



О СВОЙСТВАХ КВАЗИСУБПОЛОСНЫХ И G-СУБПОЛОСНЫХ МАТРИЦ

А.А. ЧЕРНОМОРЕЦ¹
В.П. ВОЛЧКОВ²

<sup>1) Белгородский государственный
национальный исследовательский
университет</sup>

<sup>2) Московский технический
университет связи и информатики</sup>

e-mail:
chernomorets@bsu.edu.ru

В работе приведены свойства квазисубполосных и G-субполосных матриц в сравнении со свойствами субполосных матриц, применяемых в субполосном анализе-синтезе изображений.

Ключевые слова: субполосный анализ-синтез, изображение, матрица, собственное число.

Введение.

Одним из направлений развития информационно-телекоммуникационных систем является совершенствование методов обработки данных, например, речевых данных и изображений, представленных в цифровом виде. Помимо традиционно используемых модификаций дискретного преобразования Фурье, вейвлет-анализа, указанные методы активно разрабатываются в рамках теории субполосного анализа-синтеза [1] звуковых данных и изображений на основе разложения по субполосным матрицам [2] и их собственным векторам в различных частотных интервалах. Субполосный анализ-синтез также представляется возможным осуществлять на основе так называемых квазисубполосных и G-субполосных матриц, исследованию свойств которых посвящена данная работа.

В данной работе свойства квазисубполосных и G-субполосных матриц исследуются на примере субполосных преобразований изображений, что не снижает значения полученных результатов для анализа одномерных данных.

Субполосные матрицы.

Изображения в цифровой форме в большинстве случаев представляются в виде матрицы вещественных значений $\Phi = (f_{ik})$, $i = 1, 2, \dots, N_1$, $k = 1, 2, \dots, N_2$, элементы которой соответствуют яркости отдельных пикселей изображения.

Субполосный анализ-синтез изображений [3] осуществляется в центрально-симметричном частотном интервале Ω следующего вида,

$$\Omega : \{(u, v) | (u \in [u_1, u_2], v \in [v_1, v_2]) \cup (u \in [u_1, u_2], v \in [-v_2, -v_1]) \cup (u \in [-u_2, -u_1], v \in [-v_2, -v_1]) \cup (u \in [-u_2, -u_1], v \in [v_1, v_2])\}, \\ 0 \leq u_1, u_2, v_1, v_2 \leq \pi,$$

принадлежащем области нормированных частот $D_2(u, v)$

$$D_2(u, v) = \{(u, v) | -\pi \leq u, v < \pi\}. \quad (1)$$

В большинстве случаев субполосные преобразования определяются на семействе центрально-симметричных частотных интервалов, образуемых при разбиении частотной области $D_2(u, v)$ на $R_1 \cdot R_2$ равновеликих частотных интервалов $\Omega_{r_1 r_2}$, $r_1 = 1, 2, \dots, R_1$, $r_2 = 1, 2, \dots, R_2$,

$$\Omega_{r_1 r_2} : \{(u, v) | (u \in [u_1^{r_1}, u_2^{r_1}], v \in [v_1^{r_2}, v_2^{r_2}]) \cup (u \in [u_1^{r_1}, u_2^{r_1}], v \in [-v_2^{r_2}, -v_1^{r_2}]) \cup (u \in [-u_2^{r_1}, -u_1^{r_1}], v \in [-v_2^{r_2}, -v_1^{r_2}]) \cup (u \in [-u_2^{r_1}, -u_1^{r_1}], v \in [v_1^{r_2}, v_2^{r_2}])\}, \quad (2)$$

$$u_1^{r_1} = (r_1 - 1) \frac{\pi}{R_1}, \quad u_2^{r_1} = r_1 \frac{\pi}{R_1}, \quad r_1 = 1, 2, \dots, R_1,$$



$$v_1^{r_2} = (r_2 - 1) \frac{\pi}{R_2}, \quad v_2^{r_2} = r_2 \frac{\pi}{R_2}, \quad r_2 = 1, 2, \dots, R_2.$$

