УДК 531.19

ОСНОВНОЕ СОСТОЯНИЕ ВЕКТОРНОЙ РЕШЕТОЧНОЙ МОДЕЛИ С ПАРНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Ю.П. Вирченко

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Аннотация. Описан класс основных периодических состояний сферически симметричной векторной модели статистической механики решеточных систем при отсутствии в ее гамильтониане внешнего поля и суммируемом обменном интеграле. В описываемом классе содержатся только такие состояния, Фурье-образ которых сосредоточен не более чем в двух противоположных по знаку точках $\mathbf{k}$-пространства.

Ключевые слова: векторная модель, гамильтониан, основное состояние.

Введение. При теоретическом исследовании твердотельных структур статистическими методами, вероятностные модели, основанные на распределениях Гиббса и гамильтонианах на фазовых пространствах, у которых на координатную часть не наложено никаких ограничений, становятся, как правило, неадекватными. Это связано с тем, что реальные физические твердотельные состояния, создаваемые природными или технологическими процессами, являются, с теоретической точки зрения, метастабильными и, вместе с тем, настолько долгоживущими, что как раз их и имеет смысл изучать теоретически. В этих условиях, при построении статистической механики таких метастабильных состояний, приходится вводить математические ограничения, которые модельным образом фиксируют ту долгоживущую твердотельную структуру, в рамках которой разворачиваются изучаемые физические процессы. В частности, допустимо предположить, что физически реализуются такие состояния, которые в области очень низких температур представляют собой монокристаллические образцы среды. При этом фазовое пространство системы большого числа частиц, составляющих твердотельную структуру, должно строиться, исходя из фиксации такого монокристаллического состояния. На этом пути возникают решеточные системы статистической механики, которые являются самостоятельным объектом изучения статистической математической физики [2]. Они, в свою очередь, подразделяются на классические и квантовые, в зависимости от того, для описания какой физической ситуации предназначаются. В обоих случаях, они допускают очень простое, с математической точки зрения, изучение в области высоких температур на основе сходящихся высокотемпературных разложений. Однако, по самому своему смыслу, решеточные модели предназначены для описания физических состояний в области значений своих параметров, в которой такие разложения расходятся. В частности, не поддается изучению на основе этих разложений едва ли не самая важная для таких систем задача об описании происходящих в них фазовых переходах, которые имеют место в температурной области, промежуточной между низкими и высокими температурами. Как изучение фазовых переходов, так и изучение поведения в собственно низкотемпературной области связано с информацией о том состоянии, которое, теоретически, должно реализоваться при нулевой температуре в рассматриваемой системе большого числа частиц, то есть о состоянии с наименьшей энергией. Поэтому задача описания класса таких основных состояний для каждой фиксированной решеточной модели является первоочередной. Вместе с тем уже для самых простейших решеточных моделей такая задача математической физики оказывается довольно нетривиальной. В настоящем сообщении мы исследуем класс основных состояний сферически симметричной векторной модели, которая представляет собой предельный случай, при большой величине спина, известной квантовой модели Гайзенберга [1], описывающей, как считается в физике твердого тела, обширные классы магнитоупорядоченных твердотельных сред. А именно, будет описан класс основных состояний для гамильтонианов, содержащих только парное взаимодействие классических магнитных моментов. Обменный интеграл, связанный с этим взаимодействием, предполагается суммируемым. Мы исследуем основные состояния, связанные только с одной парой точек минимума фурье-образа обменного интеграла. Это исключает наличие так называемых фрустраций у векторного поля, которое реализует минимум энергии. В построениях работы, мы в значительной степени следуем идеологии монографии [2].

1. Векторная решеточная модель. Будем рассматривать математические модели бесконечных идеальных (без искажений) кристаллических решеток. Они представляют собой счетные дискретные периодические множества Λ в $\mathbb{R}^d$, $d = 1, 2, 3$. Это означает, что задан упорядоченный набор $\langle \mathbf{a}_i; i = 1 \div d\rangle$ векторов из $\mathbb{R}^d$ (при $d = 2$ должно иметь место $\mathbf{a}_1 \not\parallel \mathbf{a}_2$; при $d = 3$ — $([\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2], \mathbf{a}_3) \neq 0$) такой, что множество Λ обладает свойством $\Lambda + \sum_{i=1}^{d} n_i \mathbf{a}_i = \Lambda$ и в каждом компакте в $\mathbb{R}^d$ находится не более чем конечное множество его точек. Такие множества в дальнейшем мы называем решетками. Точки решетки мы будем, следуя традициям кристаллографии, называть *узлами*.

Выбор векторов $\mathbf{a}_i, i = 1 \div d$ – векторов базиса периодов каждой решетки неоднозначен. Среди всех возможных способов выбора имеются такие, для которых число точек множества Λ в каждом параллелепипеде

$$P_{n_1,\dots,n_d} = \left\{ \mathbf{x} = \langle x_j; j = 1 \div d\rangle \in \mathbb{R}^d : \mathbf{x} = \sum_{j=1}^{d} x_j \mathbf{a}_j, n_i \le x_i < (n_i + 1) \right\}, \quad n_i \in \mathbb{Z}, i = 1 \div d$$

минимально. Тогда такой параллелепипед называется *элементарной кристаллической ячейкой*. Если при этом элементарная кристаллическая ячейка содержит ровно один узел из Λ, то она называется *простой*. Решетка с простой элементарной ячейкой описывается множеством векторов

$$\left\{ \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{d} n_i \mathbf{a}_i \, : n_i \in \mathbb{Z}, i = 1 \div d \right\} = \Lambda \, .$$

Далее, в этой работе мы будем рассматривать только решетки с простыми элементарными ячейками. В этом случае удобно считать, что начало отсчета $\mathbf{0}$ совмещено либо с одним из узлов Λ, либо с центром тяжести системы, состоящей и этого узла и всех узлов, получаемых из него сдвигами на векторы $\mathbf{a}_i$, $i = 1 \div d$.

