УДК 517.987

ПЕРКОЛЯЦИЯ БЕРНУЛЛИЕВСКОГО ОДНОРОДНОГО ПОЛЯ НА БЕСКОНЕЧНОМЕРНОЙ РЕШЕТКЕ [21)]

Ю.П. Вирченко

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308000, Россия, e-mail: virch@bsu,edu.com

Аннотация. Доказано, что однородное бернуллиевское поле на бесконечномерной решетке $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ обладает перколяцией с вероятностью единица при неравной нулю концентрации.

Ключевые слова: бесконечномерная решетка, однородное сдучайное бернуллиевское поле, перколяция.

Будем рассматривать множество

$$\mathbb{Z}^{\mathbb{N}} = \{x = \langle n_k; k \in \mathbb{N} \ : n_j \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{N}\rangle\}$$

с элементами, которые мы будем далее называть узлами, и случайное однородное бернуллиевское поле $\langle \tilde{c}(x); x \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}\rangle$, то есть областью значений случайной функции $\tilde{c}$ является $\{0,1\}$ и все случайные величины $\tilde{c}(x)$, $x \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ статистически независимы в совокупности. При этом распределение вероятностей определяется одним параметром

$$c = \Pr\{\tilde{c}(x) = 1\}\,, \quad x \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}\,.$$

Такое распределение вероятностей приводит к тому, что для любого множества $A \subset \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ и любой функции $\theta : A \mapsto \{0,1\}$ имеет место

$$\Pr\{\tilde{c}(x) = \theta(x); x \in a\} = c^{|A_+|}(1-c)^{|A_-|}\,, \tag{1}$$

где $A_+ = \{x : \theta(x) = 1\}$, $A_- = \{x : \theta(x) = 0\}$, $A = A_+ \cup A_-$.

Вводя на $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ *отношение смежности* φ для пар узлов $x, y \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, $x = \langle n_k; k \in \mathbb{N}\rangle$, $y = \langle m_k; k \in \mathbb{N}\rangle$ по формуле

$$x\varphi y \Longleftrightarrow \exists \left(l \in \mathbb{Z} : m_l = n_l = \pm 1 \vee \left[\forall \left(k \neq l : m_k = n_k\right)\right]\right)\,,$$

мы превращаем $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ в бесконечномерный неориентированный граф (без петель и кратных ребер), который мы будем обозначать тем же символом и называть *бесконечномерной решеткой.*

Отношение смежности позволяет ввести пути на $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ (конечные или бесконечные). Конечный путь $\gamma(x,y)$ длины n – это последовательность $\langle x_0 = x, x_1, ..., x_{n-1}, x_n = y\rangle$, для которой $x_i \varphi x_{i+1}$, $i = 0 \div n-1$. Соответственно бесконечный путь $\gamma(x)$ с начальным узлом x – это бесконечная последовательность $\gamma(x) = \langle x_0 = x, x_1, x_2, ...\rangle$, для которой $x_i\varphi x_{i+1}$, $i \in \mathbb{N}_+$. Путь называется несамопересекающимся, если для любых допустимых номеров k и l имеет место $x_k \neq x_l$. Класс всех конечных несамопересекающихся путей длины n обозначим посредством Γ_n и, соответственно, Γ – класс всех бесконечных несамопересекающихся путей.

[21]Работа выполнена в рамках ФЦП ГК № 02.740.11.0545

Понятие перколяции формулируется естественным образом в терминах случайного множества, с которым связано взаимно однозначным образом каждое дихотомическое случайное поле $\langle \tilde{c}(x); x \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \rangle$, а именно, такое поле определяет случайное множество с реализациями $\{\tilde{W} \subset \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}\}$, которые строятся по формуле $\tilde{W} = \{x : \tilde{c}(x) = 1\}$, и с индуцированном этим полем распределением вероятностей. Для однородного бернуллиевского поля $\langle \tilde{c}(x); x \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \rangle$ такое индуцированное распределение вероятностей, согласно (1), определяется формулой

$$\Pr\{A \cap \tilde{W} = A_+\} = c^{|A_+|}(1-c)^{|A_-|}, \tag{2}$$

для любого множества $A \subset \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ и любого $A_+ \subset A$ ($A_- = A \setminus A_+$).

