УДК 517.956

ЗАДАЧА ГЕЛЛЕРСТЕДА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА-БИЦАДЗЕ СО СМЕШАННЫМ ОТКЛОНЕНИЕМ АРГУМЕНТА В ПРОИЗВОДНЫХ

Е.В. Чаплыгина

Орловский государственный университет,
ул. Комсомольская, 95, Орел, 302026, Россия, e-mail: lena260581@yandex.ru

Аннотация. Исследуется задача Геллерстедта для уравнения смешанного типа с оператором Лаврентьева-Бицадзе в главной части и опережающе-запаздывающим аргументом в производных. Доказана теорема единственности решения задачи без ограничений на величину отклонения. Вопрос существования решения связан с разрешимостью неоднородного разностного уравнения с переменным коэффициентом.

Ключевые слова: оператор Лаврентьева-Бицадзе, задача Геллерстедта, разностное уравнение.

1. Пусть

$$A_{xy} \equiv (R_x^{\tau} H(x) + R_x^{-\tau} H(3\tau - x) - 1)(\partial/\partial x + \sqrt{-\operatorname{sgn} y}\, \partial/\partial y)\,, \qquad 0 < \tau \equiv \text{const}\,,$$

где $H(\xi)$ – функция Хевисайда; R_x^{Θ} – оператор сдвига, $R_x^{\Theta} q(x) = q(x - \Theta)$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$L(U(x,y)) \equiv U_{xx}(x,y) + U_{yy}(x,y)\operatorname{sgn} y = A_{xy}(U(x,y))\,, \tag{1}$$

в области $D = D^+ \bigcup D^- \bigcup I$, где $D^+ = \{(x,y) : 0 < x < 3\tau,\ 0 < y < h\} = D_0^+ \bigcup D_1^+ \bigcup D_2^+$ $(0 < h \equiv \text{const})$ и $D^- = D_0^- \bigcup D_1^- \bigcup D_2^-$ – эллиптическая и гиперболическая части области D, причем

$$\begin{aligned} &D_k^+ = \{(x,y) : k\tau < x < (k+1)\tau, 0 < y < h\}\,, \\ &D_k^- = \{(x,y) : k\tau - y < x < (k+1)\tau + y, -\tau/2 < y < 0\}(k = 0,1,2)\,, \\ &I = \{(x,y) : 0 < x < 3\tau, y = 0\} = I_0 \bigcup I_1 \bigcup I_2\,. \end{aligned}$$

Обозначим $D_k = D_k^+ \bigcup D_k^- \bigcup I_k$, где $I_k = \{(x,y) : k\tau < x < (k+1)\tau,\ y = 0\}(k = 0,1,2)$.

Задача G. Найти в области D функцию

$$U(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D \backslash (\{x = \tau\} \cup \{x = 2\tau\})) \cap C^2(D \backslash (I \cup \{x = \tau\} \cup \{x = 2\tau\}))\,,$$

удовлетворяющую уравнению (1), краевым условиям

$$U(0,y) = U(3\tau, y) = 0\,, \quad 0 \leqslant y \leqslant h; \tag{2}$$

$$U(x,h)=\varphi(x)\,,\quad 0\leqslant x\leqslant 3\tau, \tag{3}$$

$$U(x,x-x_k)=\psi_k(x)\,,\quad (k\tau+x_k)/2\leqslant x\leqslant x_k, \tag{4}$$

$$U(x,x_k-x)=\rho_k(x)\,,\quad x_k\leqslant x\leqslant (x_k+(k+1)\tau)/2, \tag{5}$$

$$k\tau<x_k<(k+1)\tau\quad (k=0,1,2);$$

условиям сопряжения $U(x,-0)=U(x,+0)=\omega(x), 0\leqslant x\leqslant 3\tau$,

$$U_y(x,-0)=U_y(x,+0)=\nu(x)\,,\quad 0<x<3\tau,\quad x\neq\tau,2\tau; \tag{6}$$

условиям согласования

$$\varphi(0)=\varphi(3\tau)=0\,,\quad \psi_k(x_k)=\rho_k(x_k)\ \ (k=0,1,2), \tag{7}$$

где $\varphi(x)$, $\psi_k(x)$, $\rho_k(x)$ – заданные непрерывные достаточно гладкие функции.

Теорема. *Если функции*

$$\begin{aligned}&\varphi(x)\in C[0,3\tau]\cap C^2(0,3\tau)\,,\\ &\psi_k(x)\in C[(k\tau+x_k)/2,x_k]\cap C^2((k\tau+x_k)/2,x_k)\,,\\ &\rho_k(x)\in C[x_k,(x_k+(k+1)\tau)/2]\cap C^2(x_k,(x_k+(k+1)\tau)/2)\,,\qquad k=0,1,2\end{aligned}$$

абсолютно интегрируемы на своих промежутках; $\varphi(0)=\varphi(3\tau)=0$, $\psi_k(x_k)=\rho_k(x_k)$ *и* $\psi_k'(x),\rho_k'(x)$ *при* $x\to x_k$ *допускают интегрируемую особенность, то существует единственное решение* $U(x,y)$ *задачи* G.

2. Единственность решения задачи G следует из утверждений:

Лемма 1. *Если* $U(x,y)$ *– решение уравнения (1) в области* $D^-=D_0^-\bigcup D_1^-\bigcup D_2^-$ *из класса* $C(\bar D^-)\cap C^2(D^-)$, *обращающееся в нуль на характеристиках*

$y=x-x_k$, $y=x_k-x$ $(k=0,1,2)$, *то* $\beta=\displaystyle\int\limits_0^{3\tau}\omega(x)\nu(x)dx\geqslant 0$.