Обозначим посредством Λ_N конечное подмножество из Λ, определяемое как

$$\Lambda_N = \left\{ \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{d} n_i \mathbf{a}_i : n_i = -L/2 + k, k = 0 \div L, i = 1 \div d \right\},$$

где $N = (L+1)^d$ и $L \in \mathbb{N}$. Это множество служит моделью конечного образца кристалла, где число L – является его размером. Если L нечетно, то начало координат помещается в указанный выше центр тяжести, если же L четно, то – в узел решетки.

Обозначим, далее, посредством $\mathcal{M}_d$ класс всех векторных (псевдовекторных) полей $\langle \mathbf{s}_i(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, i = 1,2,3 : s_j(\mathbf{x}) s_j(\mathbf{x}) = s^2 \rangle$. По повторяющемуся векторному индексу j здесь и далее предполагается суммирование от 1 до 3. Таким образом, независимо от размерности d решетки, поле всегда полагается трехмерным. Поэтому, далее, во всех выражениях, в которых векторный индекс не повторяется, полагается, что он принимает значения от 1 до 3, а если векторный индекс у поля не указывается, то оно выделяется жирным шрифтом как и узлы решетки.

При каждом фиксированном L сопоставим каждому полю $\langle s_i(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \rangle$ значение функционала

$$\mathsf{H}_N[\mathbf{s}] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \rangle \in \Lambda_N^n} I^{(n)}_{i_1,\dots,i_n}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) s_{i_1}(\mathbf{x}_1) \dots s_{i_n}(\mathbf{x}_n)\,, \tag{1}$$

которое будем называть энергией поля $\mathbf{s}$ в кристалле Λ_N. Сам же функционал $\mathsf{H}_N[\cdot]$ называется гамильтонианом векторной модели. Согласно своему определению, функции $I^{(n)}_{i_1,\dots,i_n}(\cdot)$ при $n \geq 2$ – коэффициенты разложения функционала H_N должны быть симметричными по всем своим пространственным аргументам в том смысле, что для любой перестановки P из группы $\mathcal{P}_n$ имеет место равенство $I^{(n)}_{\mathsf{P}i_1,\dots,\mathsf{P}i_n}(\mathsf{P}\mathbf{x}_1, \dots, \mathsf{P}\mathbf{x}_n) = I^{(n)}_{i_1,\dots,i_n}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$. Эти функции, следуя традиции физики магнетизма, мы будем называть *обменными интегралами*. Существенно, что они не зависят от размера кристалла L (то есть от N) и трансляционно инвариантны, то есть для каждой такой функции и для любого вектора $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{d} n_i \mathbf{a}_i \in \Lambda$ имеет место

$$I^{(n)}_{i_1,\dots,i_n}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}, \dots, \mathbf{x}_n + \mathbf{x}) = I^{(n)}_{i_1,\dots,i_n}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)\,. \tag{2}$$

Значения этих функций в каждой точке $\langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \rangle \in \Lambda^n$ представляют собой тензоры ранга n в пространстве $\mathbb{R}^3$ относительно группы вращений, если n четно. Если же n нечетно, то их значения представляются тензорами ранга n, если поле $\mathbf{s}$ векторное, и — псевдотензоры такого же ранга, если поле $\mathbf{s}$ псевдовекторное.

Обычно, в статистической механике (см. [2]) предполагается, что ряд, определяющий значение энергии суммируем в следующем смысле

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n!} \sum_{\langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1} \rangle \in \Lambda^{n-1}} \max_{i_1,\dots,i_n} |I^{(n)}_{i_1,\dots,i_n}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)| < \infty\,, \tag{3}$$

хотя, конечно же, имеются физические ситуации, для моделирования которых приходится отказываться от этого условия.

Переопределим обменные интегралы, произведя замену $s^n I^{(n)}$ на $I^{(n)}$. Поэтому, далее, не ограничивая общности, будем считать, что $s_i(\mathbf{x})s_i(\mathbf{x}) = 1$, $\mathbf{x} \in \Lambda$. В этом случае $\mathcal{M} = S_2^\Lambda$, где S_2 – двумерная единичная сфера. Итак, векторные решеточные модели определяются тройкой

$$\Big\langle \Lambda, \mathcal{M}, \langle \mathsf{H}_N[\cdot]; N = (L+1)^d, L \in \mathbb{N} \rangle \Big\rangle . \tag{4}$$

Существенно, что система определяется не одним гамильтонианом $\mathsf{H}_N[\cdot]$, а их бесконечной последовательностью, каждый член которой строится по единому механизму.

При решении многих задач статистической механики, связанных с решеточными моделями, имеющими простые элементарные ячейки, удобно сводить их к соответствующим задачам: при $d = 3$ на простой кубической решетке и при $d = 2$ на квадратной решетке. В нашем случае это достигается следующим образом. Сопоставим каждому вектору узла $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{d} n_j \mathbf{a}_j$, $\langle n_i; i = 1 \div d \rangle \in \mathbb{Z}^d$ решетки Λ вектор $\mathbf{z} = \sum_{j=1}^{d} n_j \mathbf{e}_j \equiv U\mathbf{x}$, где набор векторов $\mathbf{e}_j = \langle \delta_{jk}; k = 1 \div d \rangle$, $j = 1 \div d$ ортонормирован. При этом матрица U имеет обратную. Множество всех построенных векторов $\mathbf{z}$ образует простую кубическую решетку. Векторная модель статистической механики на этой решетке, эквивалентная исходной модели, определяется на основе обменных интегралов $I^{(n)\prime}$, которые даются равенством $I^{(n)\prime}{}_{i_1,...,i_n}(\mathbf{z}_1, ..., \mathbf{z}_n) = I^{(n)}_{i_1,...,i_n}(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n)$. Исходя из этого, нам достаточно будет описать только все основные состояния векторной модели на простой кубической решетке. Любое основное состояние произвольной решетки с простой элементарной ячейкой может быть построено на их основе посредством преобразования U^{-1}.

