УДК 517.9

ОПЕРАЦИЯ B-ЛИУВИЛЛЕВСКОГО ТИПА

А.А. Феоктистова

Липецкий государственный педагогический университет,
Ленина ул., 42, Липецк, 398050, Россия, e-mail: alek-feoktistova@yandex.ru

Аннотация. В данной работе вводится операция B-лиувиллевского типа, порожденная преобразованием Фурье-Бесселя. На основе этой операции введено понятие регулярной весовой обобщенной функции и получено представление B-лиувилевской операции в виде смешанной обобщенной свертки с весовым ядром Бесселя-Макдональда.

Ключевые слова: преобразование Фурье-Бесселя, ядро Бесселя-Макдональда, операция лиувиллевского типа.

Введение

Операции лиувиллевского типа (обычно обозначается I_r), определяемые ядрами Бесселя-Макдональда, носят универсальный характер. С.М. Никольский в [1] использует операцию I_r для интегрального представления функций из классов Лиувилля, Бесова, Никольского. Весовые ядра Бесселя-Макдональда (сокращенно – γ-ядра) возникают по классичесой схеме, как прообраз Фупье-Бесселя функции $(1+|\xi|^2)^{-r/2}$. Некоторые их свойства исследованы в работах Л.Н. Ляхова [2], [3], М.В. Половинкиной [4]. В данной работе исследуется операция B-лиувиллевского типа, порожденная преобразованием Фурье-Бесселя. Следуя [1], вводится понятие регулярной в смысле L_p^γ весовой обобщенной функции, установлено представление операции B-лиувилевского типа в виде смешанной обобщенной свертки. При этом использовались методы исследования классических операций лиувиллевского типа из книги С.М. Никольского [1].

Пусть $R_N^+ = R_n^+ \times R_{N-n}$, $1 \le n < N$. Введем обозначения $u=(x,y)$, $x \in R_n^+$, $y \in R_{N-n}$. Переменную x размерности n, по смыслу рассматриваемых здесь задач, будем называть весовой.

Через $S_{ev} = S_{ev}(R_N^+)$ обозначим подпространство пространства Шварца основных функций $S(R_N)$, состоящее из функций, четных по каждой из весовых переменных u_i и u_j, $i=1,\ \ldots\ ,k$ и $j=n+1,\ \ldots\ ,n+m$. Пространство весовых обобщенных функций $S'_{ev} = S'_{ev}(R_N^+)$ определяется на основе весовой линейной формы

$$(f\,,\,\varphi)_\gamma = \int\limits_{R_N^+} f(u)\,\varphi(u)\,u^\gamma\,du\,,$$

где $\gamma > 0$ фиксировано.

Через $L_p^\gamma(R_N^+)$ для $1 \le p \le \infty$ будем обозначать банахово пространство, состоящее из измеримых на R_N^+ функций $\varphi(u)$, для которых конечна норма

$$\|\varphi\|_{L_p^\gamma(R_N^+)} = \left(\int\limits_{R_N^+} |\varphi(u)|^p u^\gamma du\right)^{\frac{1}{p}},$$

где $\gamma=(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$, $u^\gamma=\prod\limits_{i=1}^{n}u_i^{\gamma_i}$, а показатель γ_i равен индексу соответствующего сингулярного дифференциального оператора Бесселя

$$B_{u_i}=\frac{\partial^2}{\partial u_i^2}+\frac{\gamma_i}{u_i}\cdot\frac{\partial}{\partial u_i}=u_i^{-\gamma_i}\frac{\partial}{\partial u_i}\left(u_i^{\gamma_i}\frac{\partial}{\partial u_i}\right), \qquad \gamma_i>0\,.$$

Смешанное преобразование Фурье-Бесселя определяется следующим выражением

$$\widehat{\varphi}(v)=F_B[\varphi](v)=\int\limits_{R_N^+}\varphi(u)\;j_\gamma(x,\xi)\;e^{-i\langle y,\eta\rangle}x^\gamma du\,, \qquad v=(\xi,\eta)\in R_n^+\times R_{N-n}\,,$$