Доказательство леммы аналогично приведенному в [1, с. 128-130].

Лемма 2. *Если* $U(x,y)$ *– решение уравнения (1) в области* D^+ *из класса* $C(\bar D^+)\cap C^2(D^+\setminus(\{x=\tau\}\cup\{x=2\tau\}))$, *обращающееся в нуль при* $x\to 0,3\tau$, *если* $0\leqslant y\leqslant h$, *а также при* $y\to h$, $0\leqslant x\leqslant 3\tau$, *то*

$$\beta\leqslant 0 \text{ и } \beta+\frac{i}{2}\,\gamma+\iint\limits_{D^+}(U_x^2(x,y)+U_y^2(x,y))dxdy=0\,,$$

где

$$\gamma=\int\limits_0^{3\tau}\omega^2(x)dx-2\int\limits_\tau^{3\tau}\omega(x)\omega(x-\tau)dx\geqslant 0\,.$$

□ Доказательство следует из тождества

$$U(x,y)[(L - A_{xy})U(x,y)] = \Big(U(x,y)U_x(x,y) + \frac{1}{2}U^2(x,y)\Big)_x +$$

$$+ \Big(U(x,y)U_y(x,y) + \frac{i}{2}U^2(x,y)\Big)_y - U_x^2(x,y) - U_y^2(x,y) -$$

$$- H(x-\tau)U(x,y)[U_x(x-\tau,y) + iU_y(x-\tau,y)] -$$

$$-H(2\tau - x)U(x,y)[U_x(x+\tau,y) + iU_y(x+\tau,y)] = 0\,,$$

интегрируя которое по области $D_\varepsilon^+ = \{(x,y) : 0 < x < 3\tau, \varepsilon < y < h\}$, $0 < \varepsilon \equiv \mathrm{const}$, применяя формулу Грина [2, с.54] и условия леммы, в пределе при $\varepsilon \to 0$, в силу того, что

$$\iint\limits_{D^+} H(2\tau - x)U(x,y)U_x(x+\tau,y)dxdy = \iint\limits_{D_0^+\cup D_1^+} U(x,y)U_x(x+\tau,y)dxdy =$$

$$= \iint\limits_{D_1^+\cup D_2^+} U(x-\tau,y)U_x(x,y)dxdy = \iint\limits_{D^+} H(x-\tau)U(x-\tau,y)U_x(x,y)dxdy,$$

$$\iint\limits_{D^+} H(2\tau - x)U(x,y)U_y(x+\tau,y)dxdy = \iint\limits_{D_0^+\cup D_1^+} U(x,y)U_y(x+\tau,y)dxdy =$$

$$= \iint\limits_{D_1^+\cup D_2^+} U(x-\tau,y)U_y(x,y)dxdy = \iint\limits_{D^+} H(x-\tau)U(x-\tau,y)U_y(x,y)dxdy,$$

будем иметь

$$\int\limits_{\partial D^+} \Big[U(x,y)U_x(x,y) + \frac{1}{2}U^2(x,y)\Big]dy - \Big[U(x,y)U_y(x,y) + \frac{i}{2}U^2(x,y)\Big]dx -$$

$$- \iint\limits_{D^+} \Big[U_x^2(x,y) + U_y^2(x,y) + H(x-\tau)\Big(U(x,y)U(x-\tau,y)\Big)_x +$$

$$+ iH(x-\tau)\Big(U(x,y)U(x-\tau,y)\Big)_y\Big]dxdy = 0\,.$$

Далее, так как

$$\iint\limits_{D^+} H(x-\tau)[(U(x,y)U(x-\tau,y))_x + i(U(x,y)U(x-\tau,y))_y]dxdy =$$

$$= \iint\limits_{D_1^+ \cup D_2^+} [(U(x,y)U(x-\tau,y))_x + i(U(x,y)U(x-\tau,y))_y]dxdy =$$

$$= \int\limits_{\partial(D_1^+ \cup D_2^+)} U(x,y)U(x-\tau,y)dy - iU(x,y)U(x-\tau,y)dx = -i\int\limits_{\tau}^{3\tau} \omega(x)\omega(x-\tau)dx,$$

то из предыдущего равенства получим

$$\int\limits_0^{3\tau} \Big[\omega(x)\nu(x) + \frac{i}{2}\omega^2(x)\Big]dx - i\int\limits_{\tau}^{3\tau} \omega(x)\omega(x-\tau)dx + \iint\limits_{D^+} \Big(U_x^2(x,y) + U_y^2(x,y)\Big)dxdy = 0\,,$$

то есть

$$\beta + \frac{i}{2}\,\gamma + \iint\limits_{D^+} [U_x^2(x,y) + U_y^2(x,y)]dxdy = 0,$$

где

$$\gamma = \int\limits_0^{3\tau} \omega^2(x)dx - 2\int\limits_{\tau}^{3\tau} \omega(x)\omega(x-\tau)dx =$$

$$= \int\limits_0^{3\tau} \omega^2(x)dx - \int\limits_{\tau}^{3\tau} (\omega^2(x) + \omega^2(x-\tau) - (\omega(x) - \omega(x-\tau))^2)dx =$$

$$= \int\limits_0^{3\tau} \omega^2(x)dx - \int\limits_{\tau}^{3\tau} \omega^2(x)dx - \int\limits_{\tau}^{3\tau} \omega^2(x-\tau)dx + \int\limits_{\tau}^{3\tau} (\omega(x) - \omega(x-\tau))^2dx =$$

$$= -\int\limits_{\tau}^{2\tau} \omega^2(x)dx + \int\limits_{\tau}^{3\tau} (\omega(x) - \omega(x-\tau))^2dx \geqslant \int\limits_{\tau}^{2\tau} (\omega(x) - \omega(x-\tau))^2dx - \int\limits_{\tau}^{2\tau} \omega^2(x)dx =$$

$$= \int\limits_{\tau}^{2\tau} \Big(\int\limits_{x-\tau}^{x} \omega_\xi(\xi)d\xi\Big)^2dx - \int\limits_{\tau}^{2\tau} \Big(\int\limits_{\tau}^{x} \omega_\xi(\xi)d\xi\Big)^2dx \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{\tau}^{2\tau} \Big(\int\limits_{\tau}^{x} \omega_\xi(\xi)d\xi\Big)^2dx - \int\limits_{\tau}^{2\tau} \Big(\int\limits_{\tau}^{x} \omega_\xi(\xi)d\xi\Big)^2dx = 0\,,$$