Реализация субполосных преобразований [3] изображений в частотном интервале $\Omega_{i_1 i_2}$, $r_1 = 1, 2, \dots, R_1$, $r_2 = 1, 2, \dots, R_2$, осуществляется с помощью субполосных матриц $A_{r_1} = (a_{i_1 i_2}^{r_1})$, $i_1, i_2 = 1, 2, \dots, N_1$, и $A_{r_2} = (a_{k_1 k_2}^{r_2})$, $k_1, k_2 = 1, 2, \dots, N_2$, соответствующих заданному частотному интервалу, элементы которых вычисляются на основании следующих выражений,

$$a_{i_1 i_2}^{r_1} = \begin{cases} \frac{\text{Sin}(\sigma_1 r_1 (i_1 - i_2)) - \text{Sin}(\sigma_1 (r_1 - 1)(i_1 - i_2))}{\pi (i_1 - i_2)}, & i_1 - i_2 \neq 0, \\ \frac{\sigma_1}{\pi}, & i_1 - i_2 = 0, \end{cases} \quad (3)$$

$$a_{k_1 k_2}^{r_2} = \begin{cases} \frac{\text{Sin}(\sigma_2 r_2 (k_1 - k_2)) - \text{Sin}(\sigma_2 (r_2 - 1)(k_1 - k_2))}{\pi (k_1 - k_2)}, & k_1 - k_2 \neq 0, \\ \frac{\sigma_2}{\pi}, & k_1 - k_2 = 0, \end{cases} \quad (4)$$

$$\sigma_1 = \frac{\pi}{R_1}, \quad \sigma_2 = \frac{\pi}{R_2}.$$

Свойства субполосных матриц исследованы достаточно подробно [4].

Представляет интерес исследование свойств квазисубполосных матриц $H_{r_1} = (h_{i_1 i_2}^{r_1})$ и G-субполосных матриц $G_{r_1} = (g_{i_1 i_2}^{r_1})$, $r_1 = 1, 2, \dots, R_1$, $i_1, i_2 = 1, 2, \dots, N_1$, которые также могут быть использованы при решении задач субполосного анализа-синтеза (для величин R_2 и N_2 свойства соответствующих матриц аналогичны). Значения элементов квазисубполосных матриц $H_{r_1} = (h_{i_1 i_2}^{r_1})$ и G-субполосных матриц $G_{r_1} = (g_{i_1 i_2}^{r_1})$, $r_1 = 1, 2, \dots, R_1$, $i_1, i_2 = 1, 2, \dots, N_1$, определяются на основании следующих соотношений,

$$h_{i_1 i_2}^{r_1} = \frac{\text{Sin}(\sigma_1 r_1 (i_1 + i_2 - 1)) - \text{Sin}(\sigma_1 (r_1 - 1)(i_1 + i_2 - 1))}{\pi (i_1 + i_2 - 1)}, \quad (5)$$

$$g_{i_1 i_2}^{r_1} = a_{i_1 i_2}^{r_1} + h_{i_1 i_2}^{r_1}. \quad (6)$$

Свойства квазисубполосных матриц.

Рассмотрим свойства квазисубполосных матриц H_r , $r = 1, 2, \dots, R$, значения элементов которых определяются соотношением (5).

Свойство 1)

Значения элементов квазисубполосной матрицы H_r , $r = 1, 2, \dots, R$, зависят только от величины N , количества R равновеликих интервалов и номера r частотного интервала.

Свойство 2)

Квазисубполосная матрица $H_r = (h_{ik}^r)$, $r = 1, 2, \dots, R$, $i, k = 1, 2, \dots, N$, является ганкелевой матрицей [5]. Значения всех элементов матрицы могут быть получены на основании $2N - 1$ значений.

В качестве примера в табл. 1 приведены значения отдельных элементов (h_{ik}^1) , $i = 1, 2, \dots, 16$, $k = 1, 2, \dots, 8$, квазисубполосной матрицы H_1 при $N=16$, $R=4$.