где по весовым переменным x применяется преобразование Фурье-Бесселя, а по переменным y – преобразование Фурье. При этом мы используем обозначение

$$j_\gamma(x,\xi)=\prod_{i=1}^{n}j_{\frac{\gamma_i-1}{2}}(u_i\,v_i)\,,$$

в котором j_ν — j-функция Бесселя , связанная с функцией Бесселя первого рода равенством

$$j_\nu(u_i)=2^\nu\Gamma(\nu+1)J_\nu/u_i^\nu\,.$$

Как известно (см. [5]), смешанное преобразование Фурье-Бесселя обратимо в классе функций $S_{ev}(R_N^+)$, обратное преобразование определяется выражением

$$\varphi(u)=F_B^{-1}[\varphi](u)=A(N,n,\gamma)F_B[\varphi](-u)\,,$$

где

$$A(N,n,\gamma)=A=2^{n-|\gamma|}(2\pi)^{n-N}\prod_{i=1}^{n}\Gamma^{-2}\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\,.$$

Обобщенный сдвиг $T_{u_i}^h$ по одной из весовых переменных, действует по формуле

$$T_{u_i}^{v_i}:f\to(T_{u_i}^{v_i}f)(u)=\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\;\Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)}\times$$

$$\times\int_0^\pi f\left(u_1,\ldots,u_{i-1},u_i\xrightarrow{\alpha_i}v_i,u_{i+1},\ldots,u_N\right)\,\sin^{\gamma_i-1}\alpha_i\;d\alpha_i\,,$$

и введено обозначение $u_i\xrightarrow{\alpha_i}v_i=\sqrt{u_i^2+v_i^2-2u_iv_i\cos\alpha_i}$, $i=1,\ldots,n$. Смешанный обобщенный сдвиг определим выражением

$$(T^vf)(u)=\prod_{i=1}^{n}T_{u_i}^{v_i}f(x',x''-t)\,.$$

Обобщенной сверткой функций $f,\;g\in L_p^\gamma(R_N^+)$ будем называть (см. [5])

$$(f*g)_\gamma(u)=\int\limits_{R_N^+}f(v)T_u^vg(u)v^\gamma dv\,.$$

1. Операция B-лиувиллевского типа

Операцию $F = I_{\gamma,r}f = F_B^{-1}\left[(1+|v|^2)^{-\frac{r}{2}}F_B[f]\right]$, отвечающую действительному числу r, будем называть *операцией B-лиувиллевского типа.* Поскольку функция $[(1+|v|^2)^{-\frac{r}{2}}$ является мультипликатором основного пространства S_{ev}, то эта операция отображает S'_{ev} на себя взаимно однозначно.

Пусть r и ρ — произвольные действительные числа и $f \in S'_{ev}(R_N^+)$. Тогда

$$I_{\gamma,r+\rho}f = F_B^{-1}\left[(1+|v|^2)^{-\frac{r}{2}}(1+|v|^2)^{-\frac{\rho}{2}}\,F_B[f]\right] =$$

$$= F_B^{-1}\left[(1+|v|^2)^{-\frac{r}{2}}\,F_B[I_{\gamma,\rho}f]\right] = I_{\gamma,r}I_{\gamma,\rho}f\,.$$

Таким образом, операция $I_{\gamma,r}$ обладает полугрупповым свойством. Кроме того, для $\rho = -r$ имеем $I_{\gamma,r}I_{\gamma,-r}f = I_{\gamma,0}f = f$, т.е. операции $I_{\gamma,r}$ и $I_{\gamma,-r}$ взаимно обратны.

Лемма. *Для функций $f \in L_p^{\gamma}(R_N^+)$ $(1 \le p \le \infty)$ операция $I_{\gamma,r}$ при $r > 0$ сводится к обобщенной свертке*

$$F = I_{\gamma,r}f(u) = \left(G_\gamma^r * f\right)_\gamma = \int\limits_{R_N^+} f(v)T_u^v G_\gamma^r(u)v^\gamma dv\,, \tag{1}$$

с весовым ядром Бесселя-Макдональда $G_\gamma^r = F_B^{-1}(1+|v|^2)^{-\frac{r}{2}}$.