поскольку $\omega(\tau) = 0$. ■

3. Пусть

$$U_k(x,y) = U(x,y)\,, \quad (x,y) \in D_k\,, \quad k = 0,1,2\,, \tag{8}$$

причем

$$\bar{U}(x,y) = (U_0(x,y), U_1(x+\tau, y), \qquad U_2(x+2\tau, y))^T, \qquad (x,y) \in D_0\,. \tag{9}$$

Тогда уравнение (1) в терминах функций (8) примет вид

$$L(\bar{U}(x,y)) = \Big(\frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{-\operatorname{sgn} y}\frac{\partial}{\partial y}\Big) A\bar{U}(x,y)\,, \qquad (x,y) \in D_0\,, \tag{10}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

а

$$\bar{U}(x,y) = \bar{f}(x - y(\sqrt{-\operatorname{sgn} y})^3) + e^{Ax}\bar{g}(x + y(\sqrt{-\operatorname{sgn} y})^3), \qquad (x,y) \in D_0\,, \tag{11}$$

является общим решением уравнения (10), причем $\bar{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))^T$, $\bar{g}(t) = (g_1(t), g_2(t), g_3(t))^T$ – произвольные дважды непрерывно дифференцируемые вектор-функции.

Матрица A имеет различные собственные значения $\lambda_1 = -1$, $\lambda_{2,3} = -1 \pm \sqrt{2}$ и потому она приводима к диагональному виду, то есть существует невырожденная матрица T, что

$$T^{-1}AT = \Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1-\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

где T^{-1} – матрица, обратная для T. Поскольку

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{а} \quad T^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix},$$

то

$$e^{Ax} = e^{T\Lambda T^{-1}x} = Te^{\Lambda x}T^{-1} = \frac{e^{-x}}{2}\begin{pmatrix} 1+\operatorname{ch} x\sqrt{2} & \sqrt{2}\operatorname{sh} x\sqrt{2} & -(1-\operatorname{ch} x\sqrt{2}) \\ \sqrt{2}\operatorname{sh} x\sqrt{2} & 2ch\, x\sqrt{2} & \sqrt{2}\operatorname{sh} x\sqrt{2} \\ -(1-\operatorname{ch} x\sqrt{2}) & \sqrt{2}\operatorname{sh} x\sqrt{2} & 1+ch\, x\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Поэтому из (11), в силу (9), получаем общее решение

$$U_k(x+k\tau, y) = f(x - y(\sqrt{-\operatorname{sgn} y})^3) + g(x + y(\sqrt{-\operatorname{sgn} y})^3)\alpha_k(x)\,,$$

$$(x,y) \in D_0 (k = 0,1,2)\,,$$

где

$$\alpha_0(x) = \alpha_2(x) = e^{-x}\Big(\operatorname{ch} x\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sh} x\sqrt{2}\Big)\,, \quad \alpha_1(x) = e^{-x}\Big(\operatorname{ch} x\sqrt{2} + \sqrt{2}\operatorname{sh} x\sqrt{2}\Big)\,, \tag{12}$$

а $f(t), g(t)$ – произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции, то есть

$$U_k(x,y) = f(x - k\tau - y(\sqrt{-\operatorname{sgn} y})^3) + g(x - k\tau + y(\sqrt{-\operatorname{sgn} y})^3)\alpha_k(x - k\tau)\,, \tag{13}$$

$$(x,y) \in D_k (k = 0,1,2)\,.$$

На основании (2), (8) из (13) следует

$$U_k((k+1)\tau - 0, y) = U_{k+1}((k+1)\tau + 0, y) = 0,$$

$$U'_{kx}((k+1)\tau - 0, y) \neq U'_{(k+1)x}((k+1)\tau + 0, y) = 0\,(k = 0,1), 0 \leqslant y \leqslant h\,. \tag{14}$$

Таким образом, вопрос существования решения задачи G в области $D = U_{k=0}^{2} D_k$ связан с построением в D_k на основе общих решений (13) функций $U_k(x,y)$, удовлетворяющих, ввиду (2)-(7),(8),(14), условиям

$$U_k(k\tau, y) = U_k((k+1)\tau, y) = 0, \qquad 0 \leqslant y \leqslant h\,; \tag{15}$$

$$U_k(x,h) = \varphi(x), \qquad k\tau \leqslant x \leqslant (k+1)\tau\,; \tag{16}$$

$$U_k(x, x - x_k) = \psi_k(x), \qquad \frac{k\tau + x_k}{2} \leqslant x \leqslant x_k\,; \tag{17}$$

$$U_k(x, x_k - x) = \rho_k(x), \qquad x_k \leqslant x \leqslant \frac{x_k + (k+1)\tau}{2}\,; \tag{18}$$

$$\varphi(k\tau) = \varphi((k+1)\tau) = 0, \quad \varphi'(\tau) = \varphi'(2\tau) = 0, \quad \psi_k(x_k) = \rho_k(x_k)\,, \quad k = 0,1,2; \tag{19}$$

$$U_k(x,-0) = U_k(x,+0) = \omega(x), \qquad k\tau \leqslant x \leqslant (k+1)\tau\,; \tag{20}$$

$$U_{ky}(x,-0) = U_{ky}(x,+0) = \nu(x), \qquad k\tau < x < (k+1)\tau\,; \tag{21}$$

$$\omega(k\tau) = \omega((k+1)\tau) = 0, \qquad \omega'(\tau) = \omega'(2\tau) = 0\,, \quad k = 0,1,2\,; \tag{22}$$

