УДК 681.3

ТОЧНОЕ НАХОЖДЕНИЕ ОБОБЩЕННОЙ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ МУРА – ПЕНРОУЗА В СИСТЕМЕ ОСТАТОЧНЫХ КЛАССОВ

Н. И. ЧЕРВЯКОВ
М. В. ЧЕРНОВА

Ставропольский государственный университет

e-mail:
dechernov@yandex.ru

При решении практических задач система линейных уравнений может оказаться несовместной. В этом случае за решение системы принимается ее нормальное псевдорешение, которое может быть найдено с помощью обобщенной обратной матрицы Мура – Пенроуза. Одним из оптимальных методов нахождения этой матрицы является алгоритм Эрмита. При реализации этого метода на ЭВМ главной проблемой является накопление ошибок округлений. Работа посвящена вопросу повышения точности вычислений при нахождении обобщенной обратной матрицы средствами системы остаточных классов. Показана возможность построения арифметики, позволяющей полностью исключить ошибки округлений.

Ключевые слова: обобщенная обратная матрица Мура – Пенроуза, алгоритм Эрмита, система остаточных классов, метод Жордана – Гаусса, ошибки округлений, расширенный алгоритм Евклида, дроби Фарея.

Проблема решения несовместной системы линейных уравнений существует при рассмотрении многих практических задач. В качестве решения указанной системы линейных уравнений принимается ее нормальное псевдорешение, которое может быть найдено с помощью обобщенной обратной матрицы Мура-Пенроуза. Одним из оптимальных методов нахождения этой матрицы является алгоритм Эрмита. При реализации этого метода на ЭВМ главной проблемой является накопление ошибок округлений.

С целью исключения ошибок округлений метод Эрмита можно реализовать в непозиционной системе счисления – системе остаточных классов (СОК). В СОК положительные целые числа представляются остатками от деления на выбранные модули. Для представления отрицательного числа $-x$ по модулю m может быть использовано положительные целые числа представляются остатками от деления на выбранные модули. Для представления отрицательного числа $-x$ по модулю m может быть использовано правило $\left|-x\right|_m = \begin{cases} m-x, & x<m \\ m-\left[(m-1)x/m\right], & x>m \end{cases}$. Операция деления заменяется умножением на величину обратную делителю. Для нахождения обратной может быть использован расширенный алгоритм Евклида [1]. Для наглядности рассмотрим процесс нахождения матрицы Мура – Пенроуза параллельно в позиционной системе счисления (ПСС) и в СОК с двумя модулями. Для того чтобы прямое отображение в СОК и обратно в ПСС было единственным модули выбраны из условия $2N^2+1 \le M$, где N наибольший порядок дроби Фарея среди исходных данных и конечного результата, $M = m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_k$ – произведение простых чисел модулей СОК. Множество $F_N = \{a/b \in Q : (a,b)=1, 0 \le |a| \le N, 0 \le |b| \le N, N \in Z, N>0\}$ дробей Фарея это конечное подмножество множества рациональных чисел [1]. В данном примере $N = 237$ и $2 \cdot 237^2 + 1 = 112339 \le 337 \cdot 347 = 116939 = M$, то есть $m1 = 337$ и $m2 = 347$. Для выполнения редукции матриц применен метод Жордана – Гаусса.

