepsilon\int_0^t\big((3v_e^{1/2}\varepsilon^2)^{-1}L_e+2v_+^{(m)}(t)\big)ds+\tau\right\}\right)^{-1},$$

то

$$Ly=-2\frac{d}{dt}v_+^{(m)}(t)\left(1+\exp\left\{3v_e^{1/2}\varepsilon\int_0^t\big((3v_e^{1/2}\varepsilon^2)^{-1}L_e+2v_+^{(m)}(t)\big)ds+\tau\right\}\right)^{-1}\in L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}$$

при условии

$$(3v_e^{1/2}\varepsilon^2)^{-1}L_e-2\sup_{t>0}|v_+^{(m)}(t)|>\mu_0\varepsilon\,.$$

Невязку $z^{(m)}(t)\in L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}$,

$$Lz^{(m)}=-2\frac{d}{dt}v_+^{(m)}(t)\left(1+\exp\left\{3v_e^{1/2}\varepsilon\int_0^t\big((3v_e^{1/2}\varepsilon^2)^{-1}L_e+2v_+^{(m)}(t)\big)ds+\tau\right\}\right)^{-1}\in L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}$$

будем искать, так же как во введении.

Частное решение $v_+^{(m)}(t)$ будем искать как решение задачи

$$\frac{d}{dt}v_+^{(m)}(t)+\frac{1}{\varepsilon}L_ev_+^{(m)}(t)-3v_e^{1/2}\varepsilon\,(v_+^{(m)})^2(t)+2v_e^{1/2}\varepsilon\,a_0^{(m)}=O(m^{-1})\,. \tag{57}$$

Для $a_0^{(m)}(t)=\sum_{|k|\leqslant 2m,\ k\neq 0}h_ke^{ikt}$, $|h_k|\leqslant|k|^{-1-\sigma}$, $\sigma>1$, решение будем искать в виде $v_+^{(m)}(t)=\sum_{|k|\leqslant m,\ k\neq 0}c_ke^{ikt}$. Тогда

$$c_k=-\frac{3v_e^{1/2}\varepsilon\sum\limits_{k_1+k_2=k}c_{k_1}c_{k_2}}{ik+\dfrac{1}{\varepsilon}L_e}+\frac{h_k}{ik+\dfrac{1}{\varepsilon}L_e}\,. \tag{58}$$

Положим $A=\sum_k|k|^{\sigma}|h_k|$. Разрешимость системы (58) есть следствие утверждения:

Лемма 8. *Пусть* $A = \sum_{k,\ |k|\geqslant 1} |k|^\sigma |h_k| < \infty$, $h_k \in C$, *для некоторого* $\sigma > 1$ *и для семейства билинейных квадратичных форм* $B_m(u,u)$ *равномерно по* m *справедлива оценка* $|B_m(c,c)_k| \leqslant \sum_{k_1+k_2=k} |c_{k_1}||c_{k_2}|$. *Тогда для любого* $m \geqslant 1$ *система билинейных уравнений*

$$c_k = \varepsilon(h_k + B(c,c)_k)\,, \qquad k = 1,\ldots,m, \tag{59}$$

имеет решение $(c_1,\ldots,c_m) \in C^m$, *для которого равномерно по* m *и* k *справедлива оценка*

$$|c_k| \leqslant \varepsilon\left(|h_k| + \frac{A}{|k|^\sigma}\right)\,, \qquad k = 1,\ldots,m\,, \tag{60}$$

если

$$\varepsilon^2 8cA \leqslant 1\,, \qquad c = \sum_{k\in Z_0} \frac{1}{|k|^\sigma}\,.$$

□ Фиксируем m. Тогда для приближений $(c_1^{(j)},\ldots,c_m^{(j)}) \in C^m$:

$$c_k^{(j)} = \varepsilon[h_k + B(c^{(j-1)},c^{(j-1)})_k]\,, \qquad k = 1,\ldots,m\,,$$

$c_k^{(0)} = 0$, $k = 1,\ldots,m$, справедлива оценка (60), поскольку в силу индукции

$$|c_k^{(j)}| \leqslant \varepsilon\Bigg(|h_k| + \frac{\varepsilon^2}{|k|^\sigma}\sum_{k_1+k_2=k}\Big[\big(|k_1|^\sigma|h_{k_1}| + A\big)\Big(|h_{k_2}| + \frac{A}{|k_2|^\sigma}\Big) +$$

$$+ \ \big(|k_2|^\sigma|h_{k_2}| + A\big)\Big(|h_{k_1}| + \frac{A}{|k_1|^\sigma}\Big)\Big]\Bigg) \leqslant$$

$$\leqslant \ \varepsilon\left(|h_k| + \varepsilon^2\frac{8cA^2}{|k|^\sigma}\right) \leqslant \ \varepsilon\left(|h_k| + \frac{A}{|k|^\sigma}\right)\,,$$

если $\varepsilon^2 8cA \leqslant 1$. ■

Из ограниченности приближений следует существование решения $(c_1,\ldots,c_m) \in C^m$ системы (59), для которого справедлива оценка (60).

Замечание. Для оценки $|kc_k|$, $k \in Z_0$, умножим (60) на $|k|$. Тогда

$$|kc_k| \leqslant \varepsilon\Big(|kh_k| + |k|\sum_{k_1+k_2=k}|c_{k_1}||c_{k_2}|\Big) \leqslant \varepsilon\Big(|kh_k| + \sum_{k_1+k_2=k}|k_1c_{k_1}||c_{k_2}| + \sum_{k_1+k_2=k}|c_{k_1}||k_2c_{k_2}|\Big) \leqslant$$

$$\leqslant \ \varepsilon\Big(|kh_k| + 2\sum_{k_1+k_2=k}|k_1c_{k_1}||k_2c_{k_2}|\Big)\,.$$

Следовательно,

$$|kc_k| \leqslant \varepsilon\Big(|kh_k| + \frac{A_1}{|k|^\sigma}\Big), \qquad A_1 = \sum_k |k|^{1+\sigma}|h_k| < \infty\,,$$

если

$$16\varepsilon^2 c A_1 \leqslant 1\,.$$

Для функции $v_+^{(m)}(t) = \sum_{|k|\leqslant m,\ k\neq 0} c_k e^{ikt}$ имеем

$$\frac{d}{dt}v_+^{(m)}(t) + \frac{1}{\varepsilon}L_e v_+^{(m)}(t) + 3v_e^{1/2}\varepsilon\,(v_+^{(m)})^2(t) + 2v_e^{1/2}\varepsilon\, a_0^{(m)} =$$

$$= 2v_e^{1/2}\varepsilon \sum_{m<|k|\leqslant 2m,\ k\neq 0} h_k e^{ikt} + 3v_e^{1/2}\varepsilon\Big[\Big(\sum_{|k|\leqslant m,\ k\neq 0} c_k e^{ikt}\Big)^2 -$$

$$- \sum_{k_1+k_2=k,\ |k_1|,|k_2|,|k|\leqslant m} c_{k_1}c_{k_2}e^{ikt}\Big] = O(m^{-1})\,.$$

В зависимости от знака $a_0^{(m)}$ нулевая мода либо проскакивает состояние равновесия либо не доходит до него. Решение стремится к нулю экспоненциально только при условии $a^{(m)} = 0$. В случае $a^{(m)} \neq 0$ мы имеем только устойчивость по Ляпунову в окрестности состояния равновесия.

В переменных $Y^{(m)}, D^{(m)}$ уравнение для нулевой моды

$$\frac{d}{dt}v_0^{(m)} + \frac{1}{\varepsilon}\left(L_e - \frac{3}{2}\varepsilon^2 v_e^{1/2} v_0^{(m)}\right) v_0^{(m)} + 2\varepsilon v_e^{1/2} a_0^{(m)} = \tag{61}$$

$$= G_0^{(m)} - 2\varepsilon\, v_e^{1/2} H(T^{-1}Y^{(m)}, v_0^{(m)})_0 - 2\varepsilon\, v_e^{1/2} B^*(Y^{(m)}, Y^{(m)})_0\,,$$

$$G_0^{(m)} = -2v_e^{1/2}\varepsilon\,\Big[B\Big(v^0 \exp\Big\{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t (L_e + 3v^{1/2}\varepsilon^2 v_0^{(m)})ds\Big\},$$

$$v^0 \exp\Big\{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t (L_e + 3v^{1/2}\varepsilon^2 v_0^{(m)})ds\Big\}\Big)_0 + B^*(D^{(m)}, D^{(m)})_0 + H(T^{-1}D^{(m)}, v_0^{(m)})_0\Big]\,.$$

7. Условия несекулярности

Как видно здесь за счет взаимодействия появляется члены с $e^{i(k_2-k_1)t}$. Образ Лапласа решения с такой правой частью не будет аналитичен в полуплоскости $\Re p > -\mu\varepsilon$. Появляются полюса в точках $p = i(k_2 - k_1)$. Мы должны потребовать выполнения дополнительного условия на начальные данные мод любого порядка:

$$d_{k_1,k_2} = \frac{1}{2}\left(2w_{k_2}^0 \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} + v_{k_2}^0\right)\left(2u_{k_1}^0 \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} + v_{k_1}^0\right) = 0\,,$$

$$d_k^- = w_e^{1/2}(2u_e^{1/2}u_k^0 + v_e^{1/2}v_k^0) = d_k^+ = u_e^{1/2}(2w_e^{1/2}w_k^0 + v_e^{1/2}v_k^0) = 0\,,$$

т.е. потребуем, чтобы

$$w_e^{1/2}(2u_e^{1/2}u_k^0 + v_e^{1/2}v_k^0) = u_e^{1/2}(2w_e^{1/2}w_k^0 + v_e^{1/2}v_k^0) = 0\,, \qquad k \in Z_0\,. \tag{62}$$

Тогда

$$b_{k_1,k_2} = -\frac{1}{2}(ik_1v^0_{k_1})(ik_2v^0_{k_2})\Big(\int_0^\infty e^{ik_1t}\exp\Big\{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t(L_e+3v^{1/2}\varepsilon^2v_0^{(m)})ds\Big\}dt\Big)\times$$
$$\times\Big(\int_0^\infty e^{-ik_2t}\exp\Big\{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t(L_e+3v^{1/2}\varepsilon^2v_0^{(m)})ds\Big\}dt\Big),$$

и оставшиеся секулярные члены имеют вид

$$\varepsilon\, v_e^{1/2}\Big(ikv_0^{(m)}v_k^0\,[c_k^+(v_0^{(m)})e^{ikt}+c_k^-(v_0^{(m)})e^{-ikt}]-\sum_{k_1+k_2=k}e^{i(k_2-k_1)t}(b_{k_1,k_2}(t)+\frac{\varepsilon^2}{u_ew_e}\,\xi_{k_2}^{(m)}\eta_{k_1}^{(m)})\Big).$$

Замечание. Положим $Q_m=\{(k_1,k_2);k_1,k_2\in Z_0,|k_1|,|k_2|\leqslant m,\ |k_1-k_2|>m\}$. Отметим, что случай $|k_1-k_2|>2m$ невозможен для $k_1,k_2,|k_1|,|k_2|\leqslant m$ Действительно, пусть для определенности $k_1>0$. Тогда $-k_2>m$. Таким образом, в секулярных условиях мы исключили все возможные пары из Q_m.