Таблица 1

Значения отдельных элементов квазисубполосной матрицы

 H_1 ($N=16$, $R=4$)

$i \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	8 ...
1	0,225	0,159	0,075	0	-0,045	-0,053	-0,032	0
2	0,159	0,075	0	-0,045	-0,053	-0,032	0	0,025
3	0,075	0	-0,045	-0,053	-0,032	0	0,025	0,031
4	0	-0,045	-0,053	-0,032	0	0,025	0,031	0,020
5	-0,045	-0,053	-0,032	0	0,025	0,031	0,020	0
6	-0,053	-0,032	0	0,025	0,031	0,020	0	-0,017
7	-0,032	0	0,025	0,031	0,020	0	-0,017	-0,022
8	0	0,025	0,031	0,020	0	-0,017	-0,022	-0,015
9	0,025	0,031	0,020	0	-0,017	-0,022	-0,015	0
10	0,031	0,020	0	-0,017	-0,022	-0,015	0	0,013
11	0,020	0	-0,017	-0,022	-0,015	0	0,013	0,017
12	0	-0,017	-0,022	-0,015	0	0,013	0,017	0,011
13	-0,017	-0,022	-0,015	0	0,013	0,017	0,011	0
14	-0,022	-0,015	0	0,013	0,017	0,011	0	-0,010
15	-0,015	0	0,013	0,017	0,011	0	-0,010	-0,014
16	0	0,013	0,017	0,011	0	-0,010	-0,014	-0,009

Свойство 3)

Значения элементов матрицы H_r , $r = 1, 2, \dots, R$, могут быть получены на основании значений элементов главной диагонали и первой наддиагонали.

Свойство 4)

Отдельные элементы первой строки квазисубполосной матрицы $H_r = (h_{ik}^r)$, $r = 1, 2, \dots, R$, $i, k = 1, 2, \dots, N$, равны нулю,

$$h_{1k}^r = 0, \quad (7)$$

$$k = nR, \quad n = 1, 2, \dots, N/R.$$

Соответственно, в каждой строке квазисубполосной матрицы имеется N/R элементов равных нулю.

Свойство 5)

Матрицы $H_r = (h_{ik}^r)$, $r = 1, 2, \dots, R$, симметричны.

Равенство элементов

$$h_{ik}^r = h_{ki}^r, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

следует из соотношения (5), определяющего значения данных элементов.

Данное свойство можно проиллюстрировать с помощью изображений рис. 1-2, на которых яркости пикселей представленных изображений определяются значениями элементов соответствующих квазисубполосных H_1, H_3 и субполосных A_1, A_3 матриц в указанных частотных интервалах (вычисления выполнены при $N=256$, $R=8$). Субполосные матрицы A_1, A_3 приведены для визуального сравнения значений элементов указанных матриц.