В кристаллической решетке с простой элементарной ячейкой всегда есть точка инверсии – центр параллелограмма элементарной ячейки (если в этот центр поместить узел решетки, относящийся к этой ячейке). По этой причине, естественно, с физической точки зрения, рассматривать в рамках моделей (4), только такие обменные интегралы $I^{(n)}_{i_1,...,i_n}(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n)$, $n \geq 2$, которые обладают свойством

$$I^{(n)}_{i_1,...,i_n}(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n) = I^{(n)}_{i_1,...,i_n}(-\mathbf{x}_1, ..., -\mathbf{x}_n)\,.$$

Кроме такой центральной симметрии, обменные интегралы должны обладать более широкой группой симметрии, которая изоморфна группе симметрий простой кубической решетки, изоморфной, в свою очередь, с точки зрения задачи вычисления основного состояния любой решетке с простой элементарной ячейкой.

2. Периодические системы на Λ. Пусть $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \rangle$ – набор векторов, определяющих решетку с простой элементарной ячейкой так, что для любого $\mathbf{x} \in \Lambda$ имеет место

$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{d} n_j \mathbf{a}_j$. Решетка допускает дизъюнктивное разбиение

$$\Lambda = \bigcup_{\mathbf{x}\in\mathbb{Z}^d} \{\Lambda_N + (L+1)\mathbf{x}\} .$$

По определению, для любых двух векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Lambda$ равенство $\mathbf{x} = \mathbf{y} \bmod \Lambda_N$, если и только если $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in \Lambda_N$, то есть они находятся в одном и том же множестве указанного разбиения. При этом если $\mathbf{x} = \mathbf{y} \bmod \Lambda_N$, то имеет место также $\mathbf{y} - \mathbf{x} \in \Lambda_N$, $\mathbf{y} = \mathbf{x} \bmod \Lambda_N$.

Поле $\mathbf{s}$ на Λ называется периодическим по $\bmod \Lambda_N$, если

$$s_i(\mathbf{x}) = s_i(\mathbf{y}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{y} \bmod \Lambda_N .$$

Пусть $\mathbf{s}^{(N)}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Lambda_N$ – поле на Λ_N. Тогда поле $\mathbf{s}$ на Λ называется периодическим продолжением поля $\mathbf{s}^{(N)}$, если оно периодическое с периодом Λ_N и его сужение на Λ_N совпадает с $\mathbf{s}^{(N)}$.

Обозначим посредством $\mathsf{H}_N^{(n)}$ гамильтонианы, составляющие гамильтониан $\mathsf{H}_N = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{H}_N^{(n)}$. Пусть $\mathbf{s}$ – поле, являющееся периодическим продолжением на Λ поля, заданного на Λ_N. Продолжим функционалы $\mathsf{H}^{(n)}$ на все поля $\mathbf{s}$, периодические по $\bmod \Lambda_N$. Эти продолжения обозначим посредством $\mathsf{H}^{(n)}[\cdot, \Lambda_N]$. Они определяются формулой

$$\mathsf{H}^{(n)}[\mathbf{s}; \Lambda_N] = \frac{1}{n!} \sum_{\mathbf{x}_1 \in \Lambda_N} \sum_{\langle \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n \rangle \in \Lambda^{n-1}} I^{(n)}_{i_1, \ldots, i_n}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) s_{i_1}(\mathbf{x}_1) \ldots s_{i_n}(\mathbf{x}_n) .$$

Это определение не зависит от выбора номера точки, по которой производится первое суммирование, так как функции $I^{(n)}$ симметричны относительно одноименных перестановок в последовательностях $\langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \rangle$ и $\langle i_1, \ldots, i_n \rangle$.

В статистической механике часто используется конструкционный прием, который называется введением периодических граничных условий [1]. Этим термином обозначается сопоставление системе (4) с гамильтонианом H_N системы $\langle \Lambda, \mathcal{M}, \langle \mathsf{H}[\cdot; \Lambda_N]; N = (L+1)^d, L \in \mathbb{N} \rangle \rangle$. с гамильтонианом $\mathsf{H}[\cdot; \Lambda_N]$, определенном на классе периодических по $\bmod \Lambda_N$ полей $\mathbf{s}$ на Λ.

3. Задача об определении основного состояния. В рамках моделей вида (4), как уже было сказано во введении, с точки зрения статистической механики, представляет особенный интерес решение задачи об описании таких полей $\langle s_i(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in \Lambda \rangle$, которые реализуют минимум для последовательности функционалов H_N. Эта задача понимается в следующем смысле. Для каждого Λ_N ищется класс $\mathcal{B}_N$ полей $\langle s_i^{(N)}(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in \Lambda_N \rangle$, $\left(\mathbf{s}^{(N)}(\mathbf{x})\right)^2 = 1$, которые реализуют минимум функционала $\mathsf{H}_N[\cdot]$, $E_N^{(m)} = \min\{\mathsf{H}_N[\mathbf{s}^{(N)}]; \mathbf{x} \in \Lambda_N\}$. После этого ищется класс $\mathcal{B}$ полей $\langle s_i(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in \Lambda \rangle$, которые являются предельными точками всевозможных последовательностей $\langle \langle s_i^{(N)}(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in \Lambda_N \rangle; N = (L+1)^d \rangle$ при переходе к пределу в том смысле, как это будет описано ниже. Такой предельный переход называется *термодинамическим.*[3)] Конструкция этого предельного перехода и причина, по которой вводится такая операция, связаны с тем, что для реальных физических кристаллов число L очень велико (уже для частиц с наноразмерами $L \propto 10^2, N \propto 10^6$).

Конструкция термодинамического предельного перехода состоит в следующем. Пусть $D_N(\mathbf{x}) = \min\{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|; \mathbf{y} \in \partial\Lambda_N\}$ для каждого узла $\mathbf{x} \in \Lambda_N$, где $\partial\Lambda_N = \{\mathbf{x} \in \Lambda_N : \exists(i \in \{1, ..., d\} : |x_i| = L/2)\}$ – граница множества Λ_N.