Также как при исследовании нулевой моды разобьем осцилляции на две группы. Учитывая, что $v_0^{(m)}$ по построению есть линейная комбинация экспонент $\sum_{|k|\leqslant m,k\neq 0}c_ke^{ikt}$, положим

$$ik\varepsilon\, v_0^{(m)}v_k^0\,[c_k^+(v_0^{(m)})e^{ikt}+c_k^-(v_0^{(m)})e^{-ikt}]-\sum_{k_1+k_2=k}e^{i(k_2-k_1)t}\Big(b_{k_1,k_2}(t)+\frac{\varepsilon^2}{u_ew_e}\,\xi_{k_2}^{(m)}\eta_{k_1}^{(m)}\Big)=$$
$$=S^{(m)}+S_1^{(m)},$$

где

$$S^{(m)}(t)=\sum_{|k|\leqslant m}s_k^{(m)}e^{ikt},\qquad S_1^{(m)}(t)=\sum_{|k|>m}s_k^{(m)}e^{ikt}.$$

Имеем

$$s_k^{(m)}=\sum_{q_1+q_2=k,\ \ |q_1|\leqslant m,0<q_2\leqslant m,q_1\neq 0}iq_2c_{q_1}v^0_{q_2}c^+_{q_2}(v_0^{(m)})+\sum_{q_1+q_2=k,\ \ |q_1|\leqslant m,0>q_2\geqslant -m,q_1\neq 0}c_{q_1}c^-_{q_2}(v_0^{(m)})-$$
$$-\sum_{q_1+q_2=k,\ \ |q_1|,|q_2|\leqslant m,q_1,q_2\neq 0}\Big(b_{q_1,q_2}+\frac{\varepsilon^2}{u_ew_e}\,\xi_{q_2}^{(m)}\eta_{q_1}^{(m)}\Big),\qquad |k|\leqslant m,k\neq 0.$$

Нетрудно проверить, что равномерно $|k|^\sigma\ |s_{1,k}^{(m)}|=O(m^{-1})$ и поэтому, также как при исследовании уравнения Риккати (нулевой моды), мы эти члены отбросим. Они будут не существенны при обосновании схемы Галеркина.

Оставшиеся секулярные члены $s_k^{(m)}e^{ikt}$, $|k|\leqslant m$, $k\neq 0$ приводят к нелинейной системе для коэффициентов $\xi_k^{(m)},\eta_k^{(m)}$. Для коэффициентов $s_k^{(m)}$ потребуем выполнения следующего условия.

Условие несекулярности. Потребуем, чтобы для любых $k \in Z_0$, $|k| \leqslant m$, $k \neq 0$ были выполнены соотношения

$$\xi_k^{(m)} + 2\varepsilon\, v_e^{1/2} \left(s_k^{(m)} + \frac{\varepsilon^2}{u_e w_e} \kappa_k^{(m)} \right) = 0\,, \qquad 0 < k \leqslant m\,, \tag{63}$$

$$\eta_k^{(m)} + 2\varepsilon\, v_e^{1/2} \left(s_k^{(m)} + \frac{\varepsilon^2}{u_e w_e} \kappa_k^{(m)} \right) = 0\,, \quad -m \leqslant\ k < 0\,.$$

где

$$\kappa_k^{(m)} = \sum_{q_1+q_2=k,\quad |q_1|,|q_2| \leqslant m, q_1,q_2 \neq 0} \xi_{q_2}^{(m)} \eta_{q_1}^{(m)}\,.$$

Существование решения системы для достаточно малой нормы $\|v_0\|_{H^\sigma(0,2\pi)}$ следует из Леммы 9, приведенной выше.

В дальнейшем, мы потребуем выполнение условий несекулярности (63) и условий (12), (62).

Остается вопрос, что будет в случае, когда для старших мод это условие не выполнено? Можно ли получить пусть слабое, но глобальное решение?

Заметим, что

$$ikc_k^{\pm}(v_0^{(m)}) = \pm ik \int_0^\infty e^{\mp iks} e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t (L_e + 3v^{1/2}\varepsilon^2 v_0^{(m)})ds} dt\ =$$

$$=\ 1 - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\infty (L_e + 3v^{1/2}\varepsilon^2 v_0^{(m)}) e^{\mp iks} \exp\left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (L_e + 3v^{1/2}\varepsilon^2 v_0^{(m)})ds \right\} dt\,.$$

Отсюда следует равномерная по k ограниченность

$$|ikv_0^{(m)} c_k^{\pm}(v_0^{(m)}))| \leqslant \max\left\{ 1, \frac{\sup_{t\geqslant 0} |v_0^{(m)}|\,(L_e + 3v^{1/2}\varepsilon^2 |v_0^{(m)}|)}{\inf_{t\geqslant 0}(L_e - 3v^{1/2}\varepsilon^2 |v_0^{(m)}|)} \right\}\,.$$

Точно также для

$$j_k = -2v_e^{1/2} \sum_{q_1+q_2=k, |q_1|,|q_2| \leqslant m, q_1,q_2 \neq 0} b_{q_1,q_2} =$$

$$= v_e^{1/2} \sum_{q_1+q_2=k,\quad |q_1|,|q_2| \leqslant m, q_1,q_2 \neq 0} (iq_1 v_{q_1}^0)(iq_2 v_{q_2}^0) \int_0^\infty e^{iq_1 t} \exp\left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (L_e + 3v^{1/2}\varepsilon^2 v_0^{(m)})ds \right\} dt\ \times$$

$$\times \int_0^\infty e^{-iq_2 t} \exp\left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (L_e + 3v^{1/2}\varepsilon^2 v_0^{(m)})ds \right\} dt\,;$$

для $\sigma \geqslant 1$ имеем

$$|j_k| \leqslant v_e^{1/2} \frac{1}{|k|^\sigma} \sum_{q_1+q_2=k,\quad |q_1|,|q_2| \leqslant m, q_1,q_2 \neq 0} \Big\{ |q_1|^{1+\sigma} |v_{q_1}^0|\ \times$$

$$\times\left|\int_0^\infty e^{iq_1t}\exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t(L_e+3v^{1/2}\varepsilon^2v_0^{(m)})ds\right\}dt\right|\times$$

$$\times\left|q_2v^0_{q_2}\int_0^\infty e^{-iq_2t}\exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t(L_e+3v^{1/2}\varepsilon^2v_0^{(m)})ds\right\}dt\right|+$$

$$+|q_2|^{1+\sigma}|v^0_{q_2}|\left|\int_0^\infty e^{iq_2t}\exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t(L_e+3v^{1/2}\varepsilon^2v_0^{(m)})ds\right\}dt\right|\times$$

$$\times\left|q_1v^0_{q_1}\int_0^\infty e^{-iq_1t}\exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t(L_e+3v^{1/2}\varepsilon^2v_0^{(m)})ds\right\}dt\right|\right\}\leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon\, v_e^{1/2}\frac{1}{|k|^\sigma}\max\left\{1,\ \frac{\sup_{t\geqslant0}(L_e+3v^{1/2}\varepsilon^2|v_0^{(m)}|)}{(\inf_{t\geqslant0}(L_e-3v^{1/2}\varepsilon^2|v_0^{(m)}|))^2}\right\}\left(\sum_{|q|\geqslant1}|q|^\sigma|v^0_q|\right)^2.$$

При выполнении условия достаточной малости нормы $\|v^0\|_{H^\sigma}$ равномерно по m однозначно разрешима система для определения двух векторов коэффициентов осцилляций

$$\xi^{(m)}=(\xi_1^{(m)},\dots,\xi_m^{(m)}),\qquad \eta^{(m)}=(\eta_1^{(m)},\dots,\eta_m^{(m)})$$

так, что для решения системы (45) справедливо разложение по гладкости

$$y_k^{(m)}(t)=\xi_m^{(m)}D_k^++\eta_k^{(m)}D_k^-+Y_k^{(m)}(t)\,,\qquad D_k^\pm=T_k^{-1}(e^{\pm ik}),\ |k|\leqslant\ m\,,\qquad k\neq0\,,$$

где $Y_k^{(m)}(t)\in L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)$, и проблема существования глобального решения задачи (61), (51) сводится к проблеме для возмущения оператора $\mathcal{A}=I+\varepsilon\,A(Y^{(m)})$ билинейным оператором с малой нормой

$$\mathcal{A}(Y^{(m)})-\varepsilon\mathcal{B}(Y^{(m)},Y^{(m)}):\quad\Big(L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)\Big)^2\ \mapsto\ L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)\,,\tag{64}$$

$$A(Y^{(m)})_k=3v^{1/2}v_0^{(m)}T_k^{-1}Y_k^{(m)}+v_e^{1/2}v_0^{(m)}A_k^{(1)}T_k^{-1}Y_k^{(m)}\,,$$
$$\mathcal{B}(Y^{(m)},Y^{(m)})_k=v_e^{1/2}B_*(Y^{(m)}\,,\qquad Y^{(m)})_k,\ \ k\in Z_0,\ |k|\leqslant m$$

о существовании решения в пространстве $L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}(R_+)$ неоднородного уравнения

$$\mathcal{A}(Y^{(m)})-\varepsilon\,\mathcal{B}(Y^{(m)},Y^{(m)})=G^{(m)}\,.\tag{65}$$

Предложение 2. *Пусть $v^0\in H^\sigma$, $\sigma>1$, выполнены условия несекулярности и условие (12). Тогда существует число $c_0=c_0(\varepsilon)>0$, независящее от m такое, что, для достаточно малого $\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$, при условии $\|v^0\|_{H^\sigma}\leqslant c_0$ и для любого $m\in N$, существует* *решение $v = v^{(m)}(t)$ системы (25), (26), которое является глобальным по времени. Более того, равномерно справедлива оценка*

$$\|v_0^{(m)} - v_{stn}\|_{W^1_{2,\gamma' 0>\gamma>-\mu\varepsilon}(R_+)} \leqslant c_0|v_0^0|\,,$$

$$\|v_k^{(m)}(t) - D_k^{(m)}\|_{W^1_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu\varepsilon}(R_+;A)} \leqslant\ c_0\|v_k^0\|,\ \forall k\in Z_0\,,$$

$$|\xi_k^{(m)}| + |\eta_k^{(m)}| \leqslant c_0\frac{1}{|k|}|v_0^0|\left(|v_k^0| + \frac{1}{|k|^\sigma}A_v\right)\,,$$

где $A_v = \sum_{k\in Z_0}\ |k|^\sigma|v_k^0| < \infty\,.$

Замечание. Очевидно, что проведенные построения применимы к модификации (6). Но этот случай намного проще, поскольку здесь

$$a_0^{(m)} = \varepsilon^2\frac{1}{u_e^2w_e^2}\sum_{k_1+k_2=0,\quad k\in Z_0,\ |k|\leqslant m}[u_e^2\xi_{k_1}^{(m)}\xi_{k_2}^{(m)} + w_e^2\eta_{k_1}^{(m)}\eta_{k_2}^{(m)}]$$

есть константа и можем не приближенно, а точно решить уравнения для нулевой моды. В тоже время

$$a_k^{(m)} = \varepsilon^2\frac{1}{u_e^2w_e^2}\sum_{k_1+k_2=k, k\in Z_0,\ |k|\leqslant m}[u_e^2\xi_{k_1}^{(m)}\xi_{k_2}^{(m)}e^{ikt} + w_e^2\eta_{k_1}^{(m)}\eta_{k_2}^{(m)}e^{-ikt}]\,.$$

Это упрощает условие несекулярности и позволяет решить систему для k мод ($|k|\leqslant m, k\neq 0$) опять же не приближенно, а точно. Ниже, для простоты, мы приведем вспомогательную задачу (линейную относительно старших мод) для такого случая, когда $a_0^{(m)}$— константа.