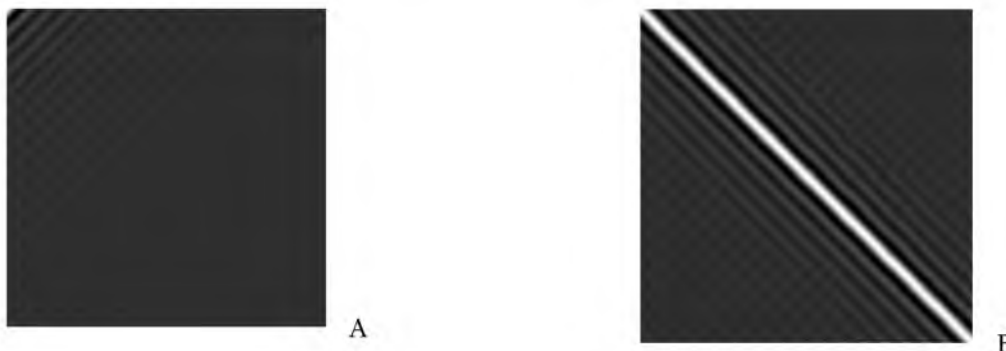


Рис. 1. Визуальное представление значений элементов матриц

для интервала U_1 ($N=256, R=8$): а – матрица H_1 , б – матрица A_1

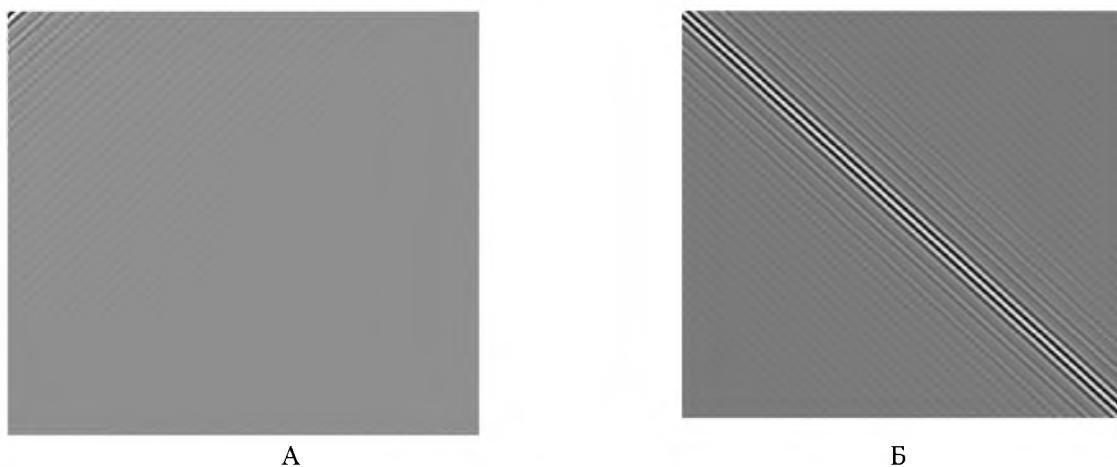


Рис. 2. Визуальное представление значений элементов матриц для интервала U_3 ($N=256, R=8$): а – матрица H_3 , б – матрица A_3

На рис. 3 в виде графиков отображены значения элементов главной диагонали указанных квазисубполосных матриц.

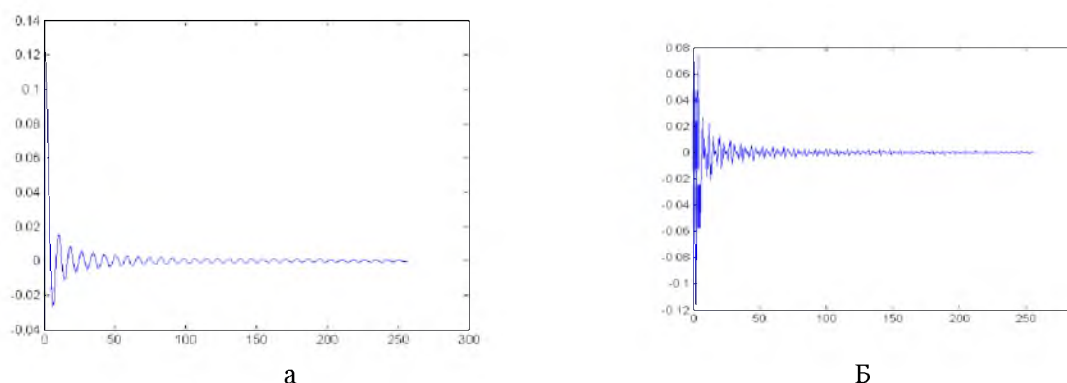


Рис. 3. Визуальное представление значений элементов главной диагонали квазисубполосной матрицы ($N=256, R=8$): а – диагональ матрицы H_1 , б – диагональ матрицы H_3

Свойство 6)

Сумма квазисубполосных матриц $H_r, r = 1, 2, \dots, R$, равна нулевой матрице Z_0 ,

$$\sum_{r=1}^R H_r = Z_0. \tag{8}$$

Соотношение (8) следует из соотношения (5), определяющего значения элементов квазисубполосных матриц.