Определение. *Будем говорить, что поле* $\langle \mathbf{s}(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in \Lambda\rangle$ *является термодинамически предельным для последовательности полей* $\langle \mathbf{s}^{(N)}; N = (L+1)^d\rangle$, *если существует неотрицательная функция* $\varepsilon : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ *такая, что* $\varepsilon(t) \to 0$ *при* $t \to \infty$ *и для любого ограничения* $\mathbf{s}|_{\Lambda_N}$ *выполняется оценка*

$$\left| s_i(\mathbf{x})|_{\Lambda_N} - s_i^{(N)}(\mathbf{x}) \right| < \varepsilon\left(D_N(\mathbf{x})\right) ,$$

Заметим, что таким образом определенный предельный переход не сводится к поточечному предельному переходу, а является, по сравнению с ним, более сильным пределом. Анализ существования этого предела является нетривиальной задачей при $d = 2, 3$ (см. [3]).

Заметим также, что в случае существования термодинамического предела, существует предельная плотность энергии $\lim\limits_{N\to\infty} \min \mathsf{H}_N/N$.

Вычисление поля $\mathbf{s}^{(N)}$, которое, согласно постановке задачи, реализует условный минимум гамильтониана H_N при выполнении совокупности условий $\left(\mathbf{s}^{(N)}\right)^2(\mathbf{x}) = 1$, $\mathbf{x} \in \Lambda_N$, может быть основано на решении уравнения

$$0 = \frac{\delta}{\delta s_j(\mathbf{x})}\left[\mathsf{H}_N[s] - \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{x}\in\Lambda_N} \lambda(\mathbf{x}) s_i^2(\mathbf{x})\right] = \frac{\delta \mathsf{H}_N}{\delta s_j(\mathbf{x})} - \lambda(\mathbf{x}) s_j^{(N)}(\mathbf{x}) ,$$

которому оно удовлетворяет с соответствующей условиям совокупностью неопределенных множителей Лагранжа $\lambda(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Lambda(N)$. В этом уравнении имеется трансляционно неинвариантное слагаемое, которое усложняет его решение. Заметим, что уравнение эквивалентно следующему

$$\epsilon_{ijk} s_j(\mathbf{x}) \frac{\delta \mathsf{H}_N[\mathbf{s}]}{\delta s_k(\mathbf{x})} = 0 , \qquad \mathbf{x} \in \Lambda_N ,$$

не содержащему неизвестных коэффициентов пропорциональности.

4. Конечное преобразование Фурье. Следующее простое утверждение является инструментом для описания всех состояний с минимальной энергией векторной модели.

[3)] Здесь мы не рассматриваем термодинамический предельный переход, понимаемый в более общем смысле, например, по Ван Хову [2].

Лемма 1. *Пусть* $x \in \mathbb{Z}$. *Тогда*

$$\frac{1}{L+1}\sum_{l=-L/2+k,\, k=0}^{L} \exp\left(\frac{2\pi i}{L+1}\, lx\right) = \delta_{x,0}\,.$$

□ Если $x = 0$, то суммируемое выражение равно 1 и, следовательно, сумма равна $(L+1)$. Пусть $x \neq 0$. Тогда

$$\sum_{l=-L/2+k,\, k=0}^{L} \exp\left(\frac{2\pi i}{L+1}\, lx\right) = \exp\left(-\frac{\pi i L}{L+1}\, x\right)\sum_{k=0}^{L}\exp\left(\frac{2\pi i}{L+1}\, kx\right) =$$

$$= \exp\left(-\frac{\pi i L}{L+1}\, x\right)\frac{1-\exp\left(\dfrac{2\pi i}{L+1}\,(L+1)x\right)}{1-\exp\left(\dfrac{2\pi i}{L+1}\, x\right)} = 0\,. \quad \blacksquare$$

Следствие. *Пусть* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ *и* $N = (L+1)^d$. *Тогда*

$$\frac{1}{N}\sum_{\mathbf{k}\in\bar{\Lambda}_N} \exp\left(i(\mathbf{k},\mathbf{x})\right) = \delta_{\mathbf{x},0}\,, \tag{5}$$

где $\bar{\Lambda}_N = \left\{\dfrac{2\pi}{L+1}\displaystyle\sum_{j=1}^{d} n_j \mathbf{e}_j\ ;\ n_j = -L/2+k, k = \ 0 \div L\right\}$, $\quad \mathbf{e}_j = \langle \delta_{jk}; k = 1 \div d\rangle$, $j = 1 \div d$.

□ Положим $\mathbf{x} = \displaystyle\sum_{j=1}^{d} x_j \mathbf{e}_j$, где $x_j \in \mathbb{Z}$, $j = 1 \div d$ и компоненты каждого вектора $\mathbf{k} \in \bar{\Lambda}_N$ определяются как $\mathbf{k} = \left\langle \dfrac{2\pi}{L+1} n_j\, ;\, j = 1 \div d\right\rangle$. Тогда

$$\frac{1}{N}\sum_{\mathbf{k}\in\bar{\Lambda}_N} \exp\left(i(\mathbf{k},\mathbf{x})\right) = \left(\prod_{j=1}^{d}\sum_{n_j=-L/2+k, k=0}^{L}\right)\prod_{j=1}^{d}\frac{1}{L+1}\exp\left(\frac{2\pi i}{L+1}\, x_j n_j\right) =$$

$$= \prod_{j=1}^{d}\frac{1}{L+1}\sum_{n_j=-L/2+k,\, k=0}^{L}\exp\left(\frac{2\pi i}{L+1}\, n_j x_j\right) = \prod_{j=1}^{d}\delta_{x_j,0} = \delta_{\mathbf{x},0}\,,$$

согласно утверждению леммы. ■

Теорема 1. *Пусть функция* $f : \mathbb{Z}^d \mapsto \mathbb{R}$ *периодическая по* $\mathrm{mod}\,\Lambda_N$, *где* Λ_N *определяется набором* $\mathbf{e}_j, j = 1 \div d$. *Пусть, далее, ее конечное Фурье-преобразование дается формулой*

$$\bar{f}(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{x}\in\Lambda_N} f(\mathbf{x})\exp\left(-i(\mathbf{k},\mathbf{x})\right)\,, \qquad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d\,. \tag{6}$$

Тогда имеет место формула для обратного преобразования

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{k}\in\bar{\Lambda}_N} \exp\left(i(\mathbf{k},\mathbf{x})\right)\bar{f}(\mathbf{k})\,, \qquad \mathbf{x}\in\Lambda\,. \tag{7}$$

При этом функция $\bar{f}(\mathbf{k})$ *обладает свойством* $\bar{f}^*(\mathbf{k}) = \bar{f}(-\mathbf{k})$.