8. Модельная задача (априорная оценка)

Сначала рассмотрим задачу, линейную относительно $Y^{(m)}$ (см. (44), (45)):

$$\frac{d}{dt}v_0^{(m)} + \frac{1}{\varepsilon}\left(L_e - \frac{3}{2}\varepsilon^2v_e^{1/2}v_0^{(m)}\right)v_0^{(m)} + 2\varepsilon v_e^{1/2}a_0^{(m)} = \tag{66}$$

$$= F_0 - 2\varepsilon\, v_e^{1/2}H(T^{-1}Y^{(m)}, v_0^{(m)})_0,$$

$F_0\in L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu_0\varepsilon}$, в случае, когда для простоты, $a_0^{(m)}$— константа.

$$Y_k^{(m)} + 3v^{1/2}\varepsilon\, v_0^{(m)}T_k^{-1}Y_k^{(m)} - v_e^{1/2}\varepsilon v_0^{(m)}A_k^{(1)}T_k^{-1}Y_k^{(m)} + 2\varepsilon\, v_e^{1/2}H(T^{-1}Y^{(m)}, v_0^{(m)})_k = \tag{67}$$

$$= -D_k^{(m)} - 3v^{1/2}\varepsilon\, v_0^{(m)}T_k^{-1}YD_k^{(m)} - v_e^{1/2}\varepsilon v_0^{(m)}A_k^{(1)}T_k^{-1}D_k^{(m)} + 2\varepsilon\, v_e^{1/2}H(T^{-1}D^{(m)}, v_0^{(m)})_k +$$

$$+\left(\frac{1}{\varepsilon}\,d_k^+ + ikv_e^{1/2}\varepsilon\, v_0^{(m)}v_k^0\ c_k^+(v_0^{(m)})\right)e^{ikt} + \left(\frac{1}{\varepsilon}\,d_k^- + ikv_k^0\ c_k^-(v_0^{(m)})\right)e^{-ikt}$$

$$-\varepsilon v_e^{1/2}\sum_{k_1+k_2=k,\quad |k_1|,|k_2|,\leqslant m, k_1,k_2\neq 0} e^{i(k_2-k_1)t}\left(d_{k_1,k_2} + b_{k_1,k_2} + \frac{\varepsilon^2}{u_ew_e}\ \xi_{k_2}^{(m)}\eta_{k_1}^{(m)}\right) + F_k(t)\,,$$

$$k \in Z_0\,, \qquad |k| \leqslant m, k \neq 0\,,$$

где

$$D_k^{(m)}(t) = \xi_k^{(m)} e^{ikt} + \eta_k^{(m)} e^{-ikt}\,,$$

$$b_{k_1,k_2} = -\frac{1}{2}(ik_1 v_{k_1}^0)(ik_2 v_{k_2}^0) \int_0^\infty e^{ik_1 s} e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t (L_e + 3v^{1/2}\varepsilon^2 v_0^{(m)})ds} dt \int_0^\infty e^{-ik_2 s} e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t (L_e + 3v^{1/2}\varepsilon^2 v_0^{(m)})ds} dt\,,$$

$$d_{k_1,k_2} = \frac{1}{2}\left(2w_{k_2}^0 \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} + v_{k_2}^0\right)\left(2u_{k_1}^0 \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} + v_{k_1}^0\right) = 0\,,$$

$$d_k^- = w_e^{1/2}(2u_e^{1/2}u_k^0 + v_e^{1/2}v_k^0) = d_k^+ = u_e^{1/2}(2w_e^{1/2}w_k^0 + v_e^{1/2}v_k^0) = 0\,,$$

$F_k \in L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu_0\varepsilon}$. Правая часть определилась разложением билинейного оператор $B(v,v)$. Здесь мы упростили задачу, положив что $a_0^{(m)}$ – константа.

Постоянная $a_0^{(m)}$ меняет предельную константу на плюс бесконечности для стандартного уравнения

$$\frac{d}{dt}v_{\rm stn} + \frac{1}{\varepsilon}\,(4v_e + u_e + w_e)v_{\rm stn} = -2v_e^{1/2}\varepsilon(v_{\rm stn}^2 - a_0^{(m)})\,, \tag{68}$$

$$v_{stn}(0) = v_0^0\,. \tag{69}$$

Как мы показали выше, в этом случае $v_0^{(m)}(t) = v_{\rm stn}(t) + \varepsilon\, z^{(m)}(t)$, где $z^{(m)} \in L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)$, $v_{\rm stn}(t)$– решение стандартного уравнения Риккати.

1. К уравнению (66) (когда $v_\infty^{(m)} = \text{const}$) применим результаты, проведенных выше исследований неоднородного уравнения Риккати, согласно которым существует глобальное решение $v_0^{(m)}(t)$, если

$$\frac{\varepsilon^2(1+3\varepsilon\, v_e^3 M_0)^4}{L^2}\left(1 + \frac{3\varepsilon\, v_e M_0}{L^2}\right)^2 \leqslant 1\,, \tag{70}$$

где в нашем случае

$$M_0 = \sup_{t\geqslant 0}|F_0 - 2\varepsilon\, v_e^{1/2} H(T^{-1}Y^{(m)}, v_0^{(m)})_0|\,.$$

Это решение $v_0^{(m)} = v_{\rm stn} + \varepsilon\, z(t)$ абсолютно непрерывно и $z(t)$ удовлетворяет следующей оценке

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|z(t)| \leqslant (1 + 3\varepsilon^3\, v_e M_0)^2\left(1 + \frac{3\varepsilon^3\, v_e M_0}{L^2}\right)\,. \tag{71}$$

Оценим M_0 в этом случае. Начнем с

$$|H(T^{-1}Y^{(m)}, v_0^{(m)}| \leqslant J_1 + J_2 + J_3\,,$$

где

$$J_1 = \sum_{k_1+k_2=0,\quad |k_1|\leqslant m, k_1\neq 0} 2v^0_{k_1} \exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t (L_e + 3\varepsilon^2 v_e^{1/2} v_0^{(m)})ds\right\} T^{-1}_{k_2} Y^{(m)}_{k_2},$$

$$J_2 = -\frac{1}{2}\sum_{k_1+k_2=0,\quad |k_1|\leqslant m, k_1\neq 0} v^0_{k_1}\left(e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t (L_e+3\varepsilon^2 v_e^{1/2} v_0^{(m)})ds} - ik_1\int_0^t e^{ik_1(t-s)} e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s (L_e+3\varepsilon^2 v_e^{1/2} d\tau} ds\right)\times$$

$$\times\left(T^{-1}_{k_2} Y^{(m)}_{k_2} + ik_2\int_0^t e^{-ik_2(t-s)} T^{-1}_{k_2} Y^{(m)}_{k_2} ds\right),$$

$$J_3 = -\frac{1}{2}\sum_{k_1+k_2=0,\quad |k_1|\leqslant m, k_1\neq 0} v^0_{k_2}\left(e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t (L_e+3\varepsilon^2 v_e^{1/2} v_0^{(m)})ds} + ik_2\int_0^t e^{-ik_2(t-s)} e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s (L_e+3\varepsilon^2 v_e^{1/2} d\tau} ds\right)\times$$

$$\times\left(T^{-1}_{k_1} Y^{(m)}_{k_1} - ik_1\int_0^t e^{ik_1(t-s)} T^{-1}_{k_1} Y^{(m)}_{k_1} ds\right).$$

Имеют место следующие неравенства:

$$\varepsilon\, |T^{-1} Y^{(m)}_k(t)| \leqslant \left|\int_0^t \frac{d}{ds} T^{-1} Y^{(m)}_k(s) ds\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{|\gamma|}}\left\|\frac{d}{dt} T^{-1} Y^{(m)}_k\right\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma-\mu\varepsilon}(R_+)} \leqslant$$

$$\leqslant c_0\sqrt{\varepsilon/\mu_0}\|Y^{(m)}_k\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma-\mu\varepsilon}(R_+)}.$$

Следовательно,

$$|J_1| \leqslant 2c_0\sqrt{\varepsilon/\mu_0} e^{-t\frac{1}{\varepsilon}\ \inf_{t\geqslant 0}\{L_e - 3\varepsilon^2 v_e^{1/2} |v_0^{(m)}|\}} \sum_{k_1+k_2=0,\quad |k_1|\leqslant m, k_1\neq 0} |v^0_{k_1}|\|Y^{(m)}_{k_2}\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma-\mu\varepsilon}(R_+)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4}{\sigma-1}\, c_0\,\sqrt{\varepsilon/\mu_0}\, e^{-t\frac{1}{\varepsilon}\ \inf_{t\geqslant 0}\{L_e - 3\varepsilon^2 v_e^{1/2} |v_0^{(m)}|\}}\left(\sum_{|k|\geqslant 1}|k|^\sigma |v^0_k|\right)\left(\sum_{1\leqslant|k|\leqslant m}\|Y^{(m)}_k\|^2_{L_{2,\gamma;0>\gamma-\mu\varepsilon}(R_+)}\right)^{1/2}.$$

Далее

$$\left|ik\int_0^t e^{-ik(t-s)} T^{-1}_k Y^{(m)}_k ds\right| = \left|e^{-ik(t-s)} T^{-1}_k Y^{(m)}_k(t) - \int_0^t e^{-ik(t-s)}\frac{d}{ds} T^{-1}_k Y^{(m)}_k s\right| \leqslant$$

$$\leqslant\ |T^{-1}_k Y^{(m)}_k(t)| + \frac{1}{\sqrt{|\gamma|}}\left\|\frac{d}{dt} T^{-1}_k Y^{(m)}_k\right\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu\varepsilon}(R_+)} \leqslant 2c_0\frac{1}{\sqrt{|\gamma|}}\|Y^{(m)}_k\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma-\mu\varepsilon}(R_+)}.$$

Отсюда следует

$$|\varepsilon\, J_2| \leqslant\ c_1\sqrt{\varepsilon/\mu_0}\, e^{-\frac{1}{\varepsilon}\ L_0 t}\left(\sum_{|k|\geqslant 1}|k|^\sigma |v^0_k|\right)\left(\sum_{1\leqslant|k|\leqslant m}\|Y^{(m)}_k\|^2_{L_{2,\gamma;0>\gamma-\mu\varepsilon}(R_+)}\right)^{1/2},$$

где $\inf_{t\geqslant 0}\{L_e - 3\varepsilon^2 v_e^{1/2}|v_0^{(m)}|\} >\ L_0 > 0$. Таким образом

$$\varepsilon\left|H(T^{-1}Y^{(m)}, v_0^{(m)})_0\right| \leqslant \sqrt{\varepsilon}\ c_2 e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_0 t}\left(\sum_{|k|\geqslant 1}|k|^\sigma |v^0_k|\right)\left(\sum_{1\leqslant|k|\leqslant m}\|Y^{(m)}_k\|^2_{L_{2,\gamma;0>\gamma-\mu\varepsilon}(R_+)}\right)^{1/2}.$$

В силу (70), (71),

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant\infty}|z^{(m)}(t)|\leqslant(1+3\varepsilon^3\,v_e M_0)^2\left(1+\frac{3\varepsilon^3\,v_e M_0}{L^2}\right),$$

где

$$M_0=\Big(\sum_{|k|\geqslant 1}|k|^\sigma|v_k^0|\Big)\Big(\sum_{1\leqslant|k|\leqslant m}\|Y_k^{(m)}\|^2_{L_{2,\gamma;0>\gamma-\mu\varepsilon}(R_+)}\Big)^{1/2}+\sup_{t\geqslant 0}|F_0(t)|,$$

если

$$\frac{\varepsilon^2(1+3\varepsilon\,v_e^3M_0)^4}{L^2}\left(1+\frac{3\varepsilon\,v_e M_0}{L^2}\right)^2\leqslant q<1\,. \tag{72}$$

Здесь

$$L_0>(L_e-3\varepsilon^2v_e^{1/2}|v_0^0|)-5\varepsilon^3v_e^{1/2}\max_{0\leqslant s\leqslant\infty}|z_0^{(m)})|\geqslant\frac{1}{2}\,L_e\,,$$

если

$$\varepsilon^3\max_{0\leqslant s\leqslant\infty}|z_0^{(m)}|\leqslant\frac{1}{10v_e^{1/2}}\,(L_e-10\varepsilon^2v_e^{1/2}|v_0^0|)\,.$$

Достаточно, чтобы

$$\varepsilon^3(1+3\varepsilon^3\,v_e M_0)^2\left(1+\frac{3\varepsilon^3\,v_e M_0}{L^2}\right)\leqslant\frac{\varepsilon^3}{L_e^2}[\max((L_e^2,1)+12\varepsilon^3\,v_e M_0]^3\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{10v_e^{1/2}}\,(L_e-10\varepsilon^2v_e^{1/2}|v_0^0|)$$

или

$$L_e-10\varepsilon^2v_e^{1/2}|v_0^0|>0\,,\qquad\varepsilon\,\max\{L_e^2,1\}\leqslant\frac{1}{2(10)^{1/3}v_e^{1/6}}\,, \tag{73}$$

$$\varepsilon^4M_0\leqslant\frac{1}{24(10)^{1/3}v_e^{7/6}}\,L_e\,.$$

Точно также получим, что

$$\frac{\varepsilon^2(1+3\varepsilon\,v_e^3M_0)^4}{L^2}\left(1+\frac{3\varepsilon\,v_e M_0}{L^2}\right)^2\leqslant\frac{4\varepsilon^2}{L_e^6}[\max\{L_e^2,1\}+12\varepsilon\,v_e^3M_0]^6\leqslant q\,,$$

если

$$\varepsilon^{4/3}M_0\leqslant\frac{1}{12v_e^3}\left[\left(\frac{q}{4}\right)^{1/6}L_e-\varepsilon^{1/3}\max\{L_e^2,1\}\right]\,.$$