□ Для $f \in L_p^{\gamma}(R_N^+)$, $\varphi \in S_{ev}(R_N^+)$ имеем

$$(I_{\gamma,r}f,\varphi)_\gamma = \left(f, F_B\left[(1+|v|^2)^{-\frac{r}{2}}F_B^{-1}[\varphi]\right]\right)_\gamma\,. \tag{2}$$

По определению обратного смешанного преобразования Фурье-Бесселя

$$F_B\left[(1+|v|^2)^{-\frac{r}{2}}F_B^{-1}[\varphi](v)\right] = AF_B\left[(1+|v|^2)^{-\frac{r}{2}}F_B[\varphi](-v)\right] =$$

$$= A\int\limits_{R_N^+}(1+|v|^2)^{-\frac{r}{2}}F_B[\varphi](-v)\,j_\gamma(u',v')\;e^{-i\langle u'',v''\rangle}v^\gamma dv\,.$$

При дробном γ_i функция $v_i^{\gamma_i}$ — многозначная функция действительного переменного, и упрощая ситуацию, мы можем взять одну из ветвей этой функции, полагая $v^\gamma = \left[v^2\right]^{\frac{\gamma}{2}}$. Тогда имеем

$$F_B\left[(1+|v|^2)^{-\frac{r}{2}}F_B^{-1}[\varphi](v)\right] = A\int\limits_{R_N^+}(1+|v|^2)^{-\frac{r}{2}}F_B[\varphi](v)\,j_\gamma(u',-v')\;e^{i\langle u'',v''\rangle}\;v^\gamma\;dv\,.$$

Учитывая, что функция $j_\gamma(u',v')$ — четная по каждой из весовых переменных $v_1,\ldots,v_k$ и $v_{n+1},\ldots,v_{n+m}$, получаем

$$F_B\left[(1+|v|^2)^{-\frac{r}{2}}F_B^{-1}[\varphi](v)\right] = F_B^{-1}\left[(1+|v|^2)^{-\frac{r}{2}}F_B[\varphi](v)\right]\,.$$

Следовательно, продолжая равенство (2), запишем

$$(I_{\gamma,r}f,\varphi)_\gamma=\left(f,F_B^{-1}\left[(1+|v|^2)^{-\frac{r}{2}}F_B[\varphi](v)\right]\right)_\gamma=\int\limits_{R_N^+}f(u)\,u^\gamma du\int\limits_{R_N^+}T_u^vG_\gamma^r(v)\,\varphi(v)\,v^\gamma\,dv\,. \qquad (3)$$

Теперь учтем, что ядро G_γ^r является абсолютно интегрируемой функцией (см. [4]). Поэтому его свертка с основной функцией является снова основной функцией. Следовательно, можно воспользоваться теоремой Фубини о перестановке пределов интегрирования. В результате

$$(I_{\gamma,r}f,\varphi)_\gamma=\int\limits_{R_N^+}\varphi(v)v^\gamma dv\int\limits_{R_N^+}f(u)(T^vG_\gamma^r)(u)\,u^\gamma\,du\,.$$

Но это и есть равенство (1). ■

С помощью операции B-лиувиллевского типа можно расширить понятие смешанной обобщенной свертки.

Определение 1. *Функция $\mu(u)$ называется FB-мультипликаторм в $L_p^\gamma(R_N^+)$, $1\le p\le\infty$, если она измерима, четная по каждой из переменной $u_1,\dots,u_k$ и $u_{n+1},\dots,u_{n+m}$, и для любой функции $\varphi(u)\in S_{ev}(R_N^+)$ выполняется неравенства*

$$\|F_B^{-1}[\mu\varphi]\|_{L_p^\gamma(R_N^+)}\le c_p\|\varphi\|_{L_p^\gamma(R_N^+)}\,.$$

Определение 2. *Функция $f\in S'_{ev}(R_N^+)$ называется регулярной в смысле $L_p^\gamma(R_N^+)$, если для некоторого $\rho_0>0$ имеет место равенство*

$$I_{\gamma,\rho_0}f=F\in L_p^\gamma(R_N^+)\,. \qquad (4)$$

Пусть μ – FB-мультипликатор в $L_p^\gamma(R_N^+)$ и $F_B[\mu]\in L_1^\gamma(R_N^+)$, а f – регулярная в смысле L_p^γ функция, для которой выполняется равенство (4). Для $\rho\ge\rho_0$ справедливо равенство

$$(\hat\mu*f)_\gamma=I_{\gamma,-\rho}\,(\hat\mu*I_{\gamma,\rho}f)_\gamma\,. \qquad (5)$$