□ Из вещественности функции f, беря комплексное сопряжение от обеих частей формулы (6), непосредственно, получаем, что $\bar{f}^*(\mathbf{k}) = \bar{f}(-\mathbf{k})$.

Подставим в правую часть формулы (7) выражение для $\bar{f}(\mathbf{k})$, даваемое (6), а затем, воспользуемся (5). В результате, получим

$$\frac{1}{N}\sum_{\mathbf{k}\in\bar{\Lambda}_N}\exp\left(i(\mathbf{k},\mathbf{x})\right)\sum_{\mathbf{y}\in\Lambda_N} f(\mathbf{y})\exp\left(-i(\mathbf{k},\mathbf{y})\right) = \sum_{\mathbf{y}\in\Lambda_N} f(\mathbf{y})\frac{1}{N}\sum_{\mathbf{k}\in\bar{\Lambda}_N}\exp\left(i(\mathbf{k},\mathbf{x}-\mathbf{y})\right) =$$

$$= \sum_{\mathbf{y}\in\Lambda_N} f(\mathbf{y})\delta_{\mathbf{x}-\mathbf{y},0} = f(\mathbf{x})\,. \quad \blacksquare$$

Лемма 2. *Пусть периодическая по* $mod\,\Lambda_N$ *функция* $f:\mathbb{Z}^d\mapsto\mathbb{R}$ *является симметричной* $f(\mathbf{x}) = f(-\mathbf{x})$. *Тогда функция* $\bar{f}(\mathbf{k})$ *также является симметричной и вещественнозначной.*

□ Так как множество Λ_N симметрично относительно отражений, то есть в выбранной его параметризации имеется равенство $-\Lambda_N = \Lambda_N$, то из (6) следует

$$\bar{f}(-\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{x}\in\Lambda_N} f(\mathbf{x})\exp\left(i(\mathbf{k},\mathbf{x})\right) = \sum_{\mathbf{x}\in\Lambda_N} f(\mathbf{x})\exp\left(-i(\mathbf{k},-\mathbf{x})\right) =$$

$$= \sum_{\mathbf{x}\in-\Lambda_N} f(-\mathbf{x})\exp\left(-i(\mathbf{k},\mathbf{x})\right) = \bar{f}(\mathbf{k})\,,$$

где произведена замена переменной суммирования $\mathbf{x}\Rightarrow-\mathbf{x}$ и мы воспользовались свойством $f(-\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$.

Вещественность функции $\bar{f}(\mathbf{k})$ следует из доказанного в Теореме 1 свойства $\bar{f}^*(\mathbf{k}) = \bar{f}(-\mathbf{k})$ и свойства $\bar{f}(\mathbf{k}) = \bar{f}(-\mathbf{k})$. $\blacksquare$

5. Описание класса $\mathcal{B}$. Мы ограничимся описанием всех возможных основных состояний только для векторной модели с парным взаимодействием в отсутствие внешнего поля. Это означает, что отличен от нуля только обменный интеграл $I^{(2)}_{i_1,i_2}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)$. Его трансляционная инвариантность (2) означает, что он зависит только от одной пространственной переменной – от разности $(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)$, то есть $I^{(2)}_{i_1,i_2}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)\equiv I_{i_1,i_2}(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)$. Ввиду симметрии этого интеграла по отношению к перестановкам узлов $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$, введенная таким образом тензор-функция $I_{i_1,i_2}(\mathbf{x})$ обладает свойством $I_{i_1,i_2}(\mathbf{x}) = I_{i_2,i_1}(-\mathbf{x})$. Более того, мы ограничимся изучением только сферически симметричной векторной модели, у которой обменный интеграл $I^{(2)}_{i_1,i_2}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)$ инвариантен относительно вращений, то есть $I_{i_1,i_2}(\mathbf{x})\equiv I(\mathbf{x})\delta_{i_1,i_2}$, где введенная функция $I(\mathbf{x})$, на основании свойства симметрии $I_{i_1,i_2}(\mathbf{x})$ относительно перестановок аргументов, должна быть симметричной $I(\mathbf{x}) = I(-\mathbf{x})$.

Таким образом, в рассматриваемом нами случае гамильтониан H_N имеет вид

$$\mathsf{H}_N[\mathbf{s}] = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\in\Lambda_N} I(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)s_j(\mathbf{x}_1)s_j(\mathbf{x}_2)\,.$$

При этом свойство (3) суммируемости обменных интегралов, в рассматриваемом нами случае, сводится к следующему:

$$\sum_{\mathbf{x}\in\Lambda}|I(\mathbf{x})| < \infty\,.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $I(0) = 0$, так как, в противном случае, слагаемые $\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{x}} I(0)\mathbf{s}^2(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}I(0)N$, пропорциональные $I(0)$, не зависят от вида поля $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ и поэтому могут не учитываться при вычислении основного состояния.

Наконец, при решении задачи, мы будем учитывать, что свойство центральной симметрии функции $I(\mathbf{x})$, преобразования которой составляют двухэлементную группу, не является самой широкой группой ее симметрии. Наоборот, группа симметрии функции $I(\mathbf{x})$ содержит подгруппу симметрий простой кубической решетки.[4)] Поле $\mathbf{s}$ может считаться как векторным, так и псевдовекторным, у которого $s_i^2(\mathbf{x}) = 1$, $\mathbf{x}\in\Lambda_N$.

Существенным ограничением является то, что в наших построениях гамильтониан H_Λ заменяется на его продолжение на класс периодических по $\operatorname{mod}\Lambda_N$ полей. В этом случае функция $I(\mathbf{x})$ определена во всех узлах решетки Λ и является периодической по $\operatorname{mod}\Lambda_N$.

