УДК 511.2

СРЕДНИЕ ЗНАЧЕНИЯ ОТКЛОНЕНИЙ ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТОЧЕК НА ТОРЕ

А.А. Абросимова

Владимирский государственный университет,
пр. Строителей, 11, Владимир, 600024, Россия, e-mail: Pincet88@mail.ru

Аннотация. В работе рассмотрен пример множеств ограниченного остатка на двумерном торе. Для этих множеств найдены оценки остаточного члена равномерного распределения, доказана формула для среднего значения остаточного члена.

Ключевые слова: множества ограниченного остатка, распределение дробных долей, развертка тора, перекладывающиеся фигуры.

1. Введение. Г.Вейль в работе [6] ввел понятие последовательности, равномерно распределенной по модулю 1, а также доказал критерий равномерного распределения. В той же работе были приведены первые примеры последовательностей, равномерно распределенных по модулю 1. Простейшей из таких последовательностей является последовательность $(i\alpha)_{i\geqslant 1}$ при иррациональном α.

Пусть X – некоторый интервал и $r(\alpha, i, X) = \sharp\{j : 0 \leq j < i, \{j\alpha\} \in X\}$, где $\{x\}$ обозначает дробную долю. Тогда теорема Вейля о равномерном распределении эквивалентна асимптотической формуле $r(\alpha, i, X) = i|X| + o(i)$, где $|X|$ – длина интервала X.

Пусть $\delta(\alpha, i, X) = r(\alpha, i, X) - i|X|$ – остаточный член этой формулы. Множество X называется множеством ограниченного остатка, если существует C такое, что

$$|\,\delta(\alpha, i, X)| \leqslant C$$

для всех i. Первые примеры таких множеств были построены в работе Гекке [1], который доказал, что интервалы I длины вида $a + b\alpha, a, b \in \mathbb{Z}$ являются интервалами ограниченного остатка и для них справедлива оценка

$$|\,\delta(\alpha, i, I)| \leqslant |b|.$$

Полное описание одномерных интервалов ограниченного остатка было найдено в [2], а в работе [11] были получены неулучшаемые по порядку оценки остаточного члена.

Более сложной является задача о множествах ограниченного остатка в двумерном случае. Известно только небольшое число таких множеств[3], [5], [8]. Большинство известных примеров строятся на основе результатов эргодической теории, что не позволяет получить явных оценок остаточного члена.

Целью данной работы является построение множеств ограниченного остатка в двумерном случае, получение явной оценки остатка или отклонения на этих множествах, а также определение средних значений отклонений для данных множеств.

Основные результаты, полученные в работе, были представлены в докладе на VIII Международной конференции «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения» [7].

Автор выражает благодарность В. Г. Журавлеву и А. В. Шутову за внимание к работе и стимулирующие обсуждения.

2. Одномерный случай. Рассмотрим поворот $S_\alpha : x \to x + \alpha \,\mathtt{mod}\, 1$ единичной окружности $C = \mathbb{T}^1$ на угол α.

Окружности $\mathbb{T}^1$ можно поставить в соответствие единичный полуинтервал $T^1 = [0,1)$, который можно разбить на два полуинтервала $T^1 = T_0^1 \sqcup T_1^1$, где $T_0^1 = [0, 1-\alpha), T_1^1 = [1-\alpha, 1)$. Тогда повороту окружности $\mathbb{T}^1$ на вектор α будет соответствовать перекладывание полуинтервалов T_0 и T_1:

$$S : T^1 \to T^1 : S(x) = x + v_k \,,$$

где $x \in T_k^1, k = 0, 1, v_0 = \alpha, v_1 = \alpha - 1$.

Определим счетные функции $r_0(i)$ и $r_1(i)$ соответственно для полуинтервалов T_0 и T_1

$$r_0(i) = \sharp\{j; \{j\alpha\} < 1-\alpha, 0 \le j < i\}, r_1(i) = \sharp\{j; \{j\alpha\} \geqslant 1-\alpha, 0 \le j < i\},$$

где $\{x\}$ обозначает дробную часть числа x. Рассмотрим отклонения $\delta_k(i)$ счетных функций $r_k(i)$, $k = 0, 1$ от ожидаемой величины :

$$\delta_0(i) = r_0(i) - i(1-\alpha), \qquad \delta_1(i) = r_1(i) - i\alpha\,.$$

В этом случае теорема Гекке [1] дает следующую оценку

$$|\,\delta_0(i)| \le 1, \qquad |\,\delta_1(i)| \le 1$$

для всех $i = 0, 1, 2, \ldots$.