<table>
<tr><th>ПСС</th><th>СОК</th></tr>
<tr><td>$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ -2 & 3 & 2\\ 0 & 2 & 5\end{pmatrix}.$</td><td>$A=\begin{pmatrix}2 & 336 & 3\\ 335 & 3 & 2\\ 0 & 2 & 5\end{pmatrix}.$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$A\cdot A^T$</td></tr>
<tr><td>$\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ -2 & 3 & 2\\ 0 & 2 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\ -1 & 3 & 2\\ 3 & 2 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14 & -1 & 13\\ -1 & 17 & 16\\ 13 & 16 & 29\end{pmatrix}$</td><td>$\begin{pmatrix}2 & 336 & 3\\ 335 & 3 & 2\\ 0 & 2 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 335 & 0\\ 336 & 3 & 2\\ 3 & 2 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14 & 336 & 13\\ 336 & 17 & 16\\ 13 & 16 & 29\end{pmatrix}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$M=\left(A\cdot A^T\right)^2$</td></tr>
<tr><td>$\begin{pmatrix}14 & -1 & 13\\ -1 & 17 & 16\\ 13 & 16 & 29\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}14 & -1 & 13\\ -1 & 17 & 16\\ 13 & 16 & 29\end{pmatrix}=$
$=\begin{pmatrix}366 & 177 & 543\\ 177 & 546 & 723\\ 543 & 723 & 1266\end{pmatrix}$</td><td>$\begin{pmatrix}14 & 336 & 13\\ 336 & 17 & 16\\ 13 & 16 & 29\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}14 & 336 & 13\\ 336 & 17 & 16\\ 13 & 16 & 29\end{pmatrix}=$
$=\begin{pmatrix}29 & 177 & 206\\ 177 & 209 & 49\\ 206 & 49 & 255\end{pmatrix}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Редукция матрицы $(M|E)$</td></tr>
<tr><td>$\left(\begin{array}{ccc|ccc}366 & 177 & 543 & 1 & 0 & 0\\ 177 & 546 & 723 & 0 & 1 & 0\\ 543 & 723 & 1266 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$</td><td>$\left(\begin{array}{ccc|ccc}29 & 177 & 206 & 1 & 0 & 0\\ 177 & 209 & 49 & 0 & 1 & 0\\ 206 & 49 & 255 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$</td></tr>
<tr><td>$(1/366)\cdot R_1\to R_1$</td><td>$|1/29|_{337}\cdot R_1\to R_1$</td></tr>
<tr><td>$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 59/122 & 181/122 & 1/366 & 0 & 0\\ 177 & 546 & 723 & 0 & 1 & 0\\ 543 & 723 & 1266 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$</td><td>$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 285 & 286 & 93 & 0 & 0\\ 177 & 209 & 49 & 0 & 1 & 0\\ 206 & 49 & 255 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$</td></tr>
<tr><td>$(-177)\cdot R_1+R_2\to R_2$
$(-543)\cdot R_1+R_3\to R_3$</td><td>$|-177|_{337}\cdot R_1+R_2\to R_2$
$|-206|_{337}\cdot R_1+R_3\to R_3$</td></tr>
<tr><td>$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 59/122 & 181/122 & 1/366 & 0 & 0\\ 0 & 56169/122 & 56169/122 & -59/122 & 1 & 0\\ 0 & 56169/122 & 56169/122 & -181/122 & 0 & 1\end{array}\right)$</td><td>$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 285 & 286 & 93 & 0 & 0\\ 0 & 314 & 314 & 52 & 1 & 0\\ 0 & 314 & 314 & 51 & 0 & 1\end{array}\right)$</td></tr>
<tr><td>$(122/56169)\cdot R_2\to R_2$</td><td>$|1/314|\cdot R_2\to R_2$</td></tr>
<tr><td>$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 59/122 & 181/122 & 1/366 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -59/56169 & 122/56169 & 0\\ 0 & 56169/122 & 56169/122 & -181/122 & 0 & 1\end{array}\right)$</td><td>$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 285 & 286 & 93 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 71 & 293 & 0\\ 0 & 314 & 314 & 51 & 0 & 1\end{array}\right)$</td></tr>
<tr><td>$(-56169/122)\cdot R_2+R_3\to R_3$</td><td>$|-314|_{337}\cdot R_2+R_3\to R_3$</td></tr>
<tr><td>$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 59/122 & 181/122 & 1/366 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -59/56169 & 122/56169 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1\end{array}\right)$</td><td>$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 285 & 286 & 93 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 71 & 293 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 336 & 336 & 1\end{array}\right)$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>$M_1=\begin{pmatrix}1 & 59/122 & 181/122\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad M_1^T=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 59/122 & 1 & 0\\ 181/122 & 1 & 0\end{pmatrix},$