Определим на основе конечного Фурье-преобразования функции

$$\bar{I}(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{x}\in\Lambda_N} I(\mathbf{x})\exp\left(-i(\mathbf{k},\mathbf{x})\right)\,, \tag{7}$$

$$\bar{s}_j(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{x}\in\Lambda_N} s_j(\mathbf{x})e^{-i(\mathbf{k},\mathbf{x})} \tag{8}$$

так, что имеют место, согласно Теореме 1, формулы обращения

$$I(\mathbf{x}) = \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{k}\in\bar{\Lambda}_N}\bar{I}(\mathbf{k})e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})} = \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{k}\in\bar{\Lambda}_N}\bar{I}(\mathbf{k})e^{-i(\mathbf{k},\mathbf{x})}\,, \tag{9}$$

$$s_j(\mathbf{x}) = \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{k}\in\bar{\Lambda}_N}\bar{s}_j(\mathbf{k})e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})} = \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{k}\in\bar{\Lambda}_N}\bar{s}_j^*(\mathbf{k})e^{-i(\mathbf{k},\mathbf{x})}\,, \tag{10}$$

выполняющиеся во всех узлах $\mathbf{x}\in\mathbb{Z}^d$.

---

[4]Например, уже при $d = 2$ нужно учитывать отражательные симметрии по отношению к каждой из координатных осей $I(-x_1,x_2) = I(x_1,x_2)$ и $I(x_1,-x_2) = I(x_1,x_2)$.

Из условия $I(-\mathbf{x}) = I(\mathbf{x})$ и Леммы 2 следует, что функция $\bar{I}(\mathbf{k})$ вещественна и для нее имеет место равенство $\bar{I}(-\mathbf{k}) = \bar{I}(\mathbf{k})$.

Функция $\bar{I}(\mathbf{k})$ непрерывна внутри $\bar{\Lambda}$ и периодическая по mod $\bar{\Lambda}$. Указанное выше ее свойство гарантирует ее непрерывность на границе области $\bar{\Lambda}$.

Вещественная функция $\bar{I}(\mathbf{k})$ определена для всех векторов $\mathbf{k}$, составляющих пространство $\mathbb{R}^3$, в котором она является периодической по $\mathrm{mod}\,\bar{\Lambda}$, $\bar{\Lambda} = [-\pi,\pi]^d$. В силу свойства $\bar{I}(-\mathbf{k}) = \bar{I}(\mathbf{k})$, если она имеет глобальный минимум в точке $\mathbf{k}_0 \in \bar{\Lambda}$, то она обязана иметь такой же минимум в точке $-\mathbf{k}_0$.

При решении задачи описания класса основных состояний векторной модели мы будем искать среди них только такие, фурье-образ которых сосредоточен только на одной из пар ненулевых точек $\mathbf{k_0}$ и $-\mathbf{k}_0$, в которых функция $\bar{I}(\mathbf{k})$ достигает глобального минимума в $\bar{\Lambda}$ (либо, в вырожденном случае, когда пара вырождается в одну точку $\mathbf{0}$, где $\bar{I}(\mathbf{k})$ достигает глобального минимума).

Решение задачи состоит в следующем. Подстановка в периодический гамильтониан

$$\mathsf{H}_N = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{x}_1 \in \Lambda,\ \mathbf{x}_2 \in \Lambda_N} I(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) s_j(\mathbf{x}_1) s_j(\mathbf{x}_2)$$

разложений (10) дает

$$\mathsf{H}_N = \frac{1}{2N^2} \sum_{\mathbf{x}_1 \in \Lambda, \mathbf{x}_2 \in \Lambda_N} I(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \sum_{\mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2 \in \bar{\Lambda}_N} \bar{s}_j(\mathbf{k}_1) \bar{s}_j^*(\mathbf{k}_2) \exp(i(\mathbf{k}_1, \mathbf{x}_1) - i(\mathbf{k}_2, \mathbf{x}_2)) =$$

$$= \frac{1}{2N^2} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 \in \bar{\Lambda}_N} \bar{s}_j(\mathbf{k}_1) \bar{s}_j^*(\mathbf{k}_2) \sum_{\mathbf{x}_1 \in \Lambda,\ \mathbf{x}_2 \in \Lambda_N} I(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \exp(i(\mathbf{k}_1, \mathbf{x}_1) - i(\mathbf{k}_2, \mathbf{x}_2)) =$$

$$= \frac{1}{2N^2} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 \in \bar{\Lambda}_N} \bar{s}_j(\mathbf{k}_1) \bar{s}_j^*(\mathbf{k}_2) \sum_{\mathbf{x}_2 \in \Lambda_N} \exp(i(\mathbf{x}_2, \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)) \sum_{\mathbf{x}_1 \in \Lambda} I(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \exp(i(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{k}_1))\,.$$

Последняя сумма здесь равна

$$\sum_{\mathbf{x}_1 \in \Lambda} I(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \exp(i(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{k}_1)) = \sum_{\mathbf{x} \in \Lambda - \mathbf{x}_2} I(\mathbf{x}) \exp(i(\mathbf{k}_1, \mathbf{x})) = \sum_{\mathbf{x} \in \Lambda} I(\mathbf{x}) \exp(i(\mathbf{k}_1, \mathbf{x})) = \bar{I}(\mathbf{k}).$$

Сумма по $\mathbf{x}_2$, согласно следствию Леммы 1, равна $N\delta_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}$. В результате, имеем

$$\mathsf{H}_N = \frac{1}{2N} \sum_{\mathbf{k} \in \bar{\Lambda}_N} \bar{I}(\mathbf{k}) |s_j(\mathbf{k})|^2\,. \tag{11}$$

Пусть функция $\bar{I}(\mathbf{k})$ имеет минимум в какой-то точке $\mathbf{k}_0 \in [-\pi,\pi]^d \equiv \bar{\Lambda}$, которая принадлежит $\bar{\Lambda}_N$ при каком-то N. Тогда она принадлежит всем Λ_{mN}, $m \in \mathbb{N}$. При этом точка $-\mathbf{k}_0$ также является точкой минимума функции $\bar{I}(\mathbf{k})$, так как $\bar{I}(\mathbf{k}) = \bar{I}(-\mathbf{k})$.