где

$$\varphi(x) \in C[k\tau, (k+1)\tau] \cap C^2(k\tau, (k+1)\tau)\,,$$

$$\psi_k(x) \in C[(k\tau + x_k)/2, x_k] \cap C^2((k\tau + x_k)/2, x_k)\,,$$

$$\rho_k(x) \in C[x_k, (x_k + (k+1)\tau)/2] \cap C^2(x_k, (x_k + (k+1)\tau)/2)\,,$$

абсолютно интегрируемы на своих промежутках и $\psi'_k(x), \rho'_k(x)$ при $x \to x_k$ допускают особенность интегрируемого порядка.

а) В D_k^-, используя общее решение (13), получим формулу типа Даламбера

$$U_k^-(x,y) = \omega(x-y) - \frac{1}{2}\sqrt{\alpha_k(x - k\tau - y)}\ \times$$

$$\times\ \left[\int\limits_{x_k}^{x-y} \frac{\nu(\xi)}{\sqrt{\alpha_k(\xi - k\tau)}} d\xi + \int\limits_{x_k}^{x-y} \frac{\omega'(\xi)}{\sqrt{\alpha_k(\xi - k\tau)}} d\xi\right] +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\alpha_k(x-k\tau)}{\sqrt{\alpha_k(x-k\tau+y)}}\left[\int\limits_{x_k}^{x+y}\frac{\nu(\xi)}{\sqrt{\alpha_k(\xi-k\tau)}}d\xi+\int\limits_{x_k}^{x+y}\frac{\omega'(\xi)}{\sqrt{\alpha_k(\xi-k\tau)}}d\xi\right],\quad k=0,1,2\,, \qquad (23)$$

представляющую решение задачи Коши для уравнения (1) из класса $C(\bar{D}_k^-)\cap C^2(D_k^-)$ при условиях (20)-(22) в области D_k^-, когда $\omega(x)\in C[k\tau,(k+1)\tau]\cap C^2(k\tau,(k+1)\tau), \nu(x)\in C^1(k\tau,(k+1)\tau)$ $(k=0,1,2)$.

Из (23) и условий (17),(18) найдем функциональные соотношения между $\omega(x)$ и $\nu(x)$, принесенные из D_k^- на $y=0,\ k\tau<x<(k+1)\tau$,

$$\omega'(x)=\bar{\psi}_k(x)-\nu(x), \qquad k\tau<x<x_k\,; \qquad (24)$$

$$\left(\frac{\omega(x)}{\alpha_k(x-k\tau)}\right)'=\frac{2}{\sqrt{\alpha_k(x-k\tau)}}\cdot\left(\frac{\rho_k((x+x_k)/2)}{\sqrt{\alpha_k(x-k\tau)}}\right)'+\frac{\nu(x)}{\alpha_k(x-k\tau)}\,; \qquad (25)$$
$$x_k<x<(k+1)\tau\,,$$

где

$$\bar{\psi}_k(x)=\frac{2\alpha_k(x-k\tau)}{\sqrt{\alpha_k(x-k\tau)}}\cdot\left(\frac{\sqrt{\alpha_k(x-k\tau)}}{\alpha_k((x+x_k-2k\tau)/2)}(\psi_k((x+x_k)/2)-\psi_k(x_k))\right)'.$$

б) В D_k^+ с помощью (13) и условий (16),(20) получим систему для определения функций $f(t),g(t)$

$$\begin{cases} R_x^{k\tau}[f(x)+g(x)\alpha_k(x)]=\omega(x), & k\tau\leqslant x\leqslant(k+1)\tau\,,\\ R_x^{k\tau}[f(x+ih)+g(x-ih)\alpha_k(x)]=\varphi(x), & k\tau\leqslant x\leqslant(k+1)\tau\,,\end{cases}$$

то есть

$$f(x)=R_x^{-k\tau}\omega(x)-g(x)\alpha_k(x)\,, \qquad 0\leqslant x\leqslant\tau\,; \qquad (26)$$

$$g(x)=\frac{\alpha_k(x-ih)}{\alpha_k(x)}R_x^{2ih}g(x)+\gamma(x)\,, \qquad 0\leqslant x\leqslant\tau\,, \qquad (27)$$

где

$$\gamma(x)=\frac{R_x^{-k\tau}\omega(x)-R_x^{ih-k\tau}\varphi(x)}{\alpha_k(x)},\quad i=\sqrt{-1}. \qquad (28)$$

Непосредственной подстановкой

$$g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(B_x)^n\gamma(x),0\leqslant x\leqslant\tau\,, \qquad (29)$$