3. Двумерный случай. В качестве аналога единичной окружности рассмотрим единичный тор

$$\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2\,.$$

Будем сдвигать его на вектор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$:

$$S_\alpha : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2 : x \longmapsto S_\alpha(x) = x + \alpha \mathtt{mod}\, \mathbb{Z}^2\,. \tag{1}$$

Определим развертку тора. Любой точке $c = (c_1, c_2)$ из области $C = \{c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2; c_i \ge 0, \mathtt{min}(c_1, c_2) \leqslant 1\}$ поставим в соответствие шестиугольник T_c с координатами вершинам $(0,0)$, $(-c_1, 1-c_2)$, $(0,1)$, $(1-c_1, 1-c_2)$, $(1,0)$, $(1-c_1, -c_2)$ (рис. 1).

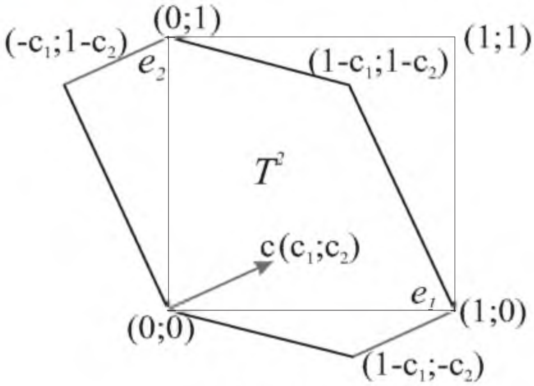

Рис. 1.

У шестиугольника T^2 противоположные стороны параллельны и, если $c_1 + c_2 \leqslant 1$, то он выпуклый.

Параллельными переносами на векторы l из квадратной решетки $\mathbb{Z}^2$ шестиугольником T^2 можно замостить $\mathfrak{T} = \coprod_{l\in\mathbb{Z}^2} T^2[l]$ плоскость $\mathbb{R}^2$. Таким образом шестиугольник T^2 является фундаментальной областью для квадратной решетки $\mathbb{Z}^2$ и его можно рассматривать как развертку тора $\mathbb{T}^2$.

Вектор α в данном случае будем выбирать такой, что $\alpha = tc$, где $0 < t < 1$. Сдвигая разбиение $\mathfrak{T}$ на вектор $-\alpha$, при этом сама область T^2 остается неподвижной, получим ее разбиение на три фигуры: шестиугольник T_0^2 и два параллелограмма T_1^2 и T_2^2, - с площадями соответственно

$$a_0 = 1 - \alpha_1 - \alpha_2 = \alpha_0, \qquad a_1 = \alpha_1, a_2 = \alpha_2. \tag{2}$$

Фигура T^2 будет являться перекладывающейся разверткой тора (рис. 2), т.е. существует преобразование

$$S_v : T^2 \to T^2 : x \to S_v(x) = x + v_k\,, \tag{3}$$

где v_k – вектора перекладывания для областей T_k^2, k=0, 1, 2, и они соответственно равны

$$v_0 = (\alpha_1, \alpha_2), \qquad v_1 = (\alpha_1 - 1, \alpha_2), \qquad v_2 = (\alpha_1, \alpha_2 - 1)\,. \tag{4}$$

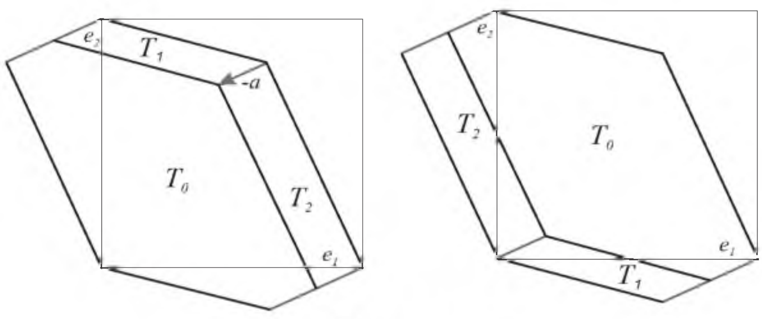

Рис. 2.