Выберем ε так, чтобы выполнены неравенства (73) и

$$\varepsilon^{1/3}\max\{L_e^2,1\}\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{q}{4}\right)^{1/6}L_e\,.$$

Тогда условие разрешимости (72) выполнено, если

$$\varepsilon^{4/3} M_0 \leqslant \min\left\{\frac{1}{24(10)^{1/3} v_e^{7/6}}, \frac{1}{24 v_e^3}\left(\frac{q}{4}\right)^{1/6}\right\} L_e .$$

Таким образом, условие разрешимости (72) выполнено, если

$$\varepsilon^{5/6}\left(\left(\sum_{|k|\geqslant 1}|k|^{\sigma}|v_k^0|\right)\left(\sum_{1\leqslant|k|\leqslant m}\|Y_k^{(m)}\|^2_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu\varepsilon}(R_+)}\right)^{1/2} + \sup_{t\geqslant 0}|F_0(t)|\right) \leqslant \tag{74}$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\min\left\{\frac{1}{24(10)^{1/3} v_e^{7/6}}\ \frac{1}{24 v_e^3}\ \left(\frac{q}{4}\right)^{1/6}\right\} \frac{L_e}{\max\left\{16\left(\frac{\varepsilon}{|\gamma|}\right)^{1/2},\ 2\varepsilon^{1/2}\left(\frac{7}{3}\right)^2\right\}\sqrt{2}},$$

$$\varepsilon^{3/4}\left[\left(\sum_{|k|\geqslant 1}|k|^{\sigma}|v_k^0|\right) + \sup_{t\geqslant 0}|F_0(t)|\right] \leqslant \frac{1}{2}\min\left\{\frac{1}{24(10)^{1/3} v_e^{7/6}}, \frac{1}{24 v_e^3}\ \left(\frac{q}{4}\right)^{1/6}\right\} L_e .$$

2. Теперь перейдем к оценке норм $Y_k^{(m)}$. Точно также оценивается $H(T^{-1}Y^{(m)}, v_0^{(m)})_k$, $|k| \leqslant m$, $k \neq 0$. Справедлива оценка

$$\|H(T^{-1}Y^{(m)}, v_0^{(m)})_k\|^2_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}(R_+) \leqslant$$

$$\leqslant c_0\, \frac{1}{L_0} \sum_{k_1+k_2=k,\quad |k_1|,|k_2|,|k|\leqslant m, k_1,k_2,k\neq 0} |v_{k_1}^0|^2 \|Y_{k_2}^{(m)}\|^2_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu\varepsilon}(R_+)} .$$

Аналогично получаем, что:

$$\|3v^{1/2}\varepsilon\, v_0^{(m)} T_k^{-1} Y_k^{(m)} - v_e^{1/2}\varepsilon v_0^{(m)} A_k^{(1)} T_k^{-1} Y_k^{(m)}\|^2_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}} \leqslant$$

$$\leqslant c_0 \sup_{t\geqslant 0}|v_0^{(m)}(t)|^2 \|Y_k^{(m)}\|^2_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}} .$$

Оценим оставшиеся члены в правой части (67)

$$3v^{1/2}\varepsilon\, v_0^{(m)} T_k^{-1} D_k^{(m)} - v_e^{1/2}\varepsilon v_0^{(m)} A_k^{(1)} T_k^{-1} D_k^{(m)} + 2\varepsilon\, v_e^{1/2} H(T^{-1}D^{(m)}, v_0^{(m)})_k ,$$

$$v_e^{1/2}\varepsilon(v_0^{(m)} - v_\infty^{(m)})\, ik\, v_k^0 [c_k^+(v_0^{(m)}))e^{ikt} + c_k^-(v_0^{(m)}))e^{-ikt}] ,$$

где

$$v_\infty^{(m)} = \lim_{t\to\infty} v_{\text{stn}}^{(m)}(t) .$$

Здесь существенно, что мы рассматриваем модельный случай, когда предел $v_\infty^{(m)}$ *– константа.* Такое условие, как мы уже отмечали, выполнено для модифицированной системы.

$$\|v_e^{1/2}\varepsilon\,(v_0^{(m)} - v_\infty^{(m)})\Big(ikv_k^0\; c_k^+(v_0^{(m)})e^{ikt} + ikv_k^0\; c_k^-(v_0^{(m)})e^{-ikt}\Big)\|^2_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}} \leqslant$$

$$\leqslant \ \varepsilon c_0 \left(1 + \frac{\sup_{t\geqslant 0}\{L_e + 3\varepsilon^2|v^{(m)}(t)\}}{\inf_{t\geqslant 0}\{L_e - 3\varepsilon^2|v^{(m)}(t)\}}\right)^2 |v_k^0|^2 \|(v_0^{(m)} - v_\infty^{(m)})\|^2_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu_0\varepsilon}},$$

если $(v_0^{(m)} - v_\infty^{(m)}) \in L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)$. Докажем этот факт. Для стандартного решения

$$\sup_{\tau\geqslant 0} \ e^\tau \left[\left|\frac{d}{d\tau} v_{\rm stn}\right| + |v_{\rm stn}(\tau) - v_{\rm stn}^\infty|\right] < \infty \,,$$

где $v_{\rm stn}^\infty = \lim_{t\to+\infty} v_{\rm stn}(t)$. Вернемся к уравнению для невязки:

$$\frac{d}{dt}\, z^{(m)} + \frac{1}{\varepsilon}\,(L_e - 3\varepsilon\, v_e^{1/2}(1 - v_{\rm stn}))z^{(m)} = \frac{3}{2}\,\varepsilon\, v_e^{1/2}(z^{(m)})^2 + F_0(t)\,, \tag{75}$$

$$z^{(m)}|_{t=0} = 0\,.$$

Потребуем чтобы $\sup_{t\geqslant 0} e^{|\gamma|t}|f(t)| < \infty$. Положим $x = e^{|\gamma|t} z^{(m)}$. Тогда

$$\frac{d}{dt}x + (\widetilde{w} + \widetilde{u} + 4\widetilde{v} - 3\varepsilon\, v_e^{1/2}(1 - v_{\rm stn}) - \mu_2)x = \frac{3}{2}\,\varepsilon\, v_e^{1/2} e^{-|\gamma|t} x^2 + f_\gamma(t)\,, \quad f_\gamma(t) = e^{|\gamma|t} F_0(t)\,.$$

К этой задаче применимы процедуры доказательства существования глобального решения задачи (18). Приведенные там условия разрешимости и оценка решения в нашем случае

$$\frac{(1 + 3\varepsilon\, v_e M_0)^4}{L^2}\left(1 + \frac{3\varepsilon\, v_e M_0}{L^2}\right)^2 \leqslant 1$$

те же, поскольку коэффициент $\frac{3}{2}\varepsilon\, v_e^{1/2} e^{-\mu_2 t}$ при x^2 убывает и, по построению, мы должны взять максимум $3\varepsilon\, v_e^{1/2} e^{-\mu_2 t}$, т.е. опять же получили $3\varepsilon\, v_e^{1/2}$. Тогда существует абсолютно непрерывное решение задачи (66), для которого справедлива оценка

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant\infty} |x(t)| \leqslant (1 + 3\varepsilon\, v_e M_0)^2 \left(1 + \frac{3\varepsilon\, v_e M_0}{L^2}\right)\,.$$

Откуда следует требуемый результат $\sup_{t\geqslant 0} e^{|\gamma|t}|z^{(m)}| < \infty$.

3. Остались секулярные члены

$$I_{\rm sec} = -(\xi_k^{(m)} e^{ikt} + \eta_k^{(m)} e^{-ikt}) +$$

$$+\Big(\frac{1}{\varepsilon}\, d_k^+ + v_e^{1/2}\varepsilon\, v_\infty^{(m)}\, ikv_k^0\, c_k^+(v_0^{(m)})\Big)e^{ikt} + \Big(\frac{1}{\varepsilon}\, d_k^- + v_e^{1/2}\varepsilon\, v_\infty^{(m)}\, ikv_k^0\, c_k^-(v_0^{(m)})\Big)e^{-ikt}$$

$$-\varepsilon v_e^{1/2} \sum_{k_1+k_2=k,\quad |k_1|,|k_2|,\leqslant m, k_1,k_2\neq 0} e^{i(k_2-k_1)t}\Big(d_{k_1,k_2} + b_{k_1,k_2} + \frac{\varepsilon^2}{u_e w_e}\, \xi_{k_2}^{(m)} \eta_{k_1}^{(m)}\Big)\,,$$

в которых предел $v_\infty^{(m)}$ – константа.

Прежде всего определим $2m$ начальных данных из $4m$ данных u_k^0, w_k^0, $|k| \leqslant m, k \neq 0$ в силу $2m$ уравнений

$$\sum_{s_1+s_2=s,\ |s_1|,|s_2|,\leqslant m, s_1,s_2\neq 0} \left(d_{s_1,s_2} + b_{s_1,s_2} + \frac{\varepsilon^2}{u_e w_e}\, \xi_{s_2}^{(m)} \eta_{s_1}^{(m)}\right) = 0\,, \qquad s_2 - s_1 = \pm 1, \ldots, \pm m\,,$$

которые есть возмущение системы

$$\sum_{s_1+s_2=s,\ |s_1|,|s_2|,\leqslant m, s_1,s_2\neq 0} d_{s_1,s_2} = \tag{76}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{s_1+s_2=s,\ |s_1|,|s_2|,\leqslant m, s_1,s_2\neq 0} \left(2w_{k_2}^0 \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} + v_{k_2}^0\right)\left(2u_{k_1}^0 \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} + v_{k_1}^0\right) = 0\,,\ s_2 - s_1 = \pm 1, \ldots, \pm m\,,$$

поскольку

$$\sum_{s_1+s_2=s,\ |s_1|,|s_2|,\leqslant m, s_1,s_2\neq 0} b_{s_1,s_2} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{s_1+s_2=s,\ |s_1|,|s_2|,\leqslant m, s_1,s_2\neq 0} (s_1 v_{s_1}^0)(s_2 v_{s_2}^0) \int_0^\infty e^{is_1 t} e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t (L_e + 3v^{1/2}\varepsilon^2 v_0^{(m)})ds} dt \,\times$$

$$\times \int_0^\infty e^{-is_2 t} e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t (L_e + 3v^{1/2}\varepsilon^2 v_0^{(m)})ds} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{s_1+s_2=s,\ |s_1|,|s_2|,\leqslant m, s_1,s_2\neq 0} v_{s_1}^0 v_{s_2}^0 \left[-1 + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\infty e^{is_1 t}(L_e + 3v^{1/2}\varepsilon^2 v_0^{(m)}) e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t (L_e + 3v^{1/2}\varepsilon^2 v_0^{(m)})ds} dt\right] \times$$

$$\times \left[-1 + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\infty e^{-ik_2 t}(L_e + 3v^{1/2}\varepsilon^2 v_0^{(m)}) e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t (L_e + 3v^{1/2}\varepsilon^2 v_0^{(m)})ds} dt\right] = O(\varepsilon^2)\,.$$

Систему же (76) из $4m$ уравнений можно свести к $2m$ уравнений

$$2w_{k_2}^0 \frac{w_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} + v_{k_2}^0 = 0, \quad k_2 = \pm 1, \ldots, \pm\, m\,,$$

$$2u_{k_1}^0 \frac{u_e^{1/2}}{v_e^{1/2}} + v_{k_1}^0 = 0\,, \quad k_1 = \pm 1, \ldots, \pm\, m\,.$$

Положим

$$\zeta_k^+ = \sum_{s_2-s_1=k,\ s_1+s_2=s, |s_1|,|s_2|,\leqslant m, s_1,s_2\neq 0} (d_{s_1,s_2} + b_{s_1,s_2})\,, \quad k = 1, \ldots, m\,,$$

$$\zeta_k^- = \sum_{s_2-s_1=-k,\ s_1+s_2=s, |s_1|,|s_2|,\leqslant m, s_1,s_2\neq 0} (d_{s_1,s_2} + b_{s_1,s_2})\,, \quad k = 1, \ldots, m\,.$$

Теперь неизвестные постоянные $\xi_k^{(m)}, \eta_k^{(m)}$, $k = 1, \ldots, m$ найдем из следующего условия.