в разностное уравнение (27) можно проверить, что функции (29) является его решением. Здесь $B_x=\dfrac{\alpha_k(x-ih)}{\alpha_k(x)}R_x^{2ih}$, причем

$$(B_x)^n = (B_x)((B_x)^{n-1}), \qquad n = 1, 2, \dots .$$

Ряд в правой части (29) и ряды, полученные формальным дифференцированием ряда (29), равномерно сходятся соответственно на $[0,\tau]$ и $(0,\tau)$, то есть $g(x) \in C[0,\tau] \cap C^2(0,\tau)$. Это утверждение доказывается путем сравнения с бесконечно убывающей геометрической прогрессией, поскольку, в силу (12),

$$\left|\frac{\alpha_k(x-ih)}{\alpha_k(x)}\right| = \left|e^{ih}\left(\cos h\sqrt{2} - i\sin h\sqrt{2}\,\frac{\operatorname{sh} x\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{ch} x\sqrt{2}}{\operatorname{ch} x\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sh} x\sqrt{2}}\right)\right| < \tag{30}$$

$$< \sqrt{\cos^2 h\sqrt{2} + \sin^2 h\sqrt{2}} = 1 \text{ и } \operatorname{ch} t > \operatorname{sh} t \text{ при любых } t.$$

Единственность решения (29) уравнения (27) следует из того, что однородное уравнение

$$g(x) = \frac{\alpha_k(x-ih)}{\alpha_k(x)} R_x^{2ih}(g(x)) \tag{31}$$

имеет лишь тривиальное решение.

Действительно, предположим, что существует решение уравнения (31) $g(x) \not\equiv 0$. Из (31) видно, что $g(0) = g(\tau) = 0$, в силу общих решений (13) и условий (2). Поскольку $g(x) \in C[0,\tau]$ и $g(x) \not\equiv 0$, то, на основании теоремы Ролля [2, с. 165-166], существует точка $x_0 \in [0,\tau]$, где $g(x)$ имеет экстремум, отличный от нуля. Поэтому из (31), с учетом (30), найдем

$$|g(x_0)| = \left|\frac{\alpha_k(x_0-ih)}{\alpha_k(x_0)}\right| R_{x_0}^{2ih}|g(x_0)| < |g(x_0)|,$$

то есть 1<1. Значит, существование решения $g(x) \not\equiv 0$ уравнения (31) невозможно в $C[0,\tau]$.

Подставляя найденные функции $f(x), g(x)$ из (26), (29) в общее решение (13), получим решение задачи Дирихле в D_k^+ $(k = 0,1,2)$ в операторной форме

$$U_k^+(x,y) = R_x^{k\tau-iy}(f(x)) + \alpha_k(x-k\tau)R^{k\tau+iy}(g(x)) = R_x^{-iy}(\omega(x)) +$$

$$+(\alpha_k(x-k\tau)R_x^{iy} - \alpha_k(x-k\tau+iy)R_x^{-iy})\sum_{n=0}^{+\infty}(\bar{B}_x)^n(\gamma(x)),$$

которое после учета (28) и дополнительных преобразований принимает вид

$$U_k^+(x,y) = (\alpha_k(x-k\tau)R_x^{iy}) -$$

$$-R_x^{-iy}(\alpha_k(x-k\tau-ih)R_x^{2ih}))\sum_{n=0}^{+\infty}(\bar{B}_x)^n\frac{\omega(x)}{\alpha_k(x-k\tau)} -$$

$$-(\alpha_k(x-k\tau)R_x^{iy} - \alpha_k(x-k\tau+iy)R_x^{-iy})\frac{\alpha_k(x-k\tau-ih)}{\alpha_k(x-k\tau)}R_x^{2ih} \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{+\infty} (\bar{B}_x)^n R_x^{-ih} \frac{\varphi(x)}{\alpha_k(x-k\tau)}\,, \tag{32}$$

где

$$\bar{B}_x = \frac{\alpha_k(x-k\tau-ih)}{\alpha_k(x-k\tau)} R_x^{2ih}\,. \tag{33}$$

Для получения интегрального представления (32), учтем [3, с.7], что любая непрерывная финитная на $k\tau \leqslant x \leqslant (k+1)\tau$ $(k=0,1,2)$ функция

$$f(x) = (f(\xi), \delta(\xi - x) - \delta(\xi + x)) = \int\limits_{k\tau}^{(k+1)\tau} f(\xi)[\delta(\xi - x) - \delta(\xi + x)]d\xi\,, \tag{34}$$

а

$$\delta(z) = \frac{1}{2\tau} + \frac{1}{\tau}\sum_{m=1}^{+\infty} \cos\lambda_m z = \frac{1}{2\tau} + \frac{1}{2\tau}\sum_{m=1}^{+\infty}(e^{i\lambda_m z} + e^{-i\lambda_m z}) = \frac{1}{2\tau}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda_m z} \tag{35}$$

— дельта-функция Дирака [4, с.254], причем $\lambda_m = m\pi/\tau$.

Так как, в силу (33), $(\bar{B}_x)^n(e^{-i\lambda_m x}) = e^{-i\lambda_m x}(\bar{B}_x e^{-2h\lambda_m})^n$, то, в силу (30), (34), (35), равенство (32) примет форму

$$U_k^+(x,y) = \frac{1}{2\tau}(\alpha_k(x-k\tau)R_x^{iy} - R_x^{-iy}(\alpha_k(x-k\tau-ih)R_x^{2ih}))\times$$

$$\times \int\limits_{k\tau}^{(k+1)\tau} \frac{\omega(\xi)}{\alpha_k(\xi-k\tau)} \sum_{m=-\infty}^{+\infty}(e^{i\lambda_m(\xi-x)} - e^{-i\lambda_m(\xi+x)})\frac{d\xi}{1-\bar{B}_x e^{-2\lambda_m h}} -$$

$$- \frac{1}{2\tau}(\alpha_k(x-k\tau)R_x^{iy} - \alpha_k(x-k\tau+iy)R_x^{-iy})\frac{\alpha_k(x-k\tau-ih)}{\alpha_k(x-k\tau)}R_x^{2ih}\times$$