В силу соотношений $s_j^2(\mathbf{x}) = 1$, $\mathbf{x} \in \Lambda_N$, квадратичная норма поля $s_i(\mathbf{x})$ фиксирована,

$$\sum_{\mathbf{x} \in \Lambda_N} s_j^2(\mathbf{x}) = N\,,$$

и поэтому фиксирована норма его Фурье-образа,

$$\sum_{\mathbf{x}\in\Lambda_N} s_j^2(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{x}\in\Lambda_N} \frac{1}{N^2} \sum_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2\in\bar{\Lambda}_N} \exp(i(\mathbf{x},\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2))\bar{s}_j(\mathbf{k}_1)\bar{s}_j^*(\mathbf{k}_2) =$$

$$= \frac{1}{N^2} \sum_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2\in\bar{\Lambda}_N} \bar{s}_j(\mathbf{k}_1)\bar{s}_j^*(\mathbf{k}_2) \sum_{\mathbf{x}\in\Lambda_N} \exp(i(\mathbf{x},\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)) =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2\in\bar{\Lambda}_N} \bar{s}_j(\mathbf{k}_1)\bar{s}_j^*(\mathbf{k}_2)\delta_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2} = \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{k}\in\bar{\Lambda}_N} |\bar{s}_j(\mathbf{k})|^2\,,$$

где мы воспользовались следствием Леммы 1.

Таким образом, имеем

$$\sum_{\mathbf{k}\in\bar{\Lambda}_N} |\bar{s}_j(\mathbf{k})|^2 = N^2\,. \tag{12}$$

Теперь достаточно найти все наборы переменных $|\bar{s}_j(\mathbf{k})|^2 \equiv \eta(\mathbf{k})$, для которых реализуется глобальный минимум функционала (11), при выполнении для них условия (12), а затем среди всех возможных таких наборов найти те, которые удовлетворяют всем условия $s_j^2(\mathbf{x}) = 1$, $\mathbf{x}\in\Lambda_N$.

Первая задача представляет собой минимизацию линейной формы

$$\mathsf{H}_N = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}\in\bar{\Lambda}_N} \bar{I}(\mathbf{k})\eta(\mathbf{k})$$

на выпуклом классе $\mathcal{R} = \{\eta(\mathbf{k}) \geq 0 \ : \ \mathbf{k}\in\bar{\Lambda}_N, \sum_{\mathbf{k}\in\bar{\Lambda}_N}\eta(\mathbf{k}) = N^2\}$ функций на $\bar{\Lambda}_N$. Ввиду свойства $|\bar{s}_j(\mathbf{k})|^2 = |\bar{s}_j(-\mathbf{k})|^2$, при минимизации нужно ограничиться только множеством симметричных функций $\eta(\mathbf{k})$, $\mathbf{k}\in\bar{\Lambda}_N$, так как и минимизируемая форма, ввиду свойства симметрии функции $\bar{I}(\mathbf{k})$, так и линейная форма, определяющая класс $\mathcal{R}$, задаются только на симметричных функциях.

Искомый минимум может достигаться в каждой точке выпуклой оболочки из всех симметричных функций сосредоточенных на множестве точек $\mathbf{k}$ из $\bar{\Lambda}_N$, в которых $\bar{I}(\mathbf{k})$ достигает абсолютного минимума.

Далее, мы будем рассматривать только те поля $\mathbf{s}$, которые порождаются крайними точками множества симметричных функций на $\bar{\Lambda}_N$. А именно, пусть $\mathbf{k}_0$ – такая точка. Тогда положим

$$\eta(\mathbf{k}) = |\bar{s}_j(\mathbf{k})|^2 = |\bar{s}_j(-\mathbf{k})|^2 = C(\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}_0} + \delta_{\mathbf{k},-\mathbf{k}_0})\,, \tag{13}$$

если $\mathbf{k}_0 \neq 0$. Если же $\mathbf{k}_0 = 0$, то этот вывод остается в силе $|\bar{s}_j(\mathbf{k})|^2 = 2C\delta_{\mathbf{k},\mathbf{0}}$.

Подставляя это выражение в условие нормировки, имеем, в обоих случаях, $C = N^2/2$. При этом минимальная энергия равна

$$E_N^{(m)} = \min \mathsf{H}_N[\mathbf{s}] = \frac{N}{2}\bar{I}(\mathbf{k}_0)\,,$$

где допустимо значение $\mathbf{k}_0 = 0$.

Учитывая, что $\bar{s}_j^*(\mathbf{k}) = \bar{s}_j(-\mathbf{k})$, на основании (13), запишем

$$\bar{s}_j(\mathbf{k}) = NA_j\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}_0} + NA_j^*\delta_{\mathbf{k},-\mathbf{k}_0}\,, \tag{14}$$

где введена, в общем случае, комплексная векторная амплитуда A_j. Тогда

$$N^{-2}|\bar{s}_j(\mathbf{k})|^2 = |A_j|^2(\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}_0} + \delta_{\mathbf{k},-\mathbf{k}_0}) + (A_j^2 + A_j^{*2})\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}_0}\delta_{\mathbf{k},-\mathbf{k}_0}\,.$$

Если $\mathbf{k}_0 \neq 0$, то второе слагаемое равно нулю и сравнивая с прежним выражением для $|\bar{s}_j(\mathbf{k})|^2$, имеем $2|A_j|^2 = 1$. Если же $\mathbf{k}_0 = 0$, то, так как вектор $\bar{s}_j(0)$, в силу Леммы 2, вещественный, то амплитуда A_j – вещественна. При этом выписанное выражение равно $4A_j^2\delta_{\mathbf{k},\mathbf{0}}$ и, следовательно, $4A_j^2 = 1$.

На основании (11), запишем

$$s_j(\mathbf{x}) = A_je^{i(\mathbf{k}_0,\mathbf{x})} + A_j^*e^{-i(\mathbf{k}_0,\mathbf{x})}\,. \tag{15}$$

Таким образом, все поля, реализующие минимум H_N и удовлетворяющие условию (12), имеют вид (15) с произвольным комплексным (вещественным) вектором A_j, нормированным условием $2|A_j|^2 = 1$ ($4A_j^2 = 1$).

