УДК 512.572

О ЛИЕВО НИЛЬПОТЕНТНЫХ АЛГЕБРАХ ПУАССОНА

О.И. Череватенко

Ульяновский государственный педагогический университет им. И.Н.Ульянова,
пл. 100-летия со дня рождения В.И. Ленина, 4, Ульяновск, 432700, РФ, e-mail: chai@pisem.net

Аннотация. Приводятся конструкции алгебр, порождающих многообразия лиево нильпотентных алгебр Пуассона.

Ключевые слова: алгебра Пуассона, многообразие алгебр.

Алгебра $A = A(+,\cdot,\{,\},K)$ над полем K называется алгеброй Пуассона, если $A(+,\cdot,K)$ – ассоциативная коммутативная алгебра с единицей, $A(+,\{,\},K)$ – алгебра Ли с операцией умножения $\{,\}$ и для любых $a,b,c \in A$ выполнено правило:

$$\{a\cdot b,c\} = a\cdot\{b,c\} + \{a,c\}\cdot b\,.$$

Пусть $\mathbf{V}$ – многообразие алгебр Пуассона (все необходимые сведения о многообразиях PI-алгебр можно найти, например, в монографии [1]). Алгебры Пуассона возникают в различных разделах алгебры, дифференциальной геометрии, топологии, современной теоретической физике (см. [2]) и т.д. Обозначим через $K(X,\mathbf{V})$ относительно свободную алгебру данного многообразия, где $X = \{x_1, x_2, ...\}$ – счетное множество свободных образующих. В случае основного поля нулевой характеристики вся информация о многообразии $\mathbf{V}$ содержится в его полилинейных компонентах $P_n(\mathbf{V})$, $n = 1,2,...$, где $P_n(\mathbf{V})$ это линейное подпространство в пространстве $K(X,\mathbf{V})$, состоящее из полилинейных элементов степени n от переменных $x_1,...,x_n$. Сведения о PI-алгебрах Пуассона можно найти, например, в работах [3] и [4].

Договоримся опускать скобки $\{,\}$ при их левонормированной расстановке, то есть

$$\{\{\{x_1,x_2\},x_3\},...,x_n\} = \{x_1,x_2,...,x_n\}.$$

Пусть $SU_N = SU_N(K)$ — алгебра строго верхнетреугольных [1)] матриц порядка N над полем K. Хорошо известно, что элемент $x_1\wedge\ldots\wedge x_N$ свободной ассоциативной алгебры с операцией умножения $\wedge$ является базисом тождеств алгебры SU_N [2].

Обозначим через $[SU_N]$ алгебру Ли, полученную из алгебры SU_N с помощью операции коммутирования. Хорошо известно, что элемент $[[x_1,x_2],\ldots,x_N]$ свободной алгебры Ли является базисом тождеств алгебры $[SU_N]$. Нетрудно проверить следующее

Предложение. *Пусть A – ассоциативная алгебра с операцией умножения $\wedge$ над произвольным полем K. Рассмотрим векторное пространство $B = [A]\oplus K$ так, что $(x+\alpha)+(y+\beta) = (x+y)+(\alpha+\beta)$, в котором определены операции сложения и две*

[1] *Прим. ред.* Верхнетреугольные матрицы с нулевыми диагональными элементами.

операции умножения $\cdot$ и $\{,\}$ элементов множества B, а также операция умножения на элементы поля K, согласно следующим правилам:

$$(x+\alpha)\cdot(y+\beta) = (\beta x + \alpha y) + \alpha\beta\,;$$

$$\{(x+\alpha),(y+\beta)\} = [x,y]\,;$$

$$\gamma(x+\alpha) = \gamma x + \gamma\alpha\,,$$

где $[x,y] = x\wedge y - y\wedge x$, $\alpha,\beta,\gamma\in K$, $x,y\in[A]$. Тогда полученная, таким образом, алгебра B будет являться алгеброй Пуассона, в которой выполнено тождество $\{x_1,x_2\}\cdot\{x_3,x_4\} = 0$.

Пусть $U_N^L = [SU_N]\oplus K$ — алгебра Пуассона, построенная на основе указанного предложения.

Теорема. *В случае основного поля нулевой характеристики для алгебры Пуассона U_N^L справедливы следующие утверждения.*

(i) Полилинейные тождества

$$\{x_1,x_2\}\cdot\{x_3,x_4\} = 0, \quad \{x_1,x_2,\ldots,x_N\} = 0 \tag{1}$$

порождают идеал тождеств алгебры U_N^L.

(ii) Для любого n базис полилинейной компоненты $P_n(U_N^L)$ состоит из элементов вида

$$\begin{gathered} x_1\cdot\ldots\cdot x_n,\\ x_{i_1}\cdot x_{i_2}\cdot\ldots\cdot x_{i_{n-k}}\cdot\{x_{j_1},x_{j_2},\ldots,x_{j_k}\}, \end{gathered} \tag{2}$$

где $k = 2,...,\min\{n,N-1\}$ и $\{i_1,\ldots,i_{n-k},j_1,\ldots,j_k\} = \{1,2,\ldots,n\}$ так, что $i_1 < i_2 < \ldots < i_{n-k}$, $j_1 > j_s$, $s = 2,...,k$.