Свойство 7)

Квазисубполосные матрицы имеют как положительные, так и отрицательные собственные числа.

В табл. 2 приведены значения отдельных собственных чисел квазисубполосных матриц H_1 и H_3 ($N=256, R=8$), упорядоченные по убыванию.

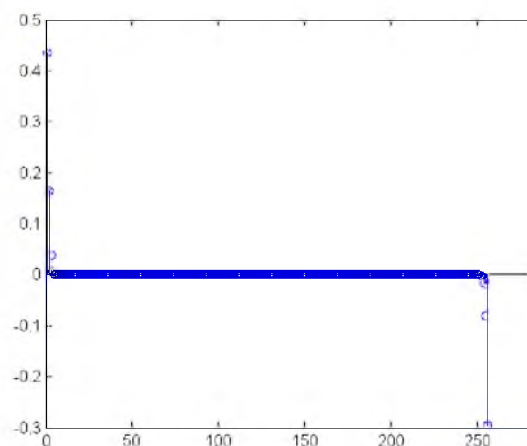


Таблица 2

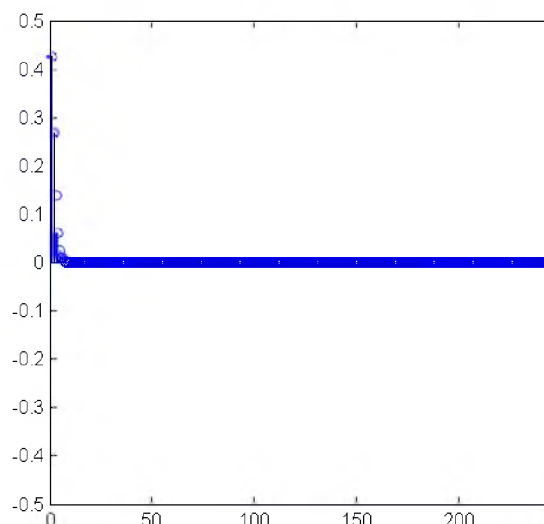
**Значения отдельных собственных чисел
квазисубполосных матриц H_1 и H_3 ($N=256, R=8$)**

i	Матрица H_1	Матрица H_3
1	0,435	0,425
2	0,164	0,268
3	0,037	0,137
4	0,006	0,059
5	0,001	0,024
6	0,0001	0,009
7	2,061e-005	0,003
8	2,467e-006	0,001
9	2,722e-007	0,0003
10	2,779e-008	0,0001
...
247	-8,996e-009	-0,0001
248	-9,102e-008	-0,0003
249	-8,536e-007	-0,001
250	-7,394e-006	-0,003
251	-5,888e-005	-0,009
252	-0,0004	-0,023
253	-0,002	-0,061
254	-0,016	-0,134
255	-0,081	-0,271
256	-0,294	-0,424

На рис. 4 в виде диаграммы представлены упорядоченные по убыванию значения собственных чисел квазисубполосных матриц H_1 и H_3 ($N=256, R=8$).



А



Б

Рис. 4. Визуальное представление значений собственных чисел квазисубполосных матриц ($N=256, R=8$): а – для матрицы H_1 , б – для матрицы H_3

Свойство 8)