Условие несекулярности.

$$-\xi_k^{(m)} + \frac{1}{\varepsilon} d_k^+ + v_e^{1/2}\varepsilon\, v_\infty^{(m)}\, ikv_k^0\; c_k^+(v_0^{(m)}) - \varepsilon v_e^{1/2}\zeta_k^+ - \tag{77}$$

$$-\varepsilon^3 \frac{v_e^{1/2}}{u_e w_e} \sum_{s_2-s_1=k,\ s_1+s_2=s, |s_1|,|s_2|, \leqslant m, s_1,s_2,s\neq 0} \xi_{k_2}^{(m)} \eta_{k_1}^{(m)} = 0\,, \quad k=1,\dots,m\,,$$

$$-\eta_k^{(m)} + \frac{1}{\varepsilon}\, d_k^- + v_e^{1/2}\varepsilon\, v_\infty^{(m)}\, ikv_k^0\; c_k^-(v_0^{(m)}) - \varepsilon v_e^{1/2}\zeta_k^- -$$

$$-\varepsilon^3 \frac{v_e^{1/2}}{u_e w_e} \sum_{s_2-s_1=-k,\ s_1+s_2=s, |s_1|,|s_2|, \leqslant m, s_1,s_2,s\neq 0} \xi_{k_2}^{(m)} \eta_{k_1}^{(m)} = 0\,, \quad k=1,\dots,m\,,$$

где

$$|ik\; c_k^+(v_0^{(m)})| \leqslant\; 1 + \frac{\sup_{t\geqslant 0}\{L_e + 3v^{1/2}\varepsilon^2 |v_0^{(m)}|\}}{\inf_{t\geqslant 0}\{L_e - 3v^{1/2}\varepsilon^2 |v_0^{(m)}|\}}\,.$$

Оценим решение этой системы $\xi_k^{(m)}, \eta_k^{(m)}$.

Лемма 9. *Пусть равномерно по $m \geqslant 1$ имеем $|a^{(m)}| \leqslant\; K_0$ и $\|F_0^{(m)}\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu\varepsilon}} \leqslant K_0$. Тогда для $\sigma > 1$ для достаточно малого $\delta_0 > 0$ существует постоянная $c_1 > 0$ такая, что равномерно по $k \in Z_0$ и $m \geqslant 1$ справедлива оценка*

$$|\xi_k^{(m)}| + |\eta_k^{(m)}| \leqslant\; c_1\, \left(|v_k^0| + \frac{A_k}{|k|^\sigma}\right), \quad A_k = \sum_{0<|k|\leqslant m} |k|^\sigma |v_k^0|\,,$$

если

$$\varepsilon |v_0^0|\; A_k \leqslant \delta_0\,.$$

4. Решение $Y^{(m)}$ системы (67) определим линейным уравнением

$$Y^{(m)} + \varepsilon\mathcal{A}Y^{(m)} = G^{(m)} + F, \tag{78}$$

$$G_k^{(m)} = -D_k^{(m)} - 3v^{1/2}\varepsilon\, v_0^{(m)} T_k^{-1} Y D(m)_k - v_e^{1/2}\varepsilon v_0^{(m)} A_k^{(1)} T_k^{-1} D_k^{(m)} +$$
$$+ 2\varepsilon\, v_e^{1/2} H(T^{-1}D^{(m)}, v_0^{(m)})_k,$$

$$\mathcal{A}_k Y_k^{(m)} = 3v^{1/2} v_0^{(m)} T_k^{-1} Y_k^{(m)} - v_e^{1/2} v_0^{(m)} A_k^{(1)} T_k^{-1} Y_k^{(m)} + 2v_e^{1/2} H(T^{-1}Y^{(m)}, v_0^{(m)})_k\,.$$

Из полученных выше оценок следует, что функция $F \in\; L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)$ и что ограниченный оператор $I + \varepsilon\mathcal{A}$ является малым возмущением тождественного. Тогда для достаточно малого ε у него существует ограниченный обратный $(I+\varepsilon\mathcal{A})^{-1}$. Решение вспомогательной задачи

$$y_k^{(m)} = T^{-1}\Big(I + \varepsilon\mathcal{A}\Big)^{-1}(F_k) + T^{-1}(D_k^{(m)})\,. \tag{79}$$

Как видим, мы получили так называемое разложение решения по гладкости, поскольку

$$AT^{-1}\Big(I+\varepsilon\mathcal{A}\Big)^{-1}(F_k)\in\ L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)\,,$$

в то время как

$$AT^{-1}(D_k^{(m)})\in\ L_\infty(R_+)$$

и эта функция не принадлежит $L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)$.

Последнее, что нужно сделать, чтобы убедиться в справедливости неравенств (74), которые очевидно выполнено, если достаточно мала норма $\|v^0\|_{H^\sigma(0,2\pi)}$.

Старшие моды. Исследование линейной системы для $|k|>m$ есть следствие результатов для вспомогательной задачи. В этом случае, очевидно, справедлива оценка:

$$\|(I-\Pi_m)v^{(m)}(t)\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^0}\leqslant\ c_0\|(I-\Pi_m)v^{m)}(0)\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^0}\,,\qquad t\in[0,T^*_{\max})\,.$$

9. Исследование нелинейного оператора

Теперь перейдем к исследованию нелинейной системы

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}v_0^{(m)}+\frac{1}{\varepsilon}\left(L_e-\frac{3}{2}\varepsilon^2v_e^{1/2}v_0^{(m)}\right)v_0^{(m)}+2\varepsilon v_e^{1/2}a_0^{(m)}=G_0^{(m)}-\varepsilon A_0(Y^{(m)})-\varepsilon\mathcal{B}(Y^{(m)},Y^{(m)})_0\,,\\ Y^{(m)}=G^{(m)}-\varepsilon A(Y^{(m)})-\varepsilon\mathcal{B}(Y^{(m)},Y^{(m)})\,,\\ \mathcal{A}(Y^{(m)})=Y^{(m)}+\varepsilon\,A(Y^{(m)})\,,\\ A(Y^{(m)})=3v^{1/2}v_0^{(m)}T_k^{-1}Y_k^{(m)}+v_e^{1/2}v_0^{(m)}A_k^{(1)}T_k^{-1}Y_k^{(m)}\,,\\ A_0(Y^{(m)})=2v_e^{1/2}H(T^{-1}Y^{(m)},v_0^{(m)})_0,\quad\mathcal{B}_0(Y^{(m)}=2v_e^{1/2}B^*(Y^{(m)},Y^{(m)})_0\,.\end{gathered}\tag{80}$$

Сначала рассмотрим

$$\mathcal{A}(Y^{(m)})-\varepsilon\,\mathcal{B}(Y^{(m)},Y^{(m)})=G^{(m)}\tag{81}$$

при фиксированном $v_0^{(m)}$. Положим

$$A^{(m)}=\sum_{0<|k|\leqslant m}|k|^{2\sigma}[\|G_k\|^2_{L_{2,\gamma}(R_+)}+|\xi_k|^2+|\eta_k|^2],\ \sigma>0\,.$$

и пусть постоянная $b>0$ определяется оценкой

$$\|3v^{1/2}T_k^{-1}Y_k^{(m,j)}+v_e^{1/2}A_k^{(1)}T_k^{-1}Y_k^{(m,j)}\|_{L_{2,\gamma}(R_+)}\leqslant b\|Y_k^{(m,j)}\|_{L_{2,\gamma}(R_+)}\,.$$

Лемма 10. *Пусть $A^{(m)}<\infty$. Тогда для любого $m\geqslant 1$ билинейное уравнение (81) имеет решение $Y^{(m)}\in L_{2,\gamma}(R_+)$, для которого равномерно по m и k справедлива оценка*

$$\|Y_k^{(m)}\|^2_{L_{2,\gamma}(R_+)}\leqslant\left(1-\varepsilon^2b^2\Big(\sup_{t\geqslant0}|v_0^{(m)}|\Big)^2\right)\left(\|G_k\|^2_{L_{2,\gamma}(R_+)}+\frac{A^{(m)}}{|k|^{2\sigma}}\right)\,,\tag{82}$$

если

$$\left(1-\varepsilon^2 b^2\Big(\sup_{t\geqslant 0}|v_0^{(m)}|\Big)^2\right)^{-1} c_B^2 c_\sigma \varepsilon A^{(m)} \leqslant 1\,, \quad \sigma > \frac{1}{2}\,, \tag{83}$$

где $c_\sigma = \sum\limits_{k\in Z_0} \dfrac{1}{|k|^{2\sigma}} \leqslant 2/(2\sigma-1)$.

Доказательство Леммы 10 аналогично доказательству Леммы 8, из него следует существование решения нелинейного уравнения (81) и оценка решения при фиксированных $v_0^{(m)}, \xi^{(m)}, \eta^{(m)}$. Как мы показали выше, для билинейных операторов $\mathcal{B}(Y^{(m)}, Y^{(m)})$ равномерно по m справедлива оценка

$$\|\mathcal{B}(Y^{(m)}, Y^{(m)})\|^2_{L_{2,\gamma}(R_+)} \leqslant \tag{84}$$

$$\leqslant c_B^2 \sum_{k_1+k_2=k,\ 0<|k_1|,|k_2|,|k|\leqslant m} [\|Y_{k_1}^{(m)}\|^2_{L_{2,\gamma}(R_+)} + |\xi_{k_1}^{(m)}|^2 + |\eta_{k_1}^{(m)}|^2] \times$$

$$\times\ [\|Y_{k_2}^{(m)}\|^2_{L_{2,\gamma}(R_+)} + |\xi_{k_2}^{(m)}|^2 + |\eta_{k_2}^{(m)}|^2]\,.$$

1) Фиксируем m. Тогда для итерации $\mathcal{A}(Z^{(m,j)}) = G^{(m)} - \varepsilon\mathcal{B}(Z^{(m,j-1)}, Z^{(m,j-1)})$, $j\geqslant 1$, $Z_0^{(m,0)} = G^{(m)}$ справедлива оценка (82), поскольку

$$\|Z_k^{(m,j)}\|^2_{L_{2,\gamma}(R_+)} - \varepsilon\|3v^{1/2}v_0^{(m)}T_k^{-1}Z_k^{(m,j)} + v_\varepsilon^{1/2}v_0^{(m)}A_k^{(1)}T_k^{-1}Z_k^{(m,j)}\|^2_{L_{2,\gamma}(R_+)} \leqslant \|G_k^{(m)}\|^2_{L_{2,\gamma}(R_+)} +$$

$$+\varepsilon c_B^2 \sum_{k_1+k_2=k,\ 0<|k_1|,|k_2|,|k|\leqslant m} [\|Z_{k_1}^{(m,j-1)}\|^2_{L_{2,\gamma}(R_+)} + |\xi_{k_1}^{(m)}|^2 + |\eta_{k_1}^{(m)}|^2] \times$$

$$\times\ [\|Z_{k_2}^{(m,j-1)}\|^2_{L_{2,\gamma}(R_+)} + |\xi_{k_2}^{(m)}|^2 + |\eta_{k_2}^{(m)}|^2]\,.$$

Отсюда следует

$$\left(1-\varepsilon^2 b^2\Big(\sup_{t\geqslant 0}|v_0^{(m)}|\Big)^2\right)\|Z_k^{(m,j)}\|^2_{L_{2,\gamma}(R_+)} \leqslant \|G_k^{(m)}\|^2_{L_{2,\gamma}(R_+)} +$$

$$+\varepsilon c_B^2 \sum_{k_1+k_2=k,\ 0<|k_1|,|k_2|,|k|\leqslant m} [\|Z_{k_1}^{(m,j-1)}\|^2_{L_{2,\gamma}(R_+)} + |\xi_{k_1}^{(m)}|^2 + |\eta_{k_1}^{(m)}|^2] \times$$

$$\times\ [\|Z_{k_2}^{(m,j-1)}\|^2_{L_{2,\gamma}(R_+)} + |\xi_{k_2}^{(m)}|^2 + |\eta_{k_2}^{(m)}|^2]\,.$$

В силу индукции

$$\|Z_k^{(m,j)}\|^2_{L_{2,\gamma}(R_+)} \leqslant \left(1-\varepsilon^2 b^2\Big(\sup_{t\geqslant 0}|v_0^{(m)}|\Big)^2\right)^{-1}\left(\|G_k\|^2_{L_{2,\gamma}(R_+)} + \frac{A^{(m)}}{|k|^{2\sigma}}\right)\,.$$