$$\times \int\limits_{k\tau}^{(k+1)\tau} \frac{\varphi(\xi)}{\alpha_k(\xi-k\tau)} \sum_{m=-\infty}^{+\infty}(e^{i\lambda_m(\xi-x)} - e^{-i\lambda_m(\xi+x)})\frac{e^{\lambda_m h}}{1-\bar{B}_x e^{-2h\lambda_m}}d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\tau}\int\limits_{k\tau}^{(k+1)\tau} \frac{\omega(\xi)}{\alpha_k(\xi-k\tau)} \sum_{m=-\infty}^{+\infty}(e^{i\lambda_m(\xi-x)} - e^{-i\lambda_m(\xi+x)})\ \times$$

$$\times\left(\alpha_k(x-k\tau)e^{\lambda_m(h-y)}R_x^{-i(h-y)} - \alpha_k(x-k\tau+iy-ih)e^{-\lambda_m(h-y)}R_x^{i(h-y)}\right)\times$$

$$\times\ R_x^{ih}\left(\frac{1}{e^{\lambda_m h} - \bar{B}_x e^{-\lambda_m h}}\right)d\xi -$$

$$- \frac{1}{2\tau}\int\limits_{k\tau}^{(k+1)\tau} \frac{\varphi(\xi)}{\alpha_k(\xi-k\tau)} \sum_{m=-\infty}^{+\infty}(e^{i\lambda_m(\xi-x)} - e^{-i\lambda_m(\xi+x)})\ \times$$

$$\times \left(\alpha_k(x-k\tau)e^{-\lambda_m y}R_x^{iy}\left(\frac{\alpha_k(x-k\tau-ih)}{\alpha_k(x-k\tau)}\right)-\alpha_k(x-k\tau+iy-ih)e^{\lambda_m y}R_x^{-iy}\right)\times$$

$$\times\ R_x^{2ih}\left(\frac{1}{e^{\lambda_m h}-B_x e^{-\lambda_m h}}\right)d\xi\,,$$

то есть

$$U_k^+(x,y)=\int\limits_{k\tau}^{(k+1)\tau}\frac{\alpha_k(x-k\tau)}{\alpha_k(\xi-k\tau)}\omega(\xi)G_1(x,y,\xi)d\xi+$$

$$+\int\limits_{k\tau}^{(k+1)\tau}\frac{\alpha_k(x-k\tau)}{\alpha_k(\xi-k\tau)}\varphi(\xi)G_2(x,y,\xi)d\xi\,, \qquad (36)$$

где

$$G_1(x,y,\xi)=\frac{2}{\tau}\sum_{m=1}^{+\infty}\sin\ \lambda_m\xi\sin\lambda_m x\left[\frac{\mathrm{ch}\lambda_m y-\mathrm{ch}\lambda_m(2h-y)a(x)}{(1-a(x))^2\mathrm{ch}\lambda_m h-(1+a(x))^2\mathrm{sh}^2\lambda_m h}-\right.$$

$$\left.-\frac{\alpha_k(x-k\tau+iy-ih)}{\alpha_k(x-k\tau)}R_x^{2ih}\frac{\mathrm{ch}\lambda_m(2h-y)-\mathrm{ch}\lambda_m y b(x)}{(1-b(x))^2\mathrm{ch}^2\lambda_m h-(1+b(x))^2\mathrm{sh}^2\lambda_m h}\right]-$$

$$-\frac{2i}{\tau}\sum_{m=1}^{+\infty}\sin\ \lambda_m\xi\cos\lambda_m x\left[\frac{\mathrm{sh}\lambda_m y+\mathrm{sh}\lambda_m(2h-y)a(x)}{(1-a(x))^2\mathrm{ch}\lambda_m h-(1+a(x))^2\mathrm{sh}^2\lambda_m h}-\right.$$

$$\left.-\frac{\alpha_k(x-k\tau+iy-ih)}{\alpha_k(x-k\tau)}R_x^{2ih}\frac{\mathrm{sh}\lambda_m(2h-y)+\mathrm{sh}\lambda_m y b(x)}{(1-b(x))^2\mathrm{ch}^2\lambda_m h-(1+b(x))^2\mathrm{sh}^2\lambda_m h}\right],$$

$$G_2(x,y,\xi)=\frac{2}{\tau}\sum_{m=1}^{+\infty}\sin\ \lambda_m\xi\sin\lambda_m x\left[\frac{\alpha_k(x-k\tau+iy-ih)}{\alpha_k(x-k\tau)}\ \times\right.$$

$$\times\ R_x^{2ih}\frac{\mathrm{sh}\lambda_m(h-y)+b(x)\mathrm{sh}\lambda_m(h+y)}{(1-b(x))^2\mathrm{ch}^2\lambda_m h-(1+b(x))^2\mathrm{sh}^2\lambda_m h}-$$

$$\left.-\frac{\alpha_k(x-k\tau-iy-ih)}{\alpha_k(x-k\tau-iy)}R_x^{2ih}\frac{\mathrm{ch}\lambda_m(h+y)-\mathrm{ch}\lambda_m(h-y)a(x)}{(1-a(x))^2\mathrm{ch}^2\lambda_m h-(1+a(x))^2\mathrm{sh}^2\lambda_m h}\right]-$$

$$-\frac{2i}{\tau}\sum_{m=1}^{+\infty}\sin\ \lambda_m\xi\cos\lambda_m x\left[\frac{\alpha_k(x-k\tau+iy-ih)}{\alpha_k(x-k\tau)}\ \times\right.$$