Собственные векторы $\{\vec{q}_i^{Hr}\}$, $i = 1, 2, \dots, N$, квазисубполосной матрицы H_r , $r = 1, 2, \dots, R$, образуют ортогональную систему векторов,

$$\lambda_i^{Hr} \vec{q}_i^{Hr} = H_r \vec{q}_i^{Hr},$$

$$(\bar{q}_i^{Hr})^T \bar{q}_k^{Hr} = (\bar{q}_i^{Hr}, \bar{q}_k^{Hr}) = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k, \end{cases}$$

$$H_r = Q^{Hr} L^{Hr} (Q^{Hr})^T,$$

где Q^{Hr}, L^{Hr} – матрицы, составленные из собственных векторов и собственных чисел матрицы H_r ,

$$Q^{Hr} = (\bar{q}_1^{Hr} \bar{q}_2^{Hr} \dots \bar{q}_N^{Hr}),$$

$$L^{Hr} = \text{diag}(\lambda_1^{Hr} \lambda_2^{Hr} \dots \lambda_N^{Hr}),$$

diag – функция, позволяющая создать диагональную матрицу, на главной диагонали которой расположены значения элементов указанного вектора.

Свойства G-субполосных матриц.

Рассмотрим свойства G- субполосных матриц $G_r, r = 1, 2, \dots, R$, значения элементов которых определяются (6) значениями элементов субполосных и квазисубполосных матриц A_r и $H_r, r = 1, 2, \dots, R$,

$$G_r = A_r + H_r.$$

Свойство 1)

Значения элементов G-субполосной матрицы $G_r, r = 1, 2, \dots, R$, зависят от длины N сигнала, количества R равновеликих интервалов. номера r частотного интервала.

Свойство 2)

Матрицы $G_r = (g_{ik}^r), r = 1, 2, \dots, R$, симметричны, так как

$$g_{ik}^r = a_{ik}^r + h_{ik}^r = a_{ki}^r + h_{ki}^r = g_{ki}^r, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Данное свойство можно проиллюстрировать с помощью изображений рис. 5, на которых яркости пикселей представленных изображений определяются значениями элементов соответствующих субполосной и G-субполосных матриц в указанных частотных интервалах (вычисления выполнены при $N=256, R=8$).

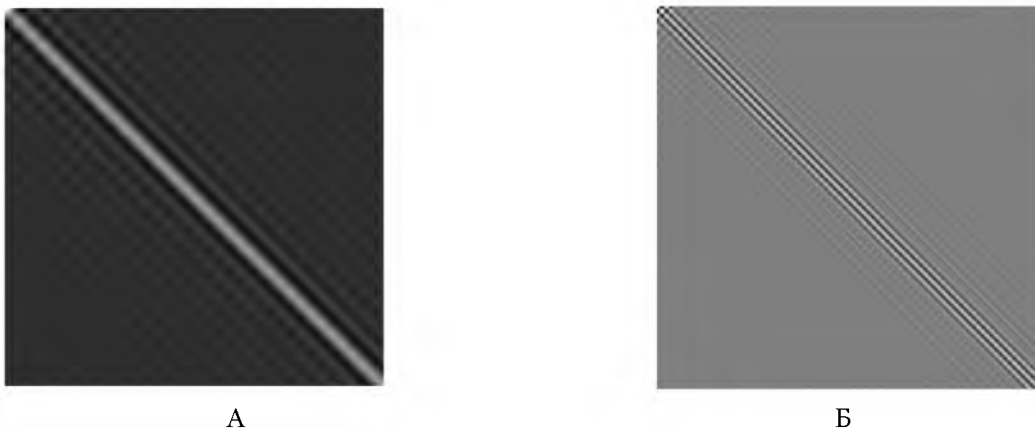


Рис. 5. Визуальное представление значений элементов G-субполосных матриц для частотных интервалов U_1 и U_3 : а – матрица G_1 , б – матрица G_3

Свойство 3)

Учитывая свойство субполосных матриц $A_r, r = 1, 2, \dots, R$,

$$I = \sum_{r=1}^R A_r,$$



где I – единичная матрица,

и свойство б) квазисубполосных матриц H_r , $r = 1, 2, \dots, R$, (8) имеют место равенства

$$I = \sum_{r=1}^R G_r = \sum_{r=1}^R (A_r + H_r), \quad (9)$$

$$I = \sum_{r=1}^R (A_r + kH_r), \quad (10)$$

где k – произвольный множитель.