Предложение 1. *Пусть дан сдвиг тора S_α, определяемый выражением* (1), *и пусть для развертки тора разбитой на области $T^2 = T_0^2 \sqcup T_1^2 \sqcup T_2^2$ с площадями* (2) *задано перекладывание* (3). *Тогда выполняется равенство*

$$S_v(T^2) = S_\alpha(\mathbb{T}^2) \,\mathtt{mod}\, \mathbb{Z}^2\,. \tag{5}$$

□ Так как преобразование S_v отображает шестиугольник T^2 на себя, то для доказательства предложения достаточно доказать, что для любого $x \in T^2$ точки $S_v(x)$ и $x+\alpha$ различаются на векторы решетки $\mathbb{Z}^2$.

$$S_v(x) - (x+\alpha) = \begin{cases} 0, & x \in T_0^2\,; \\ l_1, & x \in T_1^2\,; \\ l_2, & x \in T_2^2\,, \end{cases}$$

где $l_1(-1,0), l_2(0,-1) \in \mathbb{Z}^2$. Получили требуемый результат. ■

Определим теперь для каждой области T_k^2, где $k = 0,1,2$, счетные функции

$$r_k(i) = \sharp\{j : S_\alpha^j(0) \in T_k^2, 0 \leq j < i\}\,,$$

по аналогии с одномерным случаем, и отклонения $\delta_k(i)$ счетных функций $r_k(i)$ от ожидаемой величины ia_k, где a_k – площадь области T_k^2

$$\delta_k(i) = r_k(i) - ia_k\,. \tag{6}$$

Относительно отклонений в двумерном случае доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть дан сдвиг тора S_α на иррациональный вектор α, т.е. числа $\alpha_1, \alpha_2, 1$ линейно независимы над $\mathbb{Z}$. Пусть тор $\mathbb{T}^2$ разбит на области $\mathbb{T}_k^2$: $\mathbb{T}^2 = \mathbb{T}_0^2 \sqcup \mathbb{T}_1^2 \sqcup \mathbb{T}_2^2$. Тогда для отклонений выполняются неравенства:*

$$-c_1 - c_2 \leqslant \delta_0(i) \leqslant 2, \qquad -1 \leqslant \delta_1(i) \leqslant c_1, \qquad -1 \leqslant \delta_2(i) \leqslant c_2. \tag{7}$$

□ Функции $r_k(i)$ можно рассматривать, как количество попаданий точек $S_\alpha^j(0), 0 \leqslant j < 1$ в область T_k^2, и их сумма равна

$$r_0(i) + r_1(i) + r_2(i) = i\,. \tag{8}$$

Так как развертка T^2 является перекладывающейся, то

$$r_0(i)v_0 + r_1(i)v_1 + r_2(i)v_2 \in T^2\,.$$

Найдем проекции данного соотношения на направления задаваемые векторами e_1 и e_2 соответственно

$$\begin{array}{l} -c_1 \leqslant (r_0(i) + r_2(i))\alpha_1 - r_1(i)(1-\alpha_1) \leqslant 1, \\ -c_2 \leqslant (r_0(i) + r_1(i))\alpha_2 - r_2(i)(1-\alpha_2) \leqslant 1. \end{array} \tag{9}$$

Неравенства (7) получаются при решении системы неравенств (9) с учетом соотношений (6) и (8). ■

Таким образом, границы отклонений $\delta_k(i)$ не зависят не только от i, но и от вектора сдвига, а определяются только размерами развертки T^2. Теорема 2 является двумерным обобщением теоремы Гекке, а области T_k^2, где $k = 0, 1, 2$ – множествами ограниченного остатка относительно сдвига на вектор α.

4. Средние значения отклонений. Для нахождения средних значений отклонений введем понятие векторной дробной части $Fr(x)$ и суммарного векторного отклонения $\delta(i)$.

Определим для любого $x \in \mathbb{R}^2$ векторную дробную часть $Fr(x)$, полагая $Fr(x) = x'$, где $x' = x \bmod \mathbb{Z}^2$ и $x' \in T^2$ [10].

Суммарное векторное отклонение определим, как векторнозначную функцию

$$\delta(i) = r_0(i)v_0 + r_1(i)v_1 + r_2(i)v_2 \tag{10}$$

для $i = 0, 1, 2, \ldots$.

Из равенств (4) и (8) следует, что (10) примет вид

$$\delta(i) = i\alpha + r_1(i)l_1 + r_2(i)l_2\,. \tag{11}$$

Предложение 2. *Справедливо равенство*

$$\delta(i) = Fr(i\alpha)\,. \tag{12}$$

□ Рассмотрим перекладывание (3). Тогда

$$S_v^i = i\alpha + r_1(i)v_1 + r_2(i)v_2\,,$$

т.е.

$$S_v^i = \delta(i)\,.$$

Из этого равенства,предложения 1 и определения векторной дробной части следует соотношение (12). ■

Определим среднее значение векторного отклонения

$$\langle\delta\rangle = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{1\leqslant i\leqslant N} \delta(i)\,, \tag{13}$$

если предел существует.