На основе понятия пути вводится отношение связности на случайной реализации $\tilde{W}$, которое является отношением эквивалентности. Это отношение позволяет разложить каждую реализацию на дизъюнктивное семейство связных компонент (кластеров) так, что для каждой вершины $x \in \tilde{W}$ существует единственная содержащая ее связная компонента $\tilde{W}(x)$.

В конечномерном случае понятие перколяции случайного множества $\{\tilde{W} \subset \mathbb{Z}^d\}$, $d \in \mathbb{N}$ вводится требованием положительности вероятности

$$Q(c) = \Pr\{|\tilde{W}(x)| = \infty\} > 0\,. \tag{3}$$

Оно эквивалентно утверждению о том, что

$$\Pr\{\exists(\gamma(x) \subset \tilde{W} : \gamma(x) \in \Gamma)\} = Q(c) > 0\,.$$

В бесконечномерном случае мы будем исходить из определения перколяции, которое состоит в требовании положительности вероятности

$$P(c) \equiv \Pr\{\mathrm{diam}(\tilde{W}(x)) = \infty\} > 0 \tag{4}$$

и которое является, очевидным образом, более сильным по сравнению с тем, которое получается простым распространением формулы (3) на бесконечномерный случай.

Расстоянием между двумя узлами $x = \langle n_k; k \in \mathbb{N} \rangle$, $y = \langle m_k; k \in \mathbb{N} \rangle$ назовем число

$$\mathrm{dist}(x,y) = \sum_{k \in \mathbb{N}} |n_k - m_k|\,.$$

Расстояние между узлом x и множеством $A \subset \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ определим как минимальное из расстояний между всеми узлами $y \in A$ и узлом x,

$$\mathrm{dist}(x,A) = \min\{\mathrm{dist}(x,y); y \in A\}\,.$$

Для любого кластера W множество

$$\partial W = \{y \in \complement W : \exists(z \in W : y\varphi z)\}$$

назовем границей этого кластера. Легко устанавливается, что, в терминах границ кластеров, рассматриваемое нами определение (4) перколяции на $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ переформулируется следующим образом:

$$\Pr\{\mathrm{dist}(x, \partial W(x)) = \infty\} = P(c) > 0\,. \tag{5}$$

Настоящее сообщение посвящено доказательству, для случая бернуллиевского поля на бесконечномерной решетке, утверждения, которое содержательно звучит как: «в бесконечномерной перколяционной системе порог перколяции равен нулю», и в таком виде оно присутствует в фольклоре среди специалистов по статистической физике. Мы докажем следующую теорему.

Теорема. *Условная вероятность*

$$R = \Pr\{\mathrm{diam}(\tilde{W}(x)) = \infty \,|\, \tilde{c}(x) = 1\}$$

равна единице.

Тогда следствием этого утверждения является формула

$$P(c) = c\,.$$

Доказательство теоремы основано на двух фактах. Один из них отражает структуру смежности бесконечномерной решетки, а именно, *для любого узла* $y \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ *имеет место* $|\partial\{y\}| = \infty$. Второй факт является следствием следующего утверждения.

Лемма. *Пусть* A *– произвольное бесконечное множество узлов из* $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ *и имеется произвольная функция* $\theta : A \mapsto \{1, 0\}$. *Тогда для однородного бернуллпевского поля* $\{\tilde{c}(x); x \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}\}$, $\Pr\{\tilde{c}(z) = 1\} = c$ *с* $0 < c < 1$, *имеет место*

$$\Pr\{\tilde{c}(x) = \theta(x); x \in A\} = 0\,.$$

□ Определим множества

$$A_+ = \{x \in A : \theta(x) = 1\}\,, \qquad A_- = \{x \in A : \theta(x) = 0\}\,.$$

По крайней мере, одно из них, бесконечномерно. Тогда, согласно определению однородного бернуллпевского поля,

$$\Pr\{\tilde{c}(x) = \theta(x)\} = c^{|A_+|}(1-c)^{|A_-|} = 0\,. \blacksquare$$

Следствие. *Пусть* $|A| = \infty$. *Тогда* $\Pr\{A \subset \tilde{W}\} = 0$.

Доказательство теоремы. Но ограничивая общности, далее рассматриваем только кластер $\tilde{W}(0) \equiv \tilde{W}$. Требуется доказать, что $\Pr\{\mathrm{diam}(\tilde{W}) < \infty\} = 0$.