$E=\begin{pmatrix}1/366 & 0 & 0\\ -59/56169 & 122/56169 & 0\\ \hline -1 & -1 & 1\end{pmatrix}.$</td><td>$M_1=\begin{pmatrix}1 & 285 & 286\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad M_1^T=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 285 & 1 & 0\\ 286 & 1 & 0\end{pmatrix},$
$E=\begin{pmatrix}93 & 0 & 0\\ 71 & 293 & 0\\ \hline 336 & 336 & 1\end{pmatrix}.$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Редукция матрицы $\left(M_1^T\middle|E\right)$</td></tr>
<tr><td>$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 59/122 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 181/122 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$</td><td>$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 285 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 286 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$</td></tr>
<tr><td>$(-59/122)\cdot R_1+R_2\to R_2$
$(-181/122)\cdot R_1+R_3\to R_3$</td><td>$\left|-285\right|_{337}\cdot R_1+R_2\to R_2$
$\left|-286\right|_{337}\cdot R_1+R_3\to R_3$</td></tr>
<tr><td>$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -59/122 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -181/122 & 0 & 1\end{array}\right)$</td><td>$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 52 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 51 & 0 & 1\end{array}\right)$</td></tr>
<tr><td>$-1\cdot R_2+R_3\to R_3$</td><td>$\left|-1\right|_{337}\cdot R_2+R_3\to R_3$</td></tr>
<tr><td>$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -59/122 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1\end{array}\right)$</td><td>$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 52 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 336 & 336 & 1\end{array}\right)$</td></tr>
<tr><td>$F=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -59/122 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix},F^T=\left(\begin{array}{cc|c}1 & -59/122 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right)$</td><td>$F=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 52 & 1 & 0\\ 336 & 336 & 1\end{pmatrix},F^T=\left(\begin{array}{cc|c}1 & 52 & 336\\ 0 & 1 & 336\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right)$</td></tr>
<tr><td>$M_R^-=\begin{pmatrix}1 & -59/122\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1/366 & 0 & 0\\ -59/56169 & 122/56169 & 0\end{pmatrix}=$
$=\begin{pmatrix}182/56169 & -59/56169 & 0\\ -59/56169 & 122/56169 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$</td><td>$M_R^-=\begin{pmatrix}1 & 52\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}93 & 0 & 0\\ 71 & 293 & 0\end{pmatrix}=$
$=\begin{pmatrix}78 & 71 & 0\\ 71 & 293 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">$A^T \cdot M_R^-$</td></tr>
<tr><td>$1/56169 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 182 & -59 & 0 \\ -59 & 122 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$
$= 1/56169 \cdot \begin{pmatrix} 482 & -362 & 0 \\ -359 & 425 & 0 \\ 428 & 67 & 0 \end{pmatrix}$</td><td>$\begin{pmatrix} 2 & 335 & 0 \\ 336 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 78 & 71 & 0 \\ 71 & 293 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$
$= \begin{pmatrix} 14 & 230 & 0 \\ 135 & 134 & 0 \\ 39 & 125 & 0 \end{pmatrix}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$A^T \cdot M_R^- \cdot A$</td></tr>
<tr><td>$1/56169 \cdot \begin{pmatrix} 482 & -362 & 0 \\ -359 & 425 & 0 \\ 428 & 67 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} =$
$= 1/56169 \cdot \begin{pmatrix} 1688 & -1568 & 722 \\ -1568 & 1634 & -227 \\ 722 & -227 & 1418 \end{pmatrix}$</td><td>$\begin{pmatrix} 14 & 230 & 0 \\ 135 & 134 & 0 \\ 39 & 125 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 336 & 3 \\ 335 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} =$
$= \begin{pmatrix} 242 & 2 & 165 \\ 2 & 267 & 336 \\ 165 & 336 & 30 \end{pmatrix}$</td></tr>
<tr><td>$A^+ = 1/56169 \cdot \begin{pmatrix} 1688 & -1568 & 722 \\ -1568 & 1634 & -227 \\ 722 & -227 & 1418 \end{pmatrix} \cdot$
$\cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10/79 & -28/237 & 2/237 \\ -23/237 & 32/237 & 3/79 \\ 25/237 & 1/79 & 28/237 \end{pmatrix}$</td><td>$A^+ = \begin{pmatrix} 242 & 2 & 165 \\ 2 & 267 & 336 \\ 165 & 336 & 30 \end{pmatrix} \cdot$
$\cdot \begin{pmatrix} 2 & 335 & 0 \\ 336 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 303 & 189 & 155 \\ 71 & 121 & 192 \\ 84 & 64 & 148 \end{pmatrix}$</td></tr>
</table>