Действительно,

$$(\hat\mu*f)_\gamma=F_B^{-1}\left[F_B[(\hat\mu*f)_\gamma]\right]=F_B^{-1}\left[F_B[\hat\mu]\cdot F_B[f]\right]=$$

$$=F_B^{-1}\left[F_B[\hat\mu]\cdot\frac{(1+|v|^2)^{-\frac{\rho}{2}}}{(1+|v|^2)^{-\frac{\rho}{2}}}F_B[f]\right]=F_B^{-1}\left[F_B[\hat\mu]\cdot(1+|v|^2)^{\frac{\rho}{2}}F_B[I_{\gamma,\rho}f\right]=$$

$$=F_B^{-1}\left[(1+|v|^2)^{\frac{\rho}{2}}F_B\,(\hat\mu*I_{\gamma,\rho})_\gamma\right]=I_{\gamma,-\rho}(\hat\mu*I_{\gamma,\rho}f)_\gamma\,.$$

Теорема. *Пусть $\mu\in L_1^\gamma(R_N^+)$ – FB-мультипликатор и $\hat\mu=F_B^{-1}[\mu]$. Для регулярной в смысле $L_p^\gamma(R_N^+)$ весовой обобщенной функции $f\in S'_{ev}$ при любых значениях ρ' имеет место равенство*

$$I_{\gamma,-\rho'}\left(\hat\mu*I_{\gamma,\rho'}f\right)_\gamma=(\hat\mu*f)_\gamma\,. \qquad (6)$$

☐ По определению (4) для $f \in S'_{ev}(R^+_N)$ существует $\rho > 0$ такое, что $I_{\gamma,\rho} f \in L^\gamma_p(R^+_N)$. Пусть $\rho' \geq \rho$, тогда при $\rho' - \rho = r$ получаем

$$I_{\gamma,-\rho'}\left(\hat\mu * I_{\gamma,\rho'} f\right)_\gamma = I_{\gamma,-(\rho+r)}\left(\hat\mu * I_{\gamma,\rho+r} f\right)_\gamma = I_{\gamma,-\rho} I_{\gamma,-r}\left(\hat\mu * I_{\gamma,\rho} I_{\gamma,r} f\right)_\gamma =$$

$$= I_{\gamma,-\rho} I_{\gamma,-r} F_B^{-1}\left[F_B\left[\left(\hat\mu * I_{\gamma,\rho} I_{\gamma,r} f\right)_\gamma\right]\right] =$$

$$= I_{\gamma,-\rho} I_{\gamma,-r} F_B^{-1}\left[\mu\,(1+|v|^2)^{-\frac{\rho}{2}}(1+|v|^2)^{-\frac{r}{2}} F_B[f]\right] =$$

$$= I_{\gamma,-\rho} F_B^{-1}\left[(1+|v|^2)^{\frac{r}{2}}\mu\,(1+|v|^2)^{-\frac{\rho}{2}}(1+|v|^2)^{-\frac{r}{2}} F_B[f]\right] =$$

$$= I_{\gamma,-\rho} F_B^{-1}\left[\mu \cdot F_B\left[I_{\gamma,\rho} f\right]\right] = I_{\gamma,-\rho}\left(\hat\mu * I_{\gamma,\rho} f\right)_\gamma .$$

Тогда, учитывая (5), имеем

$$I_{\gamma,-\rho'}\left(\hat\mu * I_{\gamma,\rho'} f\right)_\gamma = I_{\gamma,-\rho}\left(\hat\mu * I_{\gamma,\rho} f\right)_\gamma = (\hat\mu * f)_\gamma .$$

Пусть теперь $\rho' < \rho$ и положим $\rho = \rho' + q$, $(q > 0)$. Значит функция $I_{\gamma,\rho'} f$ регулярна в смысле L^γ_p, тогда $I_{\gamma,q} I_{\gamma,\rho'} f \in L^\gamma_p(R^+_N)$. Поэтому, используя равенство (5) для $q > 0$ и полугрупповое свойство операции B-лиувилевского типа $I_{\gamma,r}$, имеем

$$I_{\gamma,-\rho'}\left(\hat\mu * I_{\gamma,\rho'} f\right)_\gamma = I_{\gamma,-\rho'} I_{\gamma,-q}\left(\hat\mu * I_{\gamma,q} I_{\gamma,\rho'} f\right)_\gamma = I_{\gamma,-\rho}\left(\hat\mu * I_{\gamma,\rho} f\right)_\gamma = (\hat\mu * f)_\gamma .$$

Тем самым получено утверждение (6). ■.

Из равенства (6) следует, что для регулярных в смысле L^γ_p функций f и любого действительного числа r имеет место равенство

$$I_{\gamma,r}\left(\hat\mu * f\right)_\gamma = I_{\gamma,r} I_{\gamma,-r}\left(\hat\mu * I_{\gamma,r} f\right)_\gamma = \left(\hat\mu * I_{\gamma,r} f\right)_\gamma . \tag{7}$$

Таким образом, к регулярной в смысле $L^\gamma_p(R^+_N)$ функции f операцию $I_{\gamma,r}$ можно применить под знаком обобщенной свертки.