Вторая задача состоит в выборе из всей совокупности полей (15) тех, которые удовлетворяют условиям *согласования* $s_j^2(\mathbf{x}) = 1$, $\mathbf{x} \in \Lambda_N$.

Рассмотрим сначала случай $\mathbf{k}_0 = 0$. Положив $A_j = g_j/\sqrt{2}$ с единичным вектором $\mathbf{g}$, получим, после подстановки в (15), что такое поле $s_j(\mathbf{x}) = g_j$ является решением задачи. Это так называемое *ферромагнитное упорядочение*.

При $\mathbf{k}_0 \neq \mathbf{0}$ из (15) имеем

$$s_j^2(\mathbf{x}) = A_j^2e^{2i(\mathbf{k}_0,\mathbf{x})} + A_j^{2*}e^{-2i(\mathbf{k}_0,\mathbf{x})} + 2|A_j|^2 = 1\,.$$

Тогда выражение $A_j^2e^{2i(\mathbf{k}_0,\mathbf{x})} + A_j^{2*}e^{-2i(\mathbf{k}_0,\mathbf{x})}$ не должно зависеть от $\mathbf{x}$. Это возможно только в том случае, когда: либо $A_j^2 = 0$, либо $(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}) = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

В первом случае положим $A_j = (g_j - ih_j)/2$, где $\mathbf{g}$ и $\mathbf{h}$ – вещественные векторы. Тогда $\mathbf{A}^2 = (\mathbf{g}^2 - \mathbf{h}^2)/4 - i(\mathbf{g}, \mathbf{h})/2$. Из требования $\mathbf{A}^2 = 0$ следует, что $\mathbf{g}^2 = \mathbf{h}^2$ и $(\mathbf{g}, \mathbf{h}) = 0$. Учитывая, что $1 = 2|\mathbf{A}|^2 = (\mathbf{g}^2 + \mathbf{h}^2)/2 = \mathbf{g}^2 = \mathbf{h}^2$, находим общее выражение для поля, на котором реализуется минимум H_N:

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}) = 2\mathrm{Re}\,\mathbf{A}e^{i(\mathbf{k}_0,\mathbf{x})} = \mathbf{g}\cos(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}) + \mathbf{h}\sin(\mathbf{k}_0, \mathbf{x})\,, \tag{16}$$

которое удовлетворяет условиям *согласования*:

$$\mathbf{s}^2(\mathbf{x}) = \mathbf{g}^2\cos^2(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}) + \mathbf{h}^2\sin^2(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}) = 1\,.$$

Это поле геометрически представляет собой *спиральную магнитную структуру*, определяемую произвольной парой взаимно ортогональных векторов $\mathbf{g}$ и $\mathbf{h}$ и вектором $\mathbf{k}_0 \in \bar{\Lambda}$, определяющим направление оси и шаг спирали.

Рассмотрим второй случай. Он является вырожденным случаем первого. Он невозможен при L четных, но реализуется при L нечетных. В этом случае $\mathbf{k}_0$ лежит в угловых точках куба $\bar{\Lambda} = [-\pi, \pi]^d$. В соответствии с нашим предположением о расположении минимумов функции $\bar{I}(\mathbf{k})$, имеется d возможных решений такого типа. Они соответствуют точкам $\mathbf{k}_0$ и $-\mathbf{k}_0$, которые являются концами трех главных диагоналей куба $\bar{\Lambda}$. Физически эти решения описывают одну и ту же ситуацию, так как они получаются друг из друга посредством отражений соответствующих осей кристалла.

Полагая, как и выше, $A_j = (g_j - ih_j)/2$, из условия $2|\mathbf{A}|^2 = 1$, находим $(\mathbf{g}^2 + \mathbf{h}^2)/2 = 1$. При этом

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}) = 2\mathrm{Re}\mathbf{A}e^{i(\mathbf{k}_0,\mathbf{x})} = \mathbf{g}\cos(\mathbf{k}_0,\mathbf{x}) = \mathbf{g}(-1)^{\sum_{j=1}^{d}\alpha_j x_j}, \tag{17}$$

так как $(\mathbf{k}_0,\mathbf{x}) = \pi n$, и поэтому $\sin(\mathbf{k}_0,\mathbf{x}) = 0$ и $\cos(\mathbf{k}_0,\mathbf{x}) = (-1)^{\sum_{j=1}^{d}\alpha_j x_j}$, где $x_j \in \mathbb{Z}$, $\alpha_j \in \{\pm 1\}$, $j = 1 \div d$. Тогда условие согласования требует, чтобы $\mathbf{s}^2(\mathbf{x}) = 1 = \mathbf{g}$. Сравнивая с предыдущим равенством, имеем $\mathbf{h}^2 = 1$, но направление его может быть взято произвольным, так как он не входит в выражение для поля. Поле (17) представляет собой так называемую *антиферромагнитное упорядочение*.

Наконец, если хотя бы одна координата точки $\mathbf{k}_0$ несоизмерима с L, то минимум функции $\bar{I}(\mathbf{k})$ может достигаться только в каких-то из $2d$ точек, ближайших к точке $\mathbf{k}_0$. При этом точки, в которых он достигается стремятся при $N \to \infty$ к $\mathbf{k}_0$, так как функция $\bar{I}(\mathbf{k})$ непрерывна относительно $\mathbf{k}$.

Литература

1. Ахиезер А.И., Барьяхтар В.Г., Пелетминский С.В. Спиновые волны / М.: Наука, 1967.

2. Ruelle D. Statistical Mechanics. Rigorous Results / New York-Amsterdam: W.A.Benjamin, Inc., 1969.

GROUND STATE OF VECTOR LATTICE MODEL WITH PAIR INTERACTION

Yu.P. Virchenko

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: virch@bsu.edu.ru

Abstract. The class of ground states of spherically symmetric vector model in frameworks of statistical mechanics of lattice systems is described. It is done at the supposition that external field is absent and the exchange integral in its hamiltonian is integrable. Besides, it is supposed that the Fourier-image of the hamiltonian has unique minimum point with accuracy of symmetry transformation and periodic boundary conditions are realized.

Key words: vector model, hamiltonian, ground state.