В результате вычислений в СОК по второму модулю $m_2 = 347$ была получена матрица $A^+ = \begin{pmatrix} 189 & 240 & 82 \\ 98 & 271 & 22 \\ 331 & 123 & 107 \end{pmatrix}$. Далее нужно объединить результаты по первому и второму модулям. Например, в первой матрице $a_{23}^+ = 121$, а во второй матрице $a_{23}^+ = 271$.

<table>
<tr><td>$m_2 = 347$</td><td>$m_1 = 337$</td></tr>
<tr><td>$\underline{271}$
271</td><td>121
271</td></tr>
<tr><td>$\left|271 - 271\right|_{347} = 0$</td><td>$\left|121 - 271\right|_{337} = 187$
$\left|1/347\right|_{337} = 236$</td></tr>
<tr><td></td><td>$\left|187 \cdot 236\right|_{337} = \underline{322}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$S = 271 + 322 \cdot 347 = \underline{112005}$</td></tr>
</table>

Для нахождения результата в позиционной системе применяем расширенный алгоритм Евклида.

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td>$M = 347 \cdot 337 = 116939$</td><td>0</td></tr>
<tr><td>**112005**</td><td>**1**</td></tr>
<tr><td>$[116939/112005] = 1$</td><td>$116939 - 1 \cdot 112005 = 4934$</td><td>$0 - 1 \cdot 1 = -1$</td></tr>
</table>

$[112005/4934]=22$	$112005-4934\cdot 22=3457$	$1-(-1)\cdot 22=23$
$[4934/3457]=1$	$4934-1\cdot 3457=1477$	$-1-23\cdot 1=-24$
$[3457/1477]=2$	$3457-2\cdot 1477=503$	$23-(-24)\cdot 2=71$
$[1477/503]=2$	$1477-2\cdot 503=471$	$-24-71\cdot 2=-166$
$[503/471]=1$	$503-1\cdot 471=32$	$71-(-166)\cdot 1=237$
$[471/32]=14$	$471-14\cdot 32=23$	$-166-237\cdot 14=-3484$
$[32/23]=1$	$32-1\cdot 23=9$	$237-(-3484)\cdot 1=3721$
$[23/9]=2$	$23-2\cdot 9=5$	$-3484-3721\cdot 2=-10926$
$[9/5]=1$	$9-1\cdot 5=4$	$3721-(-10926)\cdot 1=14647$
$[5/4]=1$	$5-1\cdot 4=1$	$-10926-14647\cdot 2=-25573$
$[4/1]=4$	$4-4\cdot 1=0$	

После применения алгоритма Евклида были получены дроби $\frac{4934}{-1};\frac{3457}{23};\frac{1477}{-24};\frac{503}{71};\frac{471}{-166};\frac{32}{237}$..... Среди этих дробей только $\frac{32}{237}$ удовлетворяет условию $N \le 237$. Аналогично можно преобразовать все элементы полученных матриц.

Приведенный численный пример позволяет выделить и сравнить главные преимущества и недостатки ПСС и СОК. Общий объем вычислений в ПСС значительно меньше чем в СОК. Главным недостатком ПСС является наличие переносов между разрядами. Это ограничивает скорость вычислительных устройств. При выполнении арифметических операций в ЭВМ, работающих в ПСС, происходит накопление ошибок округлений. Применение СОК позволяет полностью исключить ошибки округлений. Так как операции выполняются независимо по всем модулям, то появляется возможность многократно сократить время решения задачи. При этом в несколько раз возрастает общий объем арифметических операций. Для выполнения всех преобразований существует множество эффективных методов [2], но они могут дать хороший результат только в случае если ЭВМ работает полностью в СОК, или в случае проведения параллельных вычислений на нескольких компьютерах одновременно.

Список литературы

1. Грегори, Р. Безошибочные вычисления. Методы и приложения. М.: Мир, 1988. – 207 с.
2. Червяков Н. И. Нейрокомпьютеры в остаточных классах. М.: Радиотехника, 2003. 270 с.

EXACT FINDING OF THE GENERALIZED RETURN MATRIX OF MOORE – PENROUZA IN SYSTEM OF RESIDUAL CLASSES

N. I. CHERVIAKOV
M. V. CHERNOVA

Stavropol State University

e-mail:
dechernov@yandex.ru

At the solution of practical tasks the system of the linear equations can appear not joint. In this case its normal pseudo-decision which can be found by means of Moore's generalized return matrix – Penrouza is accepted to the decision of system. One of optimum methods of finding of this matrix is the algorithm Ermita. At realization of this method on the COMPUTER the main problem is accumulation of errors of roundings off. Work is devoted to a question of increase of accuracy of calculations when finding the generalized return matrix by means of system of residual classes. Possibility of construction the arithmeticians allowing completely to exclude errors of roundings off is shown.

Key words: Moore's generalized return matrix – Penrouza, algorithm Ermita, system of residual classes, Zhordan's method – Gauss, errors of the roundings off, Euclid's expanded algorithm, Farey's fractions.