(iii) Для любого n выполнено равенство

$$\dim P_n(U_N^L) = 1 + \sum_{k=2}^{\min\{n,N-1\}} C_n^k\cdot(k-1)!\,,$$

где C_n^k — число сочетаний из n по k.

□ Очевидно, что в алгебре U_N^L выполняются тождества (1), т.е. для произвольных элементов $(a_1+\alpha_1),(a_2+\alpha_2),\ldots,(a_N+\alpha_N)\in U_N^L$ выполнены равенства

$$\{(a_1+\alpha_1),(a_2+\alpha_2),\ldots,(a_N+\alpha_N)\} = [[a_1,a_2],\ldots,a_N] = 0\,. \tag{3}$$

и

$$\{(a_1+\alpha_1),(a_2+\alpha_2)\}\cdot\{(a_3+\alpha_3),(a_4+\alpha_4)\} = 0\,.$$

Обозначим через $\mathbf{V}$ многообразие алгебр Пуассона, порожденное тождествами (1). Полилинейная компонента $P_n(\mathbf{V})$ есть линейная оболочка элементов вида (2).

Покажем, что по модулю идеала тождеств алгебры U_N^L элементы (2) являются линейно независимыми. Предположим, что это не так. Тогда для некоторого n в алгебре U_N^L выполнено нетривиальное тождество

$$\sum_{i_1,\ldots,i_{n-k},j_1,\ldots,j_k} \alpha_{i_1,\ldots,i_{n-k},j_1,\ldots,j_k} \cdot x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdot \ldots \cdot x_{i_{n-k}} \cdot \{x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_k}\} = 0$$

с коэффициентами $\alpha_{i_1,\ldots,i_{n-k_0},j_1,\ldots,j_k}$ из K. Пусть $i_1,\ldots,i_{n-k_0},j_1,\ldots,j_{k_0}$ такой набор индексов, при котором $\alpha_{i_1,\ldots,i_{n-k_0},j_1,\ldots,j_{k_0}} \neq 0$ и значение k_0 минимально среди всех таких возможных наборов. Сделаем следующую подстановку в указанное тождество:

$$x_{i_1} \to 1, x_{i_2} \to 1, \ldots, x_{i_{n-k_0}} \to 1\,.$$

Тогда мы получим нетривиальное тождество

$$\sum_{\sigma \in S_{k_0-1}} \alpha_\sigma \{x_{k_0}, x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(k_0-1)}\} = 0\,, \quad \alpha_\sigma \in K\,.$$

Зафиксируем произвольную перестановку $\sigma \in S_{k_0}$, где S_{k_0} - симметрическая группа порядка порядка k_0, и сделаем такую подстановку:

$$x_{k_0} \to e_{12},\ x_{\sigma(1)} \to e_{23},\ x_{\sigma(2)} \to e_{34}, \ldots,\ x_{\sigma(k_0-1)} \to e_{k_0,k_0+1}\,,$$

где e_{ij} – матричная единица.[2] Тогда, используя (3), получаем $\alpha_\sigma e_{1,k_0+1} = 0$. Отсюда $\alpha_\sigma = 0$. Таким образом, пункты (i) и (ii) доказаны. Пункт (iii) следует из (ii). ■

Автор благодарит С.М. Рацеева за постоянное внимание к работе.

Литература

1. Бахтурин Ю.А. Тождества в алгебрах Ли / М.: Наука, 1985.
2. Борисов А.В., Мамаев И.С. Пуассоновы структуры и алгебры Ли в гамильтоновой механике / М.-Иж.: РХД, 1999.
3. Рацеев С.М. Рост в алгебрах Пуассона // Алгебра и логика. – 2011. – **50**;1. – С.68-88.
4. Mishchenko S.P., Petrogradsky V.M., Regev A. Poisson PI algebras // Transactions of the American Mathematical Society. – 2007. – 359;10. – C.4669-4694.
5. Мальцев Ю.Н. Базис тождеств алгебры верхнетреугольных матриц // Алгебра и логика. – 1971. – 10. – С.393-400.

ON LIE NILPOTENT POISSON ALGEBRAS

O.I. Cherevatenko

Ulyanovsk State I.N.Ulyanov Pedagogical University,
Ploshchad' 100-letiya so dnya rozhdeniya V.I. Lenina, 4, Ulyanovsk, 432700, Russia, e-mail: chai@pisem.net

Abstract. Construction of algebras generated a variety of Lie-nilpotent Poisson algebras is proposed.

Key words: Poisson's algebras, variety of algebras.

[2] *Прим. ред.* Матрица e_{ij} имеет единственный ненулевой элемент $(e_{ij})_{ij} = 1$.