Более того, равенство (10) сохраняется при использовании степенных квазисубполосных матриц H_r^p , $r = 1, 2, \dots, R$,

$$I = \sum_{r=1}^R (A_r + kH_r^p), \quad (11)$$

где элементы матрицы $H_r^p = (h_{ik}^{rp})$, $r = 1, 2, \dots, R$, $i, k = 1, 2, \dots, N$, определяются соотношением

$$h_{ik}^{rp} = \frac{\text{Sin}(\sigma(i+k-1)) - \text{Sin}(\sigma(r-1)(i+k-1))}{\pi(i+k-1)^p}. \quad (12)$$

Увеличение значения p приводит к более быстрому затуханию колебаний на графике (рис. 3).

Свойство 4)

Собственные числа G-субполосных матриц неотрицательны.

В табл. 3 приведены значения отдельных собственных чисел G-субполосных матриц G_1 и G_3 ($N=256$, $R=8$), упорядоченные по убыванию, а также собственные числа соответствующих субполосных матриц.

Таблица 3

Значения отдельных собственных чисел G-субполосных и субполосных матриц ($N=256$, $R=8$)

i	Матрица G_1	Матрица G_3	Матрица A_1	Матрица A_3
1	1	1	1	1
2	1	1	1	1
...
19	1	1	1	1
20	1	1	1	1
21	1	1	1	0,99998
22	1	1	1	0,99998
23	1	1	1	0,99981
24	1	1	1	0,99979
25	1	1	1	0,99819
26	1	0,999	0,99999	0,99804
27	1	0,999	0,99991	0,9858
28	1	0,999	0,99933	0,98508
29	0,999	0,995	0,99568	0,91607
30	0,999	0,976	0,97597	0,91407
31	0,992	0,892	0,89281	0,68161
32	0,871	0,665	0,66455	0,67995
33	0,348	0,335	0,33505	0,31919
34	0,035	0,106	0,10727	0,31763
35	0,0016	0,024	0,024218	0,086227
36	5,288e-005	0,0042	0,0044121	0,084202
37	1,361e-006	0,0007	0,00070045	0,015305
38	2,873e-008	9,274e-005	0,00010019	0,014532
39	5,085e-010	1,382e-005	1,3117e-005	0,0021015

Данные, приведенные в табл. 3, показывают, что G-субполосные матрицы имеют больше единичных собственных чисел, чем соответствующие субполосные матрицы.

На рис. 6 в виде диаграммы представлены упорядоченные по убыванию значения собственных чисел G-субполосных матриц G_1 и G_3 (вычисления выполнены при $N=256, R=8$).