Следовательно, последовательность итераций $Z^{(m,j)}$, $j\geqslant 0$ ограничена. Отсюда следует слабая сходимость $Z^{(m,j)} \to Y^{(m)} \in L_{2,\gamma}(R_+)$ при $j\to\infty$. В тоже время, мы имеем сильную сходимость $T^{-1}Z^{(m,j)}$ в $L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu\varepsilon}(R_+)$ и в $C_B(R_+)$. Тогда последовательность

$$\left(ik_1\int_0^t e^{ik_1(t-s)}T_{k_1}^{-1}Z_{k_1}^{(m,j)}ds\right)\left(ik_2\int_0^t e^{-ik_2(t-s)}T_{k_2}^{-1}Z_{k_2}^{(m,j)}ds\right)$$

сходится к

$$\left(ik_1\int_0^t e^{ik_1(t-s)}T_{k_1}^{-1}Y_{k_1}^{(m)}ds\right)\left(ik_2\int_0^t e^{-ik_2(t-s)}T_{k_2}^{-1}Y_{k_2}^{(m)}ds\right)$$

для всех $t\in R_+$. Отсюда, из структуры оператора $\mathcal{B}$ и оценки его частей (см. раздел 5) последовательность

$$\varepsilon\Big(3v^{1/2}v_0^{(m)}T_k^{-1}Z_k^{(m,j)}+v_e^{1/2}v_0^{(m)}A_k^{(1)}T_k^{-1}Z_k^{(m,j)}+\mathcal{B}(Z^{(m,j-1)},Z^{(m,j-1)})\Big)$$

сходится поточечно к

$$\varepsilon\Big(3v^{1/2}v_0^{(m)}T_k^{-1}Y_k^{(m)}+v_e^{1/2}v_0^{(m)}A_k^{(1)}T_k^{-1}Y_k^{(m)}+\mathcal{B}(Y^{(m)},Y^{(m)})\Big)$$

для всех $t\in R_+$. Таким образом, для почти всех $t\in R_+$ имеет место

$$\mathcal{A}(Y^{(m)})-\varepsilon\,\mathcal{B}(Y^{(m)},Y^{(m)})=G^{(m)}.$$

Следовательно, существует решение $Y^{(m)}\in L_{2,\gamma}(R_+)$, для которого справедлива оценка (82) при условии (83) и фиксированном $v_0^{(m)}$.

2) Используя существование глобального решения вспомогательной задачи для правых частей специального вида, мы доказали обратимость оператора $\mathcal{A}(Y^{(m)})$ в $L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)$ и ограниченность решения

$$\sum_{0<k\leqslant m}|k|^\sigma(|\xi_k^{m)}|+|\xi_k^{m)}|)+\|Y^{(m)}\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)}+\|v_0^{(m)}-v_{stn}^{(m)}\|_{W^1_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)}\leqslant \tag{85}$$

$$\leqslant\ c_0[\|F\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)}+|v^0|_{H^\sigma(0,2\pi)}]\,,\quad \sigma>1\,.$$

в случае $a_0^{(m)}(t)=\mathrm{const}$.

Теперь рассмотрим систему (86). Метод итераций дает систему уравнений

$$\frac{d}{dt}z_n^0+\frac{1}{\varepsilon}\left(L_e-\frac{3}{2}\varepsilon^2v_e^{1/2}z_n^0\right)z_n^0+2\varepsilon v_e^{1/2}a_0^{(m)}=G_0^{(m)}-\varepsilon A_0(z_n)-\varepsilon\mathcal{B}(z_{n-1},z_n)_0\,,$$

$$z_n=G^{(m)}-\varepsilon A(z_n)-\varepsilon\mathcal{B}(z_{n-1}\,,z_n)\,. \tag{86}$$

Те же рассуждения, что и для модельной задачи, позволяют и в случае $a_0^{(m)}(t)$— гладкой функции получить оценку (85) для решения системы (86) с точностью до $O(m^{-1})$ (см. раздел 7). Достаточно потребовать $\sigma>2$, чтобы в этом случае

$$\sum_{0<k\leqslant m}|k|^{\sigma-1}(|\xi_n^k|+|\eta_n^k|)+\|z_n\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)}+\|z_n^0-v_{\mathrm{stn}}^{(m)}\|_{W^1_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)}+\|a_0^{(m)}\|_{H^1_b(R^+)}\leqslant$$

$$\leqslant\ c_0\Big(\|G\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)}+\varepsilon c_H\|z_n\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)}+$$

$$+ \varepsilon c_B \|z_{n-1}\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)} \|z_n\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)} + |v^0|_{H^\sigma(0,2\pi)} \Big) ,$$

где $v_{\mathrm{stn}}^{(m)}(t)$ определяются функцией $a^{(m)}(t) = \sum_{0<|k|\leqslant m} c_k e^{ikt}$, норма которой $\|a_0^{(m)}\|_{H_b^1(R^+)} = \sum_{0<|k|\leqslant m} |k||c_k|$. Выберем M_0 такое, что

$$\frac{\|G\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)}}{1-\varepsilon(c_H + c_B M_0)} \leqslant M_0 ,$$

т.е.

$$\varepsilon\, c_B M_0^2 - M_0(1-\varepsilon\, c_H) + \|G\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)} \leqslant 0 .$$

Возьмем

$$M_0 = \frac{2\|G\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)}}{(1-\varepsilon\, c_H) + \sqrt{(1-\varepsilon\, c_H)^2 - 4\varepsilon\, c_B \|G\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)}}}$$

и ε выберем из условия, что

$$(1-\varepsilon\, c_H)^2 - 4\varepsilon\, c_B \|G\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)} > 0 .$$

Тогда для любого $n \geqslant 0$

$$\|z_n\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)} \leqslant M_0 .$$

Выразим разность между двумя приближениями следующим образом

$$(z_n - z_{n-1}) = \varepsilon \mathcal{H}(z_n - z_{n-1}) + \varepsilon[\mathcal{B}(z_{n-1}, z_n) - \mathcal{B}(z_{n-2}, z_{n-1})] .$$

Если справедлива оценка

$$\|\mathcal{B}(Z^{(m)}, Y^{(m)})\|_{L_2} \leqslant\ c_B(\|Y^{(m)}\|_{L_2} + \|v^0\|_{H^\sigma})(\|Z^{(m)}\|_{L_2} + \|v^0\|_{H^\sigma}) , \tag{87}$$

то

$$\|\mathcal{B}(z_{n-1}, z_n) - \mathcal{B}(z_{n-2}, z_{n-1})\| \leqslant$$

$$\leqslant\ c_B \|z_{n-1}\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)} (\|z_n - z_{n-1}\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)} + \|z_{n-1} - z_{n-2}\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)}) .$$

Отсюда

$$\|z_n - z_{n-1}\|_H \leqslant\ \varepsilon c_0 (c_H +_B (\|z_{n-1}\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)}) + \|v^0\|) \|z_n - z_{n-1}\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)} +$$

$$+ \varepsilon c_0 c_B (\|z_{n-1}\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)}) + \|v^0\|_{L_2(0,2\pi)}) \|z_{n-1} - z_{n-2}\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)} ,$$

если равномерно $\|z_j\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)} \leqslant M_0$, то

$$\|z_n - z_{n-1}\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)} \leqslant\ \frac{\varepsilon c_0 c_B (M_0 + \|v^0\|_{L_2(0,2\pi)})}{1 - \varepsilon c_0 (c_H + c_B(M_0 + \|v^0\|_{H^\sigma}))} \|z_{n-1} - z_{n-2}\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)} .$$

При этом должно быть выполнено условие

$$\frac{\varepsilon c_0 c_B (M_0 + \|v^0\|_{H^\sigma})}{(1 - \varepsilon c_0 (c_H + c_B(M_0 + \|v^0\|_{H^\sigma}))} < q < 1 .$$

Отсюда следует сходимость z_n в $L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+))$ к решению $Y^{(m)} \in H$ задачи (86).

Выбор постоянной M_0. Последнее, что нам осталось сделать – обосновать равномерный по n (и, соответственно, независимо от $v_0^{(m)}$) выбор постоянной M_0. Для этого нам нужно оценить правую часть G_k. Очевидно, все определяется оценкой $G_k(v_0^{(m)})$ для $v_0^{(m)} = v_{\text{stn}}$. Тогда постоянную M_0 можно определить , например, по $2\|G(v_{\text{stn}})\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)}$.

10. Обоснование галеркинских приближений

Построенные нами решения задачи (25), (26), (27) имеют следующую структуру

$$v_0^{(m)}(t) = v_{\text{stn}}^{(m)}(t) + z_0^{(m)}(t)\,,$$

где $v_{\text{stn}}^{(m)}(t)$ определяются функцией $a^{(m)}(t)$.

$$v_k^{(m)}(t) = v_k^0\,\exp\left\{-\frac{1}{\ }\varepsilon\int_0^t(4v_e+u_e+w_e+4\varepsilon v_e^{1/2}v_0^{(m)}(s))ds\right\}+\xi_k^{(m)}D_k^+ +\eta_k^{(m)}D_k^- +Y_k^{(m)}(t)\,.$$

Теорема 3. *Пусть $\sigma > 2$ и $v(0) \in H^\sigma$ и выполнены условия Предложения 2. Тогда существует подпоследовательность $v_k^{(m)}(t)$, $k \in Z$(которую будем обозначать также) решений задачи (25), (26), (27) с тем же начальными данными $v(0) \in H^\sigma$ такое, что $v_0^{(m)}(t)$ и $v_k^{(m)}(t)$, $k \in Z_0$ сходятся строго в $C_B(R_+)$ и $L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)$ соответственно и слабо в $W^1_\infty(R_+)$ и $W^1_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)$ к функциям $v_0^\infty(t)$ и $v_k^\infty(t)$, $k \in Z_0$; $v_0^\infty(t), v_k^\infty(t), k \in Z_0$ являются решением задачи (8)(в смысле определения (24)) для почти всех $t \in R_+$, с ограниченными нормами*

$$\|v_0^\infty(t) - v_{stn}^\infty(t)\|_{W^1_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)} \leqslant\; M_\sigma\; |v^0|_{H^\sigma}\,,\quad \|\Xi^{(m)}\|_{H^{\sigma-1}}, \|\Upsilon^{(m)}\|_{H^{\sigma-1}} \leqslant c_0\|v^0\|_{H^\sigma}\,,$$

$$\|v^\infty(t) - \xi^\infty D^+ - \eta^\infty D^-\|_{W^1_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+;A)} \leqslant\; M_\sigma\; |v_k^0|_{H^\sigma}\,,$$

с постоянной M_σ не зависящей от $k \in Z$.