$$\times R_x^{2ih}\frac{\mathrm{sh}\lambda_m(h-y)+b(x)\mathrm{sh}\lambda_m(h+y)}{(1-b(x))^2\mathrm{ch}^2\lambda_m h-(1+b(x))^2\mathrm{sh}^2\lambda_m h}-\frac{\alpha_k(x-k\tau-iy-ih)}{\alpha_k(x-k\tau-iy)}\ \times$$

$$\left.\times\ R_x^{2ih}\frac{\mathrm{sh}\lambda_m(h+y)+a(x)\mathrm{sh}\lambda_m(h-y)}{(1-a(x))^2\mathrm{ch}^2\lambda_m h-(1+a(x))^2\mathrm{sh}^2\lambda_m h}\right],$$

$$a(x) = R_x^{iy}\left(\frac{\alpha_k(x-k\tau-ih)}{\alpha_k(x-k\tau)}\right), \quad b(x) = R_x^{-iy}\left(\frac{\alpha_k(x-k\tau-ih)}{\alpha_k(x-k\tau)}\right).$$

Равенство (36)(или (32)) показывает, что $U_k^+(x,y) \in (\bar{D}_k^+) \cap C^2(D_k^+)$ на основании свойств ядер $G_j(x,y,\xi)(j=1,2)$ и $\varphi(x), \omega(x) \in C[k\tau,(k+1)\tau] \cap^2 (k\tau,(k+1)\tau)$, удовлетворяет уравнению (1) и условиям (15), (16), (19), (20).

Функциональное соотношение между $\omega(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из D_k^+ на $y=0, k\tau < x < (k+1)\tau$, найдем из (32), учитывая (21), то есть

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha_k(x-k\tau)}}\int\limits_{k\tau}^{x}\frac{\nu(\xi)d\xi}{\sqrt{\alpha_k(\xi-k\tau)}} = i\frac{1}{\sqrt{\alpha_k(x-k\tau)}}\int\limits_{k\tau}^{x}\frac{\omega'(\xi)d\xi}{\sqrt{\alpha_k(\xi-k\tau)}} -$$

$$-2i\sum_{n=0}^{+\infty}(\bar{B}_x)^n\left(\frac{\omega(x)}{\alpha_k(x-k\tau)}\right) + 2i\sum_{n=0}^{+\infty}(\bar{B}_x)^n\left(\frac{\varphi(x-ih)}{\alpha_k(x-k\tau)}\right),$$

$$k\tau < x < (k+1)\,,\tau \qquad k=0,1,2$$

или

$$(1-\bar{B}_x)\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_k(x-k\tau)}}\int\limits_{k\tau}^{x}\frac{\nu(\xi)d\xi}{\sqrt{\alpha_k(\xi-k\tau)}}\right) =$$

$$= i(1-\bar{B}_x)\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_k(x-k\tau)}}\int\limits_{k\tau}^{x}\frac{\omega'(\xi)d\xi}{\sqrt{\alpha_k(\xi-k\tau)}}\right) - 2i\frac{\omega(x)}{\alpha_k(x-k\tau)} + 2i\frac{\varphi(x-ih)}{\alpha_k(x-k\tau)}\,, \tag{37}$$

$$k\tau < x < (k+1)\tau\,, \qquad k=0,1,2\,.$$

в) Вопрос существования решения задачи G в областях $D_k = D_k^+ \cup D_k^- \cup I_k$ $(k=0,1,2)$ связан с разрешимостью системы функциональных уравнений (24), (25), (37), которые соответственно можно записать ещё в форме

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha_k(x-k\tau)}}\int\limits_{x}^{x_k}\frac{\omega'(\xi)d\xi}{\sqrt{\alpha_k(\xi-k\tau)}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_k(x-k\tau)}}\int\limits_{x}^{x_k}\frac{\bar{\psi}_k(\xi)d\xi}{\sqrt{\alpha_k(\xi-k\tau)}} -$$

$$-\frac{1}{\sqrt{\alpha_k(x-k\tau)}}\int\limits_{x}^{x_k}\frac{\nu(\xi)d\xi}{\sqrt{\alpha_k(\xi-k\tau)}}\,,$$

$$(1-\bar{B}_x)\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_k(x-k\tau)}}\int\limits_{x}^{x_k}\frac{\nu(\xi)d\xi}{\sqrt{\alpha_k(\xi-k\tau)}}\right) =$$

$$= i(1-\bar{B}_x)\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_k(x-k\tau)}}\int\limits_{x}^{x_k}\frac{\omega'(\xi)d\xi}{\sqrt{\alpha_k(\xi-k\tau)}}\right) -$$

$$- 2i\frac{\omega(x)}{\alpha_k(x-k\tau)} + 2i\frac{\varphi(x-ih)}{\alpha_k(x-k\tau)}\,, \quad k\tau < x < x_k\,;$$

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha_k(x-k\tau)}}\int\limits_{x_k}^{x}\frac{\omega'(\xi)d\xi}{\sqrt{\alpha_k(\xi-k\tau)}} =$$

$$= \int\limits_{x_k}^{x}\frac{\rho_k'((\xi+x_k)/2)}{\alpha_k(\xi-k\tau)}d\xi + \frac{1}{\sqrt{\alpha_k(x-k\tau)}}\int\limits_{x_k}^{x}\frac{\nu(\xi)d\xi}{\sqrt{\alpha_k(\xi-k\tau)}} +$$

$$+ \int\limits_{x_k}^{x}\frac{\alpha_k'(t-k\tau)}{\alpha_k(t-k\tau)}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_k(t-k\tau)}}\int\limits_{x_k}^{t}\frac{\nu(\xi)d\xi}{\sqrt{\alpha_k(\xi-k\tau)}}\right)dt, \qquad (38)$$