Кроме того, если μ – FB-мультипликатор, f регулярная в смысле L^γ_p функция, из (7) следует, что обобщенная свертка $\hat\mu * f$ – регулярная в смысле $L^\gamma_p(R^+_N)$ функция. Действительно, для $I_{\gamma,r} f \in L^\gamma_p(R^+_N)$ имеет место равенство (7). Причем $\hat\mu * I_{\gamma,r} f \in L^\gamma_p(R^+_N)$, тогда $I_{\gamma,r}\left(\hat\mu * f\right)_\gamma \in L^\gamma_p(R^+_N)$. Отсюда по определению 2 следует, что $(\hat\mu * f)_\gamma$ регулярная в смысле $L^\gamma_p(R^+_N)$ функция.

Для μ и λ – FB-мультипликаторов и $f \in L^\gamma_p(R^+_N)$ $(1 \leq p < \infty)$ в терминах обобщенных сверток имеем

$$\left(\hat\lambda * (\hat\mu * f)_\gamma\right)_\gamma = \left(\hat\mu * (\hat\lambda * f)_\gamma\right)_\gamma = \left(\widehat{\lambda\mu} * f\right)_\gamma . \tag{8}$$

Кроме того, из (8) следует, что если μ и λ — FB-мультипликаторы, то $(\lambda\mu)$ тоже FB-мультипликатор. Пусть f – регулярная в смысле L^γ_p весовая обобщенная функция, $I_{\gamma,\rho} f \in L^\gamma_p(R^+_N)$ $(\rho > 0)$. Тогда равенства (8) будут выполняться, если в них вместо f подставить $I_{\gamma,\rho} f$

$$\left(\hat\lambda * (\hat\mu * I_{\gamma,\rho} f)_\gamma\right)_\gamma = \left(\hat\mu * (\hat\lambda * I_{\gamma,\rho} f)_\gamma\right)_\gamma = \left(\widehat{\lambda\mu} * I_{\gamma,\rho} f\right)_\gamma .$$

Применяя равенство (7), имеем

$$I_{\gamma,\rho}\left(\hat\lambda * (\hat\mu * f)_\gamma\right)_\gamma = I_{\gamma,\rho}\left(\hat\mu * (\hat\lambda * f)_\gamma\right)_\gamma = I_{\gamma,\rho}\left(\widehat{\lambda\mu} * f\right)_\gamma .$$

Тогда равны между собой функции, стоящии под знаком $I_{\gamma,\rho}$, откуда следует, что (8) имеет место для любой регулярной в смысле L_p^γ весовой обобщенной функции.

Литература

1. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения / М.:Наука, 1977. – 436 с.
2. Ляхов Л.Н. B-гиперсингулярные интегралы и их приложения к описанию функциональных классов Киприянова и к интегральным уравнениям с B-потенциальными ядрами // Липецк: ЛГПУ, 2007. – 232 с.
3. Ляхов Л.Н. Описание пространств B-потенциалов Бесселя B-гиперсингулярными интегралами // Условно-корректные задачи математической физики и анализа: Тез. докл. научн. конф., Новосибирск, 1-5 июня 1992г./ ИМ СО РАН. – Новосибирск, 1992. – С.202-203.
4. Половинкина М.В. B-гиперсингулярные интегралы и их приложения к описанию весовых функциональных классов дробной гладкости / Автореферат диссертации к.ф.-м.н. / Воронеж, 2009. – 16 с.
5. Киприянов И.А. Сингулярные эллиптические краевые задачи / М.: Наука, 1997. – 200 с.

Operation B-Liouville type

A.A. Feoktistova

Lipetsk State Pedagogical University,
Lenina St., 42, Lipetsk, 398050, Russia, e-mail: alek-feoktistova@yandex.ru

Adstract. The operation of B-Liouville type generated by the weighted Bessel-Macdonald kernel is introduced. The concept of regular generalized weigh function is proposed using the operation of B-Liouville type and representation of B-Lioville operations in the form of mixed generalized convolution with a weight of Bessel-Macdonald kernel.

Key words: Fourier-Bessel's transformation, Bessel-Macdonald's kernel, operation of B-Liouville type.