□ 1) Постоянные $\xi_k^{(m)}, \eta_k^{(m)}$ равномерно ограничены

$$\|\Xi^{(m)}\|_{H^{\sigma-1}}, \|\Upsilon^{(m)}\|_{H^{\sigma-1}} \leqslant c_0\|v^0\|_{H^\sigma}\,,$$

где $\|v^0\|_{H^\sigma} = \sum_{k\neq Z_0} |k|^\sigma|v_k^0|$, $\|\Xi^{(m)}\|_{H^s} = \sum_{k=1}^m |k|^s|\xi_k^{(m)}|$, $\|\Upsilon^{(m)}\|_{H^s} = \sum_{k=1}^m |k|^s|\eta_k^{(m)}|$. Откуда следует существование предельных постоянных векторов

$$\Xi^{(m)} \;\to\; \Xi^\infty,\quad \Upsilon^{(m)} \;\to\; \Upsilon^\infty,\quad m\to\infty\,.$$

и

$$a^{(m)}(t) \;\to\; a^\infty(t) = \frac{\varepsilon^3}{v_e^{3/2}}\sum_{0<|k|\leqslant m}(\Xi^\infty,\Upsilon^\infty)e^{i(k_2-k_1)t} \;\text{ в }\; H^1_B(R_+)\,.$$

Тогда

$$v_{stn}^{(m)}(t) \;\to\; v_{stn}^\infty(t) \;\text{ в } C^1_B(R_+)\,,$$

где $\|y\|_{C^1_B(R_+)} = \sup\limits_{t\geqslant 0}\left[|y(t)| + \left|\frac{d}{dt}y\right|\right]$, и справедлива равномерная по m оценка

$$\|v_0^{(m)}(t) - v_{stn}^{(m)}(t)\|^2_{W^1_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu\varepsilon}(R_+)} + \sum_{k=1}^{m}\|Y_k^{(m)}\|^2_{W^1_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu\varepsilon}(R_+;A)} \leqslant c_0\,\|v^0\|^2_{H^\sigma}\,.$$

2) Теперь покажем, что $Y_k^{(m)} \to Y_k^\infty$ в $L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu\varepsilon}(R_+)$. Из равномерной ограниченности ограниченность норм $\|Y_k^{(m)}\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu\varepsilon}(R_+)}$ следует слабая сходимость $Y_k^{(m)} \to Y_k^\infty$ при $m\to\infty$. В тоже время, мы имеем сильную сходимость $T^{-1}D_k^{(m)}$ в $W^1_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu\varepsilon}(R_+)$ и в $C_B(R_+)$. Отсюда следует сильная сходимость $B_*(D^{(m)}, D^{(m)}) \to B_*(D^\infty, D^\infty)$ и $B_*(Y^{(m)}, D^{(m)}) \to B_*(Y^\infty,\, D^\infty$ в $L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu\varepsilon}(R_+)$. К тому же последовательность

$$\left(ik_1\int_0^t e^{ik_1(t-s)}T_{k_1}^{-1}Y_{k_1}^{(m)}ds\right)\left(ik_2\int_0^t e^{-ik_2(t-s)}T_{k_2}^{-1}Y_{k_2}^{(m)}ds\right)$$

сходится к

$$\left(ik_1\int_0^t e^{ik_1(t-s)}T_{k_1}^{-1}Y_{k_1}^{\infty}ds\right)\left(ik_2\int_0^t e^{-ik_2(t-s)}T_{k_2}^{-1}Y_{k_2}^{\infty}ds\right)$$

поточечно для всех $t\in R_+$. Отсюда

$$\mathcal{A}(Y^\infty) - \varepsilon\,\mathcal{B}(Y^\infty, Y^\infty) = G^\infty$$

для почти всех $t\in R_+$.

Тогда с силу (81) имеем

$$(Y^{(m)} - Y^\infty) = -\varepsilon\,A(Y^{(m)} - Y^\infty) + \varepsilon(\mathcal{B}(Y^{(m)}, Y^{(m)}) - \mathcal{B}(Y^\infty, Y^\infty) + (G^{(m)} - G^\infty)\,,$$

где $\|(G^{(m)} - G^\infty)\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu\varepsilon}(R_+)} \to 0$ когда $m\to\infty$ и

$$\|\varepsilon\,A(Y^{(m)} - Y^\infty) + \varepsilon(\mathcal{B}(Y^{(m)}, Y^{(m)}) - \mathcal{B}(Y^\infty)\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu\varepsilon}(R_+)} \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon^{1/2}C_0\|(Y^{(m)} - Y^\infty)\|_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu\varepsilon}(R_+)}\,.$$

Отсюда, для достаточно малого $\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$, следует сильная сходимость $Y_k^{(m)} \to Y_k^\infty$ в $L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu\varepsilon}(R_+)$ для любого $|k|\geqslant 1$. В тоже время, получим, что $z^{(m)} = v_0^{(m)}(t) - v_{\mathrm{stn}}^{(m)}(t) \to z^\infty$ в $L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu\varepsilon}(R_+)$ и слабо в $W^1_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu\varepsilon}(R_+)}$ к функции $z^\infty\in W^1_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu\varepsilon}(R_+;A)}$.

3) Теперь покажем, что функции

$$v_0^\infty(t) = v_{stn}^\infty(t) + z^\infty(t)\,,$$

$$v_k^\infty(t) = v_k^0\,\exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t(L_e + 3ve^2v_e^{1/2}v_0^\infty(s))ds\right\} + \xi_k^\infty D_k^+ + \eta_k^\infty D_k^- + T_k^{-1}Y_k^\infty(t)\,,\quad k\in Z_0$$

являются решением задачи (70), (23) в смысле определения (24) ($D_k^\pm = T_k^{-1}(e^{\pm ikt})$.

Для $v_0^{(m)}$ имеем

$$\frac{d}{dt}\,v_0^{(m)}(t)+\frac{1}{\varepsilon}\,L_e v_0^{(m)}(t)-v_e^{1/2}\varepsilon\Big[\frac{3}{2}(v_0^{(m)})^2+ \tag{88}$$

$$+2\Pi_m\sum_{k_1+k_2=0}(\Pi_m v_{k_1}^{(m)}\Pi_m v_{k_2}^{(m)}-\Pi_m u_{k_1}^{(m)}\Pi_m w_{k_2}^{(m)})\Big]=-2v_e^{1/2}\varepsilon\ \mathcal{O}_0^{(m)}\,,$$

$$\mathcal{O}_0^{(m)}=2v_e^{1/2}\varepsilon\sum_{m<|k|\leqslant 2m,\ k\neq 0}h_k e^{ikt}+3v_e^{1/2}\varepsilon\sum_{|k_1+k_2|^2>m,\ |k_1|,|k_2|}c_{k_1}c_{k_2}e^{ikt}=O(m^{-1})\,,$$

где

$$\sup_{t\geqslant 0}|\mathcal{O}_0^{(m)}|\leqslant\Big(\sum_{m<|k|\leqslant 2m,}|h_k|+3v_e^{1/2}\varepsilon\sum_{|k_1+k_2|\geqslant m,\ |k_1|,|k_2|\leqslant m}|c_{k_1}|\ |c_{k_2}|\Big)\leqslant$$

$$\leqslant C_1\sum_{|k|\geqslant m}|k|^{\sigma}|v_k^0||=O(m^{-1})\,.$$

Далее, второе уравнение в (24) запишем в более удобной нам форме

$$Y_k^{(m)}(t)+D_k^{(m)}(t)=v_k^0\exp\Big\{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t(L_e+3\varepsilon^2 v_e^{1/2}v_0^{(m)})d\tau\Big\}+\frac{1}{\varepsilon}\,d_k^+e^{ikt}+\frac{1}{\varepsilon}\,d_k^-e^{-ikt}+ \tag{89}$$

$$+\varepsilon v_e^{1/2}d_k(t)+v_e^{1/2}\varepsilon\ \Pi_m\mathcal{K}_k(\Pi_m v^{(m)},\Pi_m v^{(m)})+\mathcal{O}_k^{(m)}\,,$$

$$\mathcal{O}_k^{(m)}=-2\varepsilon v_e^{1/2}S_1^{(m)}(t)=\sum_{|k|\geqslant m}s_k^{(m)}e^{ikt}=O(m^{-1})\,.$$

Положим $\Pi_{-m}=I-\Pi_m$. Тогда

$$\frac{d}{dt}\,v_0^{\infty}(t)+\frac{1}{\varepsilon}L_e v_0^{\infty}(t)+v_e^{1/2}\varepsilon\Big[\frac{3}{2}(v_0^{\infty})^2+\sum_{k_1+k_2=0}(v_{k_1}^{\infty}v_{k_2}^{\infty}-u_{k_1}^{\infty}w_{k_2}^{\infty})\Big]=$$

$$=-v_e^{1/2}\varepsilon\Big[\frac{3}{2}(v_0^{\infty}+v_0^{(m)})(v_0^{\infty}-v_0^{(m)})+\Pi_m\sum_{k_1+k_2=0}(\Pi_m(v_{k_1}^{\infty}-v_0^{(m)})\Pi_m v_{k_2}^{\infty}-\Pi_m(u_{k_1}^{\infty}-u_{k_1}^{(m)})\Pi_m w_{k_2}^{\infty}\Big]+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}L_e(v_0^{\infty}(t)-v_0^{(m)})-v_e^{1/2}\varepsilon\Big[\Pi_m\sum_{k_1+k_2=0}(\Pi_m v_0^{(m)}\Pi_m(v_{k_2}^{\infty}-v_{k_2}^{(m)})-\Pi_m u_{k_1}^{(m)}\Pi_m(w_{k_2}^{\infty}-v_{k_2}^{(m)})\Big]+$$

$$+\frac{d}{dt}v_0^{\infty}(t)-\frac{d}{dt}v_0^{(m)}+v_e^{1/2}\varepsilon\Pi_{-m}\Big[\sum_{0<|k|\leqslant m}(\Pi_m v_k^{\infty}\Pi_m v_{-k}^{\infty}-\Pi_m u_k^{\infty}\Pi_m w_{-k}^{\infty}\Big]+$$

$$+v_e^{1/2}\varepsilon\Big[\sum_{k_1+k_2=0}(\Pi_{-m}v_{k_1}^{\infty}\Pi_m v_{k_2}^{\infty}-\Pi_{-m}u_{k_1}^{\infty}\Pi_m w_{k_2}^{\infty}\Big]+$$

$$+v_e^{1/2}\varepsilon\Pi_m\Big[\sum_{k_1+k_2=0}(\Pi_m v_{k_1}^{\infty}\Pi_{-m}v_{k_2}^{\infty}-\Pi_m u_{k_1}^{\infty}\Pi_{-m}w_{k_2}^{\infty}\Big]+2v_e^{1/2}\varepsilon\ \mathcal{O}_0^{(m)}\,.$$

Для фиксированного k имеет место

$$Y_k^\infty(t)+D_k^\infty(t)-v_k^0T_k(e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t(L_e+3\varepsilon^2v_e^{1/2}v_0^\infty)d\tau})=\frac{1}{\varepsilon}d_k^+e^{ikt}+\frac{1}{\varepsilon}d_k^-e^{-ikt}+\varepsilon v_e^{1/2}d_k(t)$$

$$+v_e^{1/2}\varepsilon\left(3v_0^\infty v_k^\infty+v^\infty)A_k^{(1)}v_k^\infty+2[B(v^\infty,v^\infty)_k+Hv^\infty)_k]\right)$$

$$+Y_k^\infty(t)-Y_k^{(m)}(t)+D_k^\infty(t)-D_k^{(m)}(t)+v_k^0T_k[e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t(L_e+3\varepsilon^2v_e^{1/2}v_0^{(m)})d\tau}-e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t(L_e+3\varepsilon^2v_e^{1/2}v_0^\infty)d\tau}]$$

$$-v_e^{1/2}\varepsilon\ \Pi_{-m}\mathcal{K}_k(v^\infty,v^\infty)-v_e^{1/2}\varepsilon\ \Pi_m\mathcal{K}_k(\Pi_{-m}v^\infty,v^\infty)-v_e^{1/2}\varepsilon\ \Pi_m\mathcal{K}_k(\Pi_mv^\infty,\Pi_{-m}v^\infty)$$

$$+v_e^{1/2}\varepsilon\left(3(v^{(m)}-v_0^\infty)\Pi_mv_k^\infty+3v^{(m)}\,\Pi_m(v_k^\infty-v_k^{(m)})+v_e^{1/2}\varepsilon(v_0^{(m)}-v^\infty)A_k^{(1)}v_k^\infty+v_0^{(m)}A_k^{(1)}(v_k^\infty-v^\infty)\right.$$

$$\left.+2\Pi_m[B(v^{(m)},v^\infty)_k+B(v^{(m)},v^{(m)}-v^\infty)_k+H(v^{(m)}-v^\infty)_k]\right)+\mathcal{O}_k^{(m)}\,.$$

Здесь важно отметить, что $T_k^{-1}\mathcal{O}_k^{(m)}$ не принадлежит $L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu\varepsilon}(R_+)$.