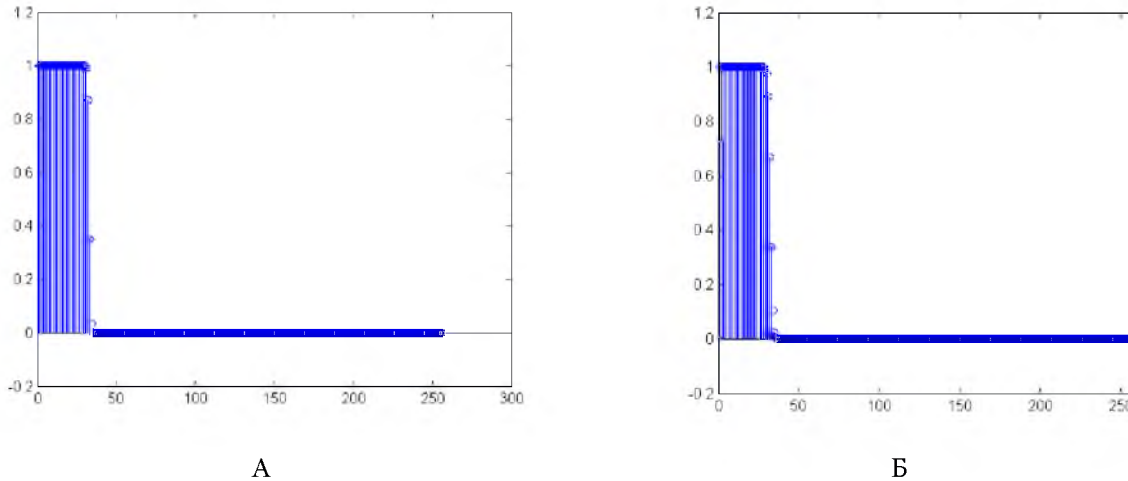


Рис. 6. Визуальное представление значений собственных чисел G-субполосных матриц: а – для матрицы G_1 , б – для матрицы G_3

Свойство 5)

Собственные векторы $\{\bar{q}_i^{Gr}\}$, $i = 1, 2, \dots, N$, G-субполосной матрицы G_r , $r = 1, 2, \dots, R$, образуют ортогональную систему векторов,

$$\lambda_i^{Gr} \bar{q}_i^{Gr} = G_r \bar{q}_i^{Gr},$$

$$(\bar{q}_i^{Gr})^T \bar{q}_k^{Gr} = (\bar{q}_i^{Gr}, \bar{q}_k^{Gr}) = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k, \end{cases}$$

$$G_r = Q^{Gr} L^{Gr} (Q^{Gr})^T,$$

где Q^{Gr} , L^{Gr} – матрицы, составленные из собственных векторов и собственных чисел матрицы G_r ,

$$Q^{Gr} = (\bar{q}_1^{Gr} \bar{q}_2^{Gr} \dots \bar{q}_N^{Gr}),$$

$$L^{Gr} = \text{diag}(\lambda_1^{Gr} \lambda_2^{Gr} \dots \lambda_N^{Gr}),$$

diag – функция, позволяющая создать диагональную матрицу, на главной диагонали которой расположены значения элементов указанного вектора.

Таким образом, рассмотренные свойства квазисубполосных и G-субполосных матриц могут служить основой для разработки методов и алгоритмов организации эффективного вычисления и хранения данных матриц, а также для выявления отдельных характеристик изображений, позволяющих эффективно решать различные задачи субполосного анализа-синтеза, например, задачи сжатия изображений.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 12-07-0257а.

Список литературы

1. Жилияков Е.Г. Вариационные методы анализа сигналов на основе частотных представлений [Текст] / Е.Г. Жилияков, С.П. Белов, А.А. Черноморец // Вопросы радиоэлектроники, Сер. ЭВТ. – 2010. – Вып. 1. – С. 10-25.
2. Жилияков Е.Г. Методы анализа и построения функций по эмпирическим данным на основе частотных представлений [Текст] / Е.Г. Жилияков. – Белгород, изд-во БелГУ, 2007. – 160 с.



3. Жилияков Е.Г. Оптимальная фильтрация изображений на основе частотных представлений [Текст] / Е.Г. Жилияков, А.А. Черноморец // Вопросы радиоэлектроники. Сер. ЭВТ. – 2008. – Вып. 1. – С. 118-131.
4. Черноморец А.А. О свойствах собственных векторов субполосных матриц [Текст] / А.А. Черноморец, Е.И. Прохоренко, В.А. Голощапова // Научные ведомости БелГУ. Сер. История. Политология. Экономика. Информатика. – 2009. – № 7 (62). – Вып. 10/1. – С. 122-128.
5. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц [Текст] / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Физматлит, 2004. – 560 с.

ABOUT PROPERTIES OF QUASISUBBAND AND G-SUBBAND MATRICES

A.A. CHERNOMORETS¹

V.P. VOLCHKOV²

*¹Belgorod National
Research University*

*e-mail:
chernomorets@bsu.edu.ru*

*²Moscow Technical University
Communication and Informatics*

The properties of quasisubband and G-subband matrices in comparison with the properties of subband matrices used for subband analysis-synthesis are described in the work.

Key words: subband analysis-synthesis, image, matrix, eigenvalue.