$$\frac{\nu(x)}{\alpha_k(x-k\tau)} - \frac{1}{\sqrt{\alpha_k(x-k\tau)}}\left(\sqrt{\alpha_k(x-k\tau)}\bar{B}_x\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_k(x-k\tau)}}\int\limits_{x_k}^{x}\frac{\nu(\xi)d\xi}{\sqrt{\alpha_k(\xi-k\tau)}}\right)\right)' =$$

$$= -i\left(\frac{\omega(x)}{\alpha_k(x-k\tau)}\right)' -$$

$$- \frac{i}{\sqrt{\alpha_k(x-k\tau)}}\left(\sqrt{\alpha_k(x-k\tau)}\bar{B}_x\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_k(x-k\tau)}}\int\limits_{x_k}^{x}\frac{\omega'(\xi)d\xi}{\sqrt{\alpha_k(\xi-k\tau)}}\right)\right)' +$$

$$+ \frac{2i}{\sqrt{\alpha_k(x-k\tau)}}\left(\frac{\varphi(x-ih)}{\sqrt{\alpha_k(x-k\tau)}}\right)', \qquad x_k < x < (k+1)\tau\,.$$

После преобразований получим разностное уравнение

$$g(x) = j\bar{B}_x(\Phi_x(g(x))) + \gamma_k(x)\,, \qquad k\tau < x < (k+1)\tau\,, \quad x \neq x_k(k=0,1,2)\,,$$
$$j = \frac{2-i}{5}H(x_k-x) - iH(x-x_k)\,,$$
$$\gamma_k(x) = H(x_k-x)\gamma_{1k}(x) + H(x-x_k)\gamma_{2k}(x)\,,$$

$$\gamma_{1k}(x) = \frac{i+3}{10}(1-\bar{B}_x)\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_k(x-k\tau)}}\int\limits_{x_k}^{x}\frac{\bar{\psi}_k(\xi)d\xi}{\sqrt{\alpha_k(\xi-k\tau)}}\right) +$$

$$+ \frac{i+3}{5}\cdot\frac{1}{\alpha_k(x-k\tau)}\int\limits_{x_k}^{x}\bar{\psi}_k(\xi)d\xi - \frac{i+3}{5}\frac{\varphi(x-ih)}{\alpha_k(x-k\tau)}\,, \qquad (39)$$

$$\gamma_{2k}(x) = -(i+1)\frac{\rho_k((x+x_k)/2)}{\alpha_k(x-k\tau)} - \frac{i+1}{2}\bar{B}_x\left(\int\limits_{x_k}^{x}\frac{\rho_k'((\xi+x_k)/2)}{\alpha_k(\xi-k\tau)}d\xi\right) +$$

$$+ (i+1)\frac{\varphi(x-ih)}{\alpha_k(x-k\tau)} ,$$

решение которого

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} j^n(\bar{B}_x(\Phi_x))^n(\gamma_k(x)) , \qquad k\tau < x < (k+1)\tau , \qquad x \neq x_k \ \ (k=0,1,2),$$

где

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{\alpha_k(x-k\tau)}} \int\limits_{x_k}^{x} \frac{\nu(\xi)d\xi}{\sqrt{\alpha_k(\xi-k\tau)}} ,$$

$$\Phi_x(g(x)) = g(x) + Q_x(g(x)) ,$$

$$Q_x(g(x)) = H(x_k - x)Q_{1x}(g(x)) + H(x - x_k)Q_{2x}(g(x)) ,$$

$$Q_{1x}(g(x)) = \frac{1+i}{2} \cdot \frac{1}{\alpha_k(\xi - k\tau + ih)} R_x^{-2ih} \int\limits_{x_k}^{x} \alpha_k'(t-k\tau)g(t)dt ,$$

$$Q_{2x}(g(x)) = \frac{1-i}{2} \cdot \int\limits_{x_k}^{x} \frac{\alpha_k'(t-k\tau)}{\alpha_k(t-k\tau)} g(t)dt .$$

Из (39), условий на $\varphi(x), \psi_k(x), \rho_k(x)$ следует, что

$$\nu(x) \in C^1((k\tau, x_k) \cup (x_k, (k+1)\tau)) ,$$

а на основании (38),

$$\omega(x) \in C[k\tau,\ (k+1)\tau] \cap C^2((k\tau,\ x_k) \cup (x_k, (k+1)\tau)) , \quad (k=0,1,2) .$$

Подставляя найденные значения $\omega(x)$ и $\nu(x)$ в $U_k^-(x,y), (x,y) \in D_k^-$ и $U_k^+(x,y)$, $(x,y) \in D_k^+$ $(k=0,1,2)$ из (23) и (36) соответственно, получим окончательный вид решений задачи G в D^- и D^+, то есть в области D.

Литература

1. Зарубин А.Н. Уравнения смешанного типа с запаздывающим аргументом / Орел: ОГУ, 1997.
2. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа / М.: 1988.
3. Агранович М.С. Обобщенные функции / М.: 2008.

GELLERSTEDT's PROBLEM FOR LAVRENTIEV-BITSADZE's EQUATION WITH MIXED DEVIATION OF DERIVATIVE ARGUMENT

B.V. Chaplygina

Orel State University,
Komsomolskaya Str., 95, Orel, 302026, Russia, e-mail: lena260581@yandex.ru

Abstract. Gellerstedt's problem for the equation of mixed type with Lavrentev-Bitsadze's operator and advanced-retarded argument in derivatives is investigated. The uniqueness theorem of the problem solution without constraints on the deviation value is proved. It is found that existence of solutions is connected with solvability of inhomogeneous differential equation having the variable coefficient.

Key words: Lavrentev-Bitsadze's operator, Gellerstedt's problem, differential equation.