Относительно средних значений отклонений доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть дан сдвиг тора на вектор α. Пусть вектор α иррациональный, т.е. числа $\alpha_1, \alpha_2, 1$ линейно независимы над $\mathbb{Z}$. Тогда:*

1. Существует среднее значение $\langle\delta\rangle$ (13) векторного отклонения $\delta(i)$, и оно вычисляется по формуле

$$\langle\delta\rangle = C_{T^2}\,, \tag{14}$$

где $C_{T^2} = C_{T^2}((1-c_1)/2, (1-c_2)/2)$ *– центр тяжести фигуры* T^2.

2. Для любого $k = 0, 1, 2$ *существуют средние значения отклонений*

$$\langle\delta_k\rangle = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{1\leqslant i\leqslant N} \delta_k(i)\,,$$

и они соответственно равны

$$\langle\delta_0\rangle = \frac{c_1+c_2}{2} - 1, \langle\delta_1\rangle = \frac{1-c_1}{2}\,, \qquad \langle\delta_2\rangle = \frac{1-c_2}{2}\,. \tag{15}$$

□ Из формулы (12) следует

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant N} \delta(i) = \sum_{1\leqslant i\leqslant N} Fr(i\alpha)\,. \tag{16}$$

Для доказательства (14) воспользуемся формулой (16) и критерием Вейля

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{1\leqslant i\leqslant N} \delta(i) = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{1\leqslant i\leqslant N} Fr(i\alpha) = \int\limits_{T^2} x dx = C_{T^2}\,.$$

Для доказательства формулы (15) найдем проекции векторного отклонения $\delta(i)$ (11) на направления векторов e_1 и e_2 и воспользуемся формулой (14). ■

Литература

1. Hecke E., Über Analytische Funktionen und die Verteilung von Zahlen mod. eins // Math. Sem. Hamburg. Univ. – 1921. – 1. – P.54-76.

2. Kesten H. On a conjecture of Erdös and Szüsz related to uniform distribution mod 1 // Acta Arithmetica. – 1966. – 12. – P.193-212.

3. Liardet P. Regularities of distribution // Compositio Math. – 1987. – 61. – P.267-293.

4. Oren I. Admissible functions with multiplie discontinioutes // Israel J.Math. – 1982. – 42. – P.353-360.

5. Rauzy G. Nombres alge 0 briques et substitutions // Bull. Soc. Math. France – 1982/ – 110. – P.147-178.

6. Weyl H. Über die Gibbs'sche Erscheinung und verwandte Konvergenzphänomene // Rendicontidel Circolo Mathematico di Palermo. – 1910. – 30. – P.377-407.

7. Абросимова А.А., Журавлев В.Г. Двумерное обобщение теоремы Гекке и сбалансированные слова / Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения:тез. докл. VIII Международной конференции, посвященной 190-летию П.Л. Чебышева и 120-летию И.М. Виноградова (Саратов, 12-17 сентября 2011 г.) / Саратов: Изд-во Сарат.ун-та, 2011. – С.3-4.

8. Журавлев В.Г. Разбиения Рози и множества ограниченного остатка // Записки научных семинаров ПОМИ. – 2005. – 322. – С.83-106.

9. Журавлев В.Г., Геометризация теоремы Гекке // Чебышевский сборник. – 2010. – 11;1. – С.125-144.

10. Журавлев В.Г. Многомерное обобщение теоремы Гекке // Алгебра и анализ. – 2012. – 24;1. – С.1-33.

11. Шутов А.В. Оптимальные оценки в проблеме распределения дробных долей на множествах ограниченного остатка // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. – 2007. – 5;3. – С.112-121.

AVERAGE VALUES FOR DEVIATION DISTRIBUTION OF POINTS ON THE TORUS

A.A. Abrosimova

Vladimir State University,
Stroiteley Av., 11, Vladimir, 600024, Russia, e-mail: Pincet88@mail.ru

Abstract. New examples of bounded remainder sets on two-dimensional torus are under consideration. For these sets we prove estimates of the remainder term of the uniform distribution problem. We also prove the exact formula for the average value of remainder term.

Key words: bounded remainder sets, distribution of fractional parts, toric development, exchanged domains.