1. Для кластера $\tilde{W}$ обозначим $d(\tilde{W}) = \max\{\mathrm{dist}(0, y); y \in \tilde{W}\}$. Из неравенства треугольника $\mathrm{dist}(x, y) \leqslant \mathrm{dist}(x, 0) + \mathrm{dist}(0, y)$ следует, что $d(\tilde{W}) \leqslant \mathrm{diam}(\tilde{W}) \leqslant 2d(\tilde{W})$. Поэтому условие $\mathrm{diam}(\tilde{W}) < \infty$ эквивалентно $d(\tilde{W}) < \infty$, то есть $\Pr\{\mathrm{diam}(\tilde{W}) < \infty\} = \Pr\{d(\tilde{W}) < \infty\}$. Представив в виде дизъюнктивного объединения

$$\{d(\tilde{W}) < \infty\} = \bigcup_{n=0}^{\infty}\{d(\tilde{W}) = n\}\,,$$

получим

$$\Pr\{d(\tilde{W}) < \infty\} = \sum_{n=0}^{\infty}\Pr\{d(\tilde{W}) = n\}\,.$$

Поэтому достаточно доказать, что $\Pr\{d(\tilde{W}) = n\} = 0$ для любого $n \in \mathbb{N}_+$.

2. Пусть F_n – множество узлов, находящихся на расстоянии n от нуля. $\mathrm{Card}(F_n) = \aleph_0$, так как счетно множество всех конечных путей из $\bigcup_n \Gamma_n$ с началом в нулевом узле. Тогда разложим

$$\{d(\tilde{W}) = n\} = \bigcup_{z\in F_n} \{\tilde{W} \ni z; \tilde{c}(y) = 0, y \in \big(\partial\{z\} \cap F_{n+1}\big)\} .$$

Следовательно,

$$\Pr\{d(\tilde{W}) = n\} \leqslant \sum_{z\in F_n} \Pr\{\tilde{W} \ni z; \tilde{c}(y) = 0, y \in \big(\partial\{z\} \cap F_{n+1}\big)\} \tag{6}$$

и поэтому достаточно доказать, что равно нулю каждое из слагаемых этой суммы.

3. Выберем произвольный узел $z = \langle l_k : k \in \mathbb{N}\rangle \in F_n \cap \tilde{W}$. При этом $\sum_{k\in\mathbb{N}} |l_k| = n$. Для того чтобы узел u обладал свойствами $z\varphi u$ и $\mathrm{dist}(0, u) = n + 1$, необходимо и достаточно чтобы его координаты $u = \langle m_k : k \in \mathbb{N}\rangle$ удовлетворяли соотношениям $\sum_{k\in\mathbb{N}} |m_k - l_k| = 1$, $\sum_{k\in\mathbb{N}} |m_k| = n + 1$. Выполнив замену $n_k = m_k - n_k$, эти условия на координаты запишем в виде $\sum_{k\in\mathbb{N}} |n_k| = 1$, $\sum_{k\in\mathbb{N}} |l_k + n_k| = n + 1$. Откуда имеем бесконечно множество решений $n_k = \pm\delta_{kj}$, $j \in \mathbb{N}$ и для каждого конкретного $j \in \mathbb{N}$ должно выполняться

$$\sum_{k\in\mathbb{N}:k\neq j} |l_k| + |l_j \pm 1| = n + 1 .$$

В результате, имеем $|l_j \pm 1| - |l_j| = 1$ и, следовательно, имеем тождество, если знак выбран в соответствии со знаком l_j. В результате, $\mathrm{Card}(\partial\{z\} \cap F_{n+1}) = \aleph_0$ при $z \in F_n$.

4. Так как $\Pr\{\tilde{W} \ni z; \tilde{c}(y) = 0, y \in \big(\partial\{z\} \cap F_{n+1}\big)\} \leqslant \Pr\{\tilde{c}(y) = 0, y \in \big(\partial\{z\} \cap F_{n+1}\big)\}$, то положив $A = \partial\{z\} \cap F_{n+1}$, на основании утверждения леммы, получаем требуемое равенство нулю каждого из слагаемых в (6). ■

Литература

1. Кестен Х. Теория просачивания для математиков / Москва: Мир, 1986. – 390 с.

PERCOLATION PROPERTY OF UNIFORM BERNOULLI FIELD ON INFINITE DIMENSIONAL LATTICE

Yu.P. Virchenko

Abstract. It is proved that uniform Bernoulli random field on infinite dimensional lattice possesses the percolation property with probability one.

Key words: infinite dimensional lattice, random Bernoulli field, percolation.