Теперь отметим, что $\Pi_{-m}v_k^\infty$– это предел решений $v_k^{(m)}$, $|k|>m$, задачи (27), для которых очевидна оценка

$$\|v_k^{(m)}\|_{W^1_{L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu\varepsilon}(R_+)}}\leqslant c_0|v_k^0|\to 0,\quad m\to\ \infty\,.$$

Из полученных выше оценок следует, что

$$\frac{d}{dt}\,v_0^\infty(t)+\frac{1}{\varepsilon}L_ev_0^\infty(t)=-v_e^{1/2}\varepsilon\Big[\frac{3}{2}(v_0^\infty)^2+2\sum_{k_1+k_2=0}(v_{k_1}^\infty v_{k_2}^\infty-u_{k_1}^\infty w_{k_2}^\infty)\Big]\,,$$

$$T_kv_k^\infty(t)-v_k^0T_ke^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t(L_e+3\varepsilon^2v^{1/2}v_0^\infty)d\tau}=v_e^{1/2}\varepsilon\ \mathcal{K}_k(v^\infty,v^\infty)\,,\quad k\in Z_0\,. \tag{90}$$

в смысле интегрального тождества

$$\int_0^\infty\left[\frac{d}{dt}\,v_0^\infty(t)+\frac{1}{\varepsilon}\,L_ev_0^\infty(t)+v_e^{1/2}\varepsilon\Big(\frac{3}{2}(v_0^\infty)^2+2\sum_{k_1+k_2=0}(v_{k_1}^\infty v_{k_2}^\infty-u_{k_1}^\infty w_{k_2}^\infty)\Big)\right]\,\psi dt=0\,,$$

$$\int_0^\infty[T_kv_k^\infty(t)-v_k^0T_ke^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t(L_e+3\varepsilon^2v^{1/2}v_0^\infty)d\tau}-v_e^{1/2}\varepsilon\ \mathcal{K}_k(v^\infty,v^\infty)]\ \varphi dt=0\,,$$

для любой $\psi,\varphi(t)\in C_0^\infty(R_+)$. ■

Замечание. Для комплексификации (6) мы получаем точное решение (24)), поскольку в этом случае поправка $a^{(m)}$ в уравнении Риккати является константой и условие несикулярности позволяет точно решить систему для k мод, $|k|\geqslant 1$.

Теорема 4. *Пусть $\sigma>1$ и $v(0)\in H^\sigma$ и выполнены условия Предложения 1 для комплексификации (6). Тогда существует подпоследовательность $v_k^{(m)}(t)$, $k\in Z$ (которую будем обозначать также) решений задачи (25), (26), (27) с тем же начальными данными*

$v(0) \in H^\sigma$ такое, что $v_0^{(m)}(t)$ и $v_k^{(m)}(t)$, $k \in Z_0$ сходятся строго в $C_B(R_+)$ и $L_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)$ соответственно и слабо в $W^1_\infty(R_+)$ и $W^1_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)$ к функциям $v_0^\infty(t)$ и $v_k^\infty(t)$, $k \in Z_0$; $v_0^\infty(t), v_k^\infty(t), k \in Z_0$ являются решением задачи (8)(в смысле определения (24)) для всех $t \in R_+$, с ограниченными нормами

$$\|v_0^\infty(t) - v_{stn}^\infty(t)\|_{W^1_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+)} \leqslant M_\sigma\, |v^0|_{H^\sigma}\,, \quad \|\Xi^{(m)}\|_{H^{\sigma-1}}, \|\Upsilon^{(m)}\|_{H^{\sigma-1}} \leqslant c_0\|v^0\|_{H^\sigma}\,,$$

$$\|v^\infty(t) - \xi^\infty D^+ - \eta^\infty D^-\|_{W^1_{2,\gamma;0>\gamma>\mu\varepsilon}(R_+;A)} \leqslant M_\sigma\, |v_k^0|_{H^\sigma}\,,$$

с постоянной M_σ не зависящей от $k \in Z$.

□ В этом случае $a^{(m)}$ – константа. Секулярные члены в уравнении для $k-$ моды возникают только для пар $k_1 + k_2 = k$, т.е. для той же моды. Поэтому условиями секулярности можно убрать осциллирующие члены в правой части приближения Галеркина. Отсюда следует, что функции $v_k^{(m)}(t) \in L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu\varepsilon}$, $|k| \leqslant m$, $k \neq 0$. Также $(v_k^{(m)}(t) - v_{\rm stn}^{(m)}(t)) \in L_{2,\gamma;0>\gamma>-\mu\varepsilon}$ и $v_{\rm stn}^{(m)}(t) \to v^+(a^{(m)})$ при $t \to +\infty$ стабилизируется к предельной константе однородного уравнения Риккати, определяемой постоянной $a^{(m)}$.Из полученных выше оценок для комплексификации (6)следуют предельные уравнения

$$Y_k^\infty(t) + D_k^\infty(t) - v_k^0 T_k(e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t (L_e + 3\varepsilon^2 v_e^{1/2} v_0^\infty)d\tau}) = \frac{1}{\varepsilon}\, d_k^+ e^{ikt} + \frac{1}{\varepsilon}\, d_k^- e^{-ikt} + \varepsilon v_e^{1/2} d_k(t)$$

$$+ v_e^{1/2}\varepsilon\, \Big(3v_0^\infty\, v_k^\infty + v_0^\infty A_k^{(1)} v_k^\infty + 2[B(v^\infty, v^\infty)_k + H(v^\infty)_k]\Big)\,,$$

$$v_0^\infty(t) - v_0^0 e^{-\frac{1}{\varepsilon}\, L_e t} = -v_e^{1/2}\varepsilon \int_0^t\, e^{-\frac{1}{\varepsilon}\, L_e(t-s)}\, \Big[\frac{3}{2}(v_0^\infty)^2 + 2 \sum_{k_1+k_2=0} (v_{k_1}^\infty v_{k_2}^\infty - u_{k_1}^\infty w_{k_2}^\infty)\Big] ds$$

для всех $t \in R_+$. ■

Как следствие этих результатов получаем

Теорема 5. *Пусть $\sigma > 2$, начальные данные $v^0 \in H^\sigma(0, 2\pi)$, и выполнены условия Предложения 2 (условие несекулярности, законы сохранения для начальных данных и условия малости нормы $\|v^0\|_{H^\sigma}$). Тогда построенное решение системы (25), (26), (27) является глобальным классическим решением задачи (4) в малой окрестности точки равновесия и удовлетворяет системе почти всюду. Из за осцилляции во времени $v_{\rm stn}$ нулевая мода функции $v(x,t)$ осциллирует так же как п нулевые моды функций $u(x,t)$ и $w(x,t)$.*

Терема 6. *Пусть $\sigma > 1$, начальные данные $v^0 \in H^\sigma(0, 2\pi)$, выполнены условия Предложения 1 (условие несекулярности, законы сохранения для начальных данны п условия малости нормы $\|v^0\|_{H^\sigma}$). Тогда построенное решение системы (25), (26), (27) для системы (6) является глобальным классическим решением этой задачи в малой окрестности точки равновесия и удовлетворяет системе для всех $t \in R_+$. Функция $v(x,t)$ стабилизируется к константе. Осцилляции в противофазе на больших временах функций $u(x,t), w(x,t)$ остается за счет пнтегро-псевдодифференциальных членов в уравнениях состояния.*

Заключение. Можно сделать следующие выводы.

1. В построенном решении задачи Коши для системы (6), для вещественных начальных данных, функция $a^{(m)}(t)$ равномерно по t сходится при $m \to +\infty$ к постоянной. Поэтому функция $v(x,t)$ стабилизируется к константе, возможно не равной нулю, а функции $u(x,t), w(x,t)$ осциллируют при больших значениях t в противофазе. Остается вопрос о том, совпадают ли построенные решение для задачи Коши для систем (4) и (6) для одних и тех же начальных вещественных данных. Проблеме единственности слабого решения как для модели (4), так и модели (6), в более общей ситуации $\sigma \geqslant 0$ будет посвящена ближайшая публикации.

2. В этой статье мы рассмотрели модели типа Бродуэлла [2] (дискретных уравнений Больцмана, см. [1]) спонтанной потери симметрии. Часто хиральная специфичность биоорганического мира воспринимается как феномен нарушения зеркальной симметрии, проявляющийся в существовании жизни [3], [4]. Сразу возникает вопрос, а где именно искать причины нарушения симметрии–в ходе химической, предбиологической или же биологической эволюции. Интуитивно эти этапы молекулярной эволюции представляются различными, но какими бы они не были, они привели к возникновению уникального полимерного мира–гомохиральных молекул, обладающих удивительными структурными и функциональными свойствами. Ключевой является проблема–как возникли гомохиральные молекулы, сложность которых адекватна сложности информационных и функциональных носителей в биологии? Ответ на этот вопрос во многом, если не во всем, может определить подход и к вопросу о причинах нарушения зеркальной симметрии биосферы в целом [3]. Но потеря симметрии–это не только природа биологической среды. Многие эффекты неравновесности неорганического мира, как например ликвация [15] (начальная стадия разделения на фазы в жидкостях, сплавах и даже газах) можно смоделировать как спонтанную потерю симметрии (классическая триада Ван дер Ваальса-двух устойчивых зон и одной неустойчивой). Эти факты определяют интерес к моделям потери зеркальной симметрии.

3. Все полученные результаты переносятся на двумерную и трехмерную модели (1), приведенные в [1]. Естественно, технически это намного сложнее, но суть одна. Полученные результаты позволяют выдвинуть дерзкую гипотезу о структуре решения кинетического уравнения Больцмана в окрестности распределения Максвелла. На больших временах для парных взаимодействий возмущения распределения Максвелла имеют локальный аттрактор, размерность которого равна числу законов сохранения, и диссипация определяется бесконечномерным уравнением Риккати, имеющим сепаратрисное решение.

Литература

1. Годунов С.К., Султангазин У.М. О дискретных моделях кинетического уравнения Больцмана // Успехи МН(1971). – т. XXVI, в. 3(159), стр. 3-51.

2. Broadwell T.E. Study of rarified shear flow by the discrete velocity method // J. of Fluid Mechanics. – 1964. – 19:3.

3. Аветисов В.А., Гольданский В.И. Физические аспекты нарушения зеркальной симметрии биоорганического мира // Успехи Ф.Н. – 166;8. – С.73-891.

4. Chirality: from the weak Bozon to α-Helix / Ed. R. Janoschek. – New York: Springer-Verlag, 1991.

5. Boltzmann L. On the Maxwell method to the reduction of hydrodynamic equations from the kinetic gas theory / Rep. Brit. Assoc (1894) in the L. Boltzmann memories, v.2/ M.: Nauka, 1984. – P.307-321. [in Russian].

6. Radkevich E.V. Mathematical Aspects of Nonequilibrium Processes / Novosibirsk: Tamara Rozhkovskaya Publisher, 2007. [in Russian].

7. Gurtin M.E., Pipkin A.C. Theory of heat conduction with finite wave speed // Arch. Rat. Mech. Anal. – 1968. – 31. – P.113-126.

8. Веденяпин В.В. Кинетические уравнения Больцмана и Власова // В.В. Веденяпин. – М.: ФИЗМАТЛИТ,2001.

9. Chapman S., Cowling T. Mathematical Theory on Non-uniform Gases / S. Chapman. – Cambridge: Cambridge University Press, 1970.

10. Chen G.Q., Levermore C.D., Lui T.P. Hyperbolic conservation laws with stiff relaxation terms and entropy // Commun. Pure Appl. Math. – 1994. – 47;6. – P.787-830.

11. Palin V.V., Radkevich E.V. Mathematical aspects of the Maxwell problem // Applicable Analysis. – 2009. – 88;8. – P.1233-1264.

12. Radkevich E.V. Problems with insufficient information about initial-boundary data // Advances in Mathematical Fluid Mechanics/ Special AMFM Volume in Honour of Professor Kazhikhov / Volume editor(s): A. Fursikov, G.P. Galdi, V. Pukhnachov / Birkhauser Verlag, 2009. – P.347-376.

13. Palin V.V., Radkevich E.V. Hyperbolic Regularizations of Conservation Laws // Russian Journal of Mathematical Physics. – 2008. – 15;3. – P.343-363.

14. Babin A.V., Ilyin A.A., Titi E.S. On the regularization mechanism for the periodic KdV equation // Comm. on Pure and Appl.Math. – 2011. – LXIV, 0591-0648.

15. Radkevich E.V. On structures in instability zones // Journal of Mathematical Sciences. – 2010. – 165;1.

OSCILLATIONS GENERATED BY INTERACTION OPERATOR IN DISCRETE KINETIC EQUATIONS

E.V. Radkevich

Moscow State University,
V-899, Moscow, 119899, Russia, e-mail: evrad07@gmail.com

Abstract. It is proved the existence of global solution of discrete kinetic equations. Besides, it is obtained its expansion according to smoothness and it is studied the influence of oscillations generated by interaction operator.

Key words: kinetic equation, global solution, interaction